88-17-98-09
(43.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Голубева Александра Ильича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

88-17-98-09

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
+	+.	+	+	+	+	+	−	84	[signature]	Дородницын Л.В.
12	12	12	12	12	12	12	0		[signature]	Пашкин В.

84 (восемьдесят четыре)

88-17-98-09 (43.2)

Чистовик

№1

Посчитаем сначала количество способов выбрать защитников и нападающих, а потом умножим на кол-во способов выбрать вратаря:

Если универсалов не берут, всего вариантов $C_5^2 \cdot C_6^3$, если берут одного в защитники — $C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3$, двух в защитники — $C_3^2 \cdot C_6^3$ (в нападающие универсалов не берут), и т.д. Для удобства составим таблицу на кол-во взятых универсалов в каждую из групп и способов выбрать составов для такого распределения.

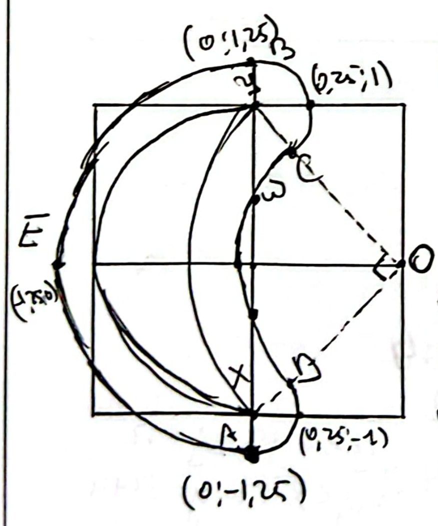
в нападающих \ в защитниках	0	1	2
0	$C_5^2 \cdot C_6^3$	$C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3$	$C_3^2 \cdot C_6^3$
1	$C_5^2 C_3^1 C_6^2$	$C_3^1 \cdot C_5^1 C_2^1 \cdot C_6^2$	$C_3^2 \cdot C_6^2$
2	$C_5^2 \cdot C_3^2 C_6^1$	$C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$	—
3	$C_5^2 \cdot C_3^3$	—	—

Просуммировав, получим
$200+300+60+$
$+450+450+45+$
$+180+90+$
$+10=500+900+100+180+105=$
$=1785$

Тогда всего вариантов
$1785 \cdot 3 = 5355$

Ответ: 5355

№2



Дуга окружности с центром в (0;0) расположится до дуги AB окружности с центром в (0;0) и радиусом 1,25; окружности с центром в (1;0) — до дуги окружности с тем же центром и радиусом на 0,25 меньшим ($\sqrt{2}-0,25$).

Отдельно рассмотрим окружности, в которые расположатся точки X и Y — центры в $(0;\pm1)$, радиусы — 0,25. Пусть они пересекаются с ω в (.)C и (.)D соответственно. Понятно, что с первой построенной окружностью они пересекутся в B и A. Тогда понятно, что фигура, ограниченная четырьмя дугами AB, BC, CD и DA соответствующих окружностей — искомая, т.к., очевидно, любая точка внутри неё удалена от исходной фигуры не более, чем на 0,25, а вне неё не найдется точек, удаленных от фигуры менее, чем на 0,25.

Чистовик

Площадь фигуры тогда можно вычислить так:

$S = S_{\text{сектора } BEA} + S_{\triangle YOA} - S_{\text{сектора } CD} + S_{\text{сектора } BC} + S_{\text{сектора } DA}$.

Очевидно, что C и D лежат на YO и XO соответственно (на линии центров касающихся окружностей ($R_1 + R_2 = 0{,}25 \cdot 5\sqrt{2} - 0{,}25\sqrt{2} = \sqrt{2} = OY$)).

$$\Rightarrow S = \frac{\pi R_1^2}{2} + 1 - \frac{\pi R_2^2}{4} (\angle COD = 90^\circ) + 2 \cdot \frac{\pi R_3^2 \cdot 3}{8} = \cancel{\ldots}$$

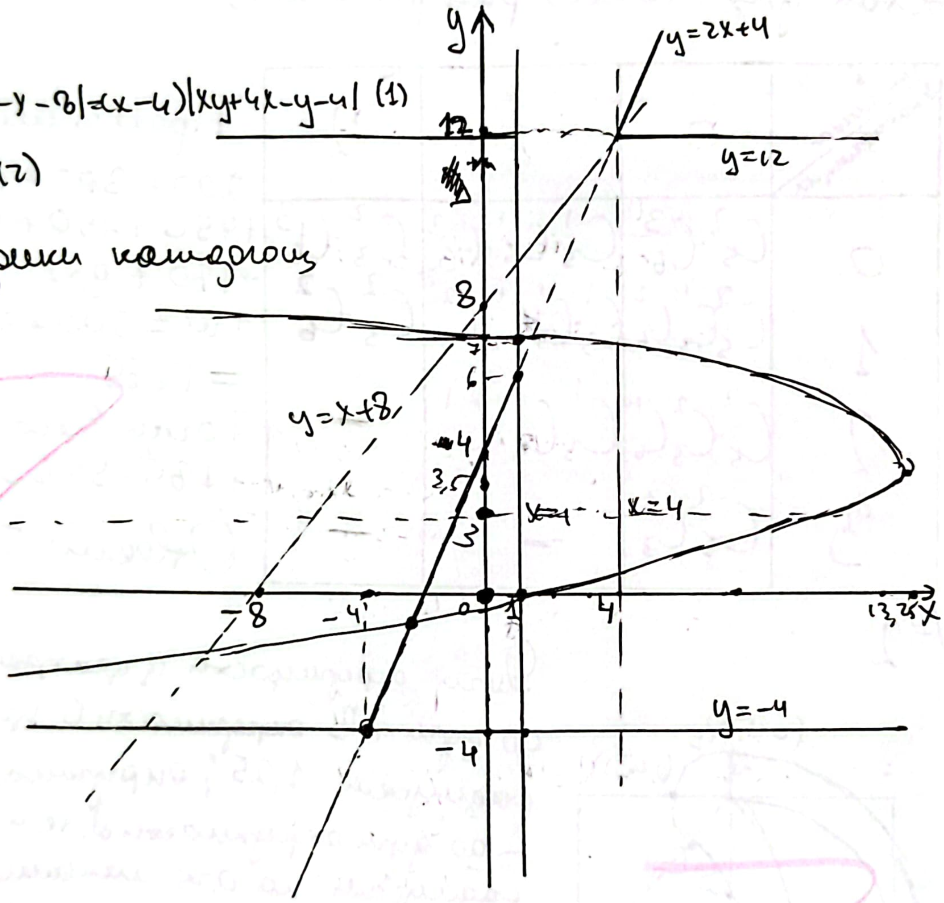
$$= \pi\left(\frac{25}{32} - \frac{33}{64} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{64}\right) - 1 = \pi\left(\frac{5}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) - 1.$$

Ответ: $\pi\left(\frac{5}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) - 1$

№3

$$\begin{cases} (xy + 4x - y - 4)|y - x - 8| = (x - 4)|xy + 4x - y - 4| & (1) \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 3 & (2) \end{cases}$$

Построим графики каждого уравнений:



(1) $(y+4)(x-1)|y-x-8| = (x-4)\cancel{|xy+4x-y-4|}\,|(x-1)(y+4)|$

1) $(y+4)(x-1) > 0$
$\Rightarrow |y - x - 8| = x - 4 \Rightarrow x \geq 4 \to y \geq x + 8:\ y = 2x + 4$; $\to y < x + 8;\ y = 12$

2) $(y+4)(x-1) < 0 \Rightarrow |y - x - 8| = -x + 4 \Rightarrow x \leq 4 \to y \geq x + 8;\ y = 12$; $\to y < x + 8;\ y = 2x + 4$

3) $(y+4)(x-1) = 0$ $\left[\begin{array}{l} y = -4 \\ x = 1 \end{array}\right.$

(2) $\sqrt{y - x + 10} = y - 3 \Rightarrow y \geq 3;\ y - x + 10 = (y-3)^2;\ x = -y^2 + 7y + 1$

$y_0 = 3{,}5$ $x(y_0) = 13{,}25$; $x = 1 \Rightarrow y = 0$ или $y = 7$.

Чистовик

По графику видно, что (2) пересекает (1) при $x=1$, $y=-4$, $y=x+8$ и $y=12$. Найдем эти точки!

$(1;0)$ $(1;7)$; $(-43;-4)$; $(-59;12)$. $\begin{cases} x=-y^2+7y+1 \\ y=2x+4 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{13\pm\sqrt{217}}{4}$

Нам нужен меньший y

$\Rightarrow \left(-\frac{3+\sqrt{217}}{8}; \frac{13-\sqrt{217}}{4}\right)$

~~Ответ: (1;0) (1;7) (-43;-4) (-59;12)~~ $\left(-\frac{3+\sqrt{217}}{8}; \frac{13-\sqrt{217}}{4}\right)$

Учитывая, что $y\geq 3$ оставляем $(1;7)$ и $(-59;12)$

Ответ: $(1;7)$ $(-59;12)$

№ 4

Пусть автомобиль a раз проехал дугу AB, b раз $-BC$ и c раз AC.

Тогда суммарно он затратит $5a+13b+19c$ минут

$\Rightarrow 5a+13b+19c=95$, $a,b,c\in\mathbb{N}_0$

1) $c=0 \Rightarrow 5a+13b=95$, $95-5a \vdots 5 \Rightarrow b \vdots 5$ при $b>5$, $a<0$ – невозможно $\Rightarrow b=5$, $a=6$

2) $c=1$; $5a+13b=76$. $b=0$ ∅ $b=1$ ∅ $b=2$ $a=10$ $b=3$ ∅ $b=4$ ∅ $b=5$ ∅ $b=6$ ∅ при $b>6$, $a<0$ – невозможно

3) $c=2$; $5a+13b=57$; $b=0$ ∅ $b=1$ ∅ $b=2$ ∅ $b=3$ ∅ $b=4$ $a=1$ при $b>2$, $a<0$ – невозможно

4) $c=3$; $5a+13b=38$; $b=0$ ∅ $b=1 \Rightarrow a=5$

~~Т.к. ... то после пре.~~

4) $c=4$; $5a+13b=19$ ∅

~~при c=5 ...~~

5) $c=5$ $a=0$, $b=0$

при $c>5$ решений, понятно, нет.

$\Rightarrow (6;5;0)$ $(10;2;1)$ $(1;4;2)$ $(5;1;3)$ $(0;0;5)$

Но нетрудно понять, что автомобиль не всегда вернется в точку A. Можно считать, что все обороты можно взять по модулю 2 (если в таком случае нельзя вернуться в 1, то и в общем нельзя). Тогда легко отсекаются случаи $(6;5;0)$ $(10;2;1)$ $(1;4;2)$ и $(0;0;5)$ → остается только случай $a=5$, $b=1$, $c=3$. Если $AB=2R_1$, $BC=2R_2$, то длина дуги $AC=\pi(R_1+R_2)=$ длина дуги $AB+$ длина дуги $BC=40$ км $\Rightarrow$ всего автомобиль проедет $13a+27b+40c=$ $=65+27+120=212$ км

Ответ: 212

Чистовик

№5

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$.

$\frac{x+1}{x-1} = t \Rightarrow x+1 = tx - t \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1} \Rightarrow f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = f(t) = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1}-1} = \frac{t-1}{2}$

$\Rightarrow f(t)$ ~~линейная функция $\Rightarrow g(x) = f^{10}(x)$ тоже линейная~~

Покажем, что $f^n(x) = \frac{x-(2^x-1)}{2^x}$ по индукции.

1) $n=1$: $f(x) = \frac{x-1}{2}$ - верно

2) для k верно $f^k(x) = \frac{x-(2^k-1)}{2^k}$

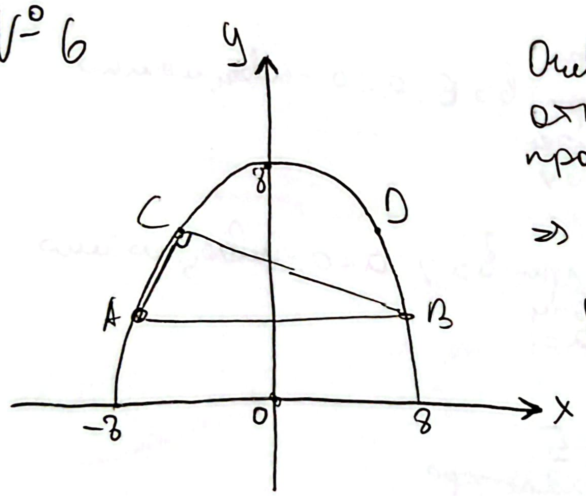
3) для $k+1$: $f^{k+1}(x) = \frac{\frac{x-(2^k-1)}{2^k} - 1}{2} = \frac{x-(2^{k+1}-1)}{2^{k+1}}$

$\Rightarrow$ 4) верно для всех n

$\Rightarrow g(x) = f^{10}(x) = \frac{x-1023}{1024} \Rightarrow tg(\alpha) = g'(x_0) = \frac{1}{1024}$

Ответ: $\frac{1}{1024}$

№6



Очевидно, парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точки $(\pm 8;0)$ $(0;8)$ $\Rightarrow b=8$, $a=-\frac{1}{8} \Rightarrow y = 8 - \frac{x^2}{8}$

Пусть $A(x_0;y_0)$, тогда, учитывая $y_A = y_B$ ($AB \parallel Ox$) получаем, что $x_B = -x_A = -x_0$.
$C(x_1;y_1)$.

Т.к. $\triangle ACB$ - пр/у, то по т. Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$ $4x_0^2 = (x_0+x_1)^2 + (x_0-x_1)^2 + 2(y_0-y_1)^2$. Учитывая $y_0 = 8 - \frac{x_0^2}{8}$, $y_1 = 8 - \frac{x_1^2}{8}$,

после упрощения получаем: $x_0^2 = x_1^2 + \frac{(x_0^2-x_1^2)^2}{64}$

$\Rightarrow (x_0^2-x_1^2)\left(\frac{x_0^2-x_1^2}{64} - 1\right) = 0$. Т.к. $x_0 \neq x_1$, то $\frac{x_0^2-x_1^2}{8} = 8$, но расстояние между CD и AB $= y_1 - y_0 = \frac{x_0^2-x_1^2}{8} = 8$

Ответ: 8

Чистовик

№7

Заметим, что для чисел вида $\underbrace{999\ldots99}_{n}$ выполняется $S(mn) = S(n)$ для $1 \le m \le n$. Действительно $\underbrace{999\ldots99}_{n} = 10^n - 1$, тогда $mn = m \cdot 10^n - m$, причем $m < 10^n$, если число m имеет запись $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$, то $m \cdot 10^n - m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k \underbrace{000000000}_{n}} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$, причем нулей на конце в первого числа больше цифр второго $\Rightarrow$ после вычитания в полученном числе цифры на позициях i и $i+n$ в сумме будут давать 9, т.к в конце много 0, то мы займём "10^n" у $a_k \Rightarrow (a_k - 1) + (10 - a_k) = 9$. (не умаляя общности, можно считать $a_k \ne 0$, т.к иначе число, получающееся в результате $= 10 \cdot$ число, получающееся при $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$, т.е. имеет ту же сумму цифр. Так можно продолжать, пока последняя цифра $= 0$, потом останется число с ненулевой цифрой на конце, для которого утверждение будет верно). По аналогичным соображениям, т.к мы занимаем 10^{i-1} на каждой i-ой позиции, сумма цифр на i-ой и на $i+n$-ой скажется $a_t + (10 - 1 - a_t) = 9$. $\Rightarrow$ Вся сумма цифр окажется равно $9n$, как и в числе $\underbrace{999\ldots}_{n}$, и т.д. $\rightarrow$ искомое число — 85 девяток ~~...~~.

Ответ: $\underbrace{9999\ldots99}_{85}$

№8

Т.к НОД$(x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b) = 1$, НОД$(x_a - x_c, y_a - y_c, z_a - z_c) = 1$ и НОД$(x_b - x_c, y_b - y_c, z_b - z_c) = 1$, где x_a — абсцисса вершины $A(1;1;3)$ и т.д, то кроме самих вершин на сторонах треугольника целых точек нет. ($B(7;2;11)$ $C(5;5;5)$)

Плоскость треугольника задается уравнением $3x - 2y - 2z + 5 = 0$. Причем если внутри есть целые точки, то их ординаты — либо 2, либо 3, либо 4.

Чистовик

1) $y=2 \Rightarrow 3x-2z=-1$

$x=-1+2k$ $\Rightarrow$ в треугольнике лежат

$z=1+3k$ точки $(1;2;4)$; $(3;2;7)$ $(5;2;6)$

2) $y=3$; $3x-2z=1$

$x=1+2k$ $\Rightarrow (3;3;2)(5;3;7)$

$z=-1+3k$

3) $y=4$ $3x-2z=3$

$x=1+2k$ $\Rightarrow (3;4;3)(5;4;6)$ $\Rightarrow$ всего 10 точек

$z=3k$

Ответ: 10

Черновик

$(xy+4x-y-4)|$

$(x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|(x-1)(y+4)|$

$x \geq 4$

1) $(x-1)(y+4) > 0 \quad |y-x-8| = x-4$

1) $y = 2x+4$ при $y \geq x+8$

2) $-y+x+8 = x-4$, $y = 12$

2) $(x-1)(y+4) < 0$

$\cancel{y>x+8}$ 12

$b=2$

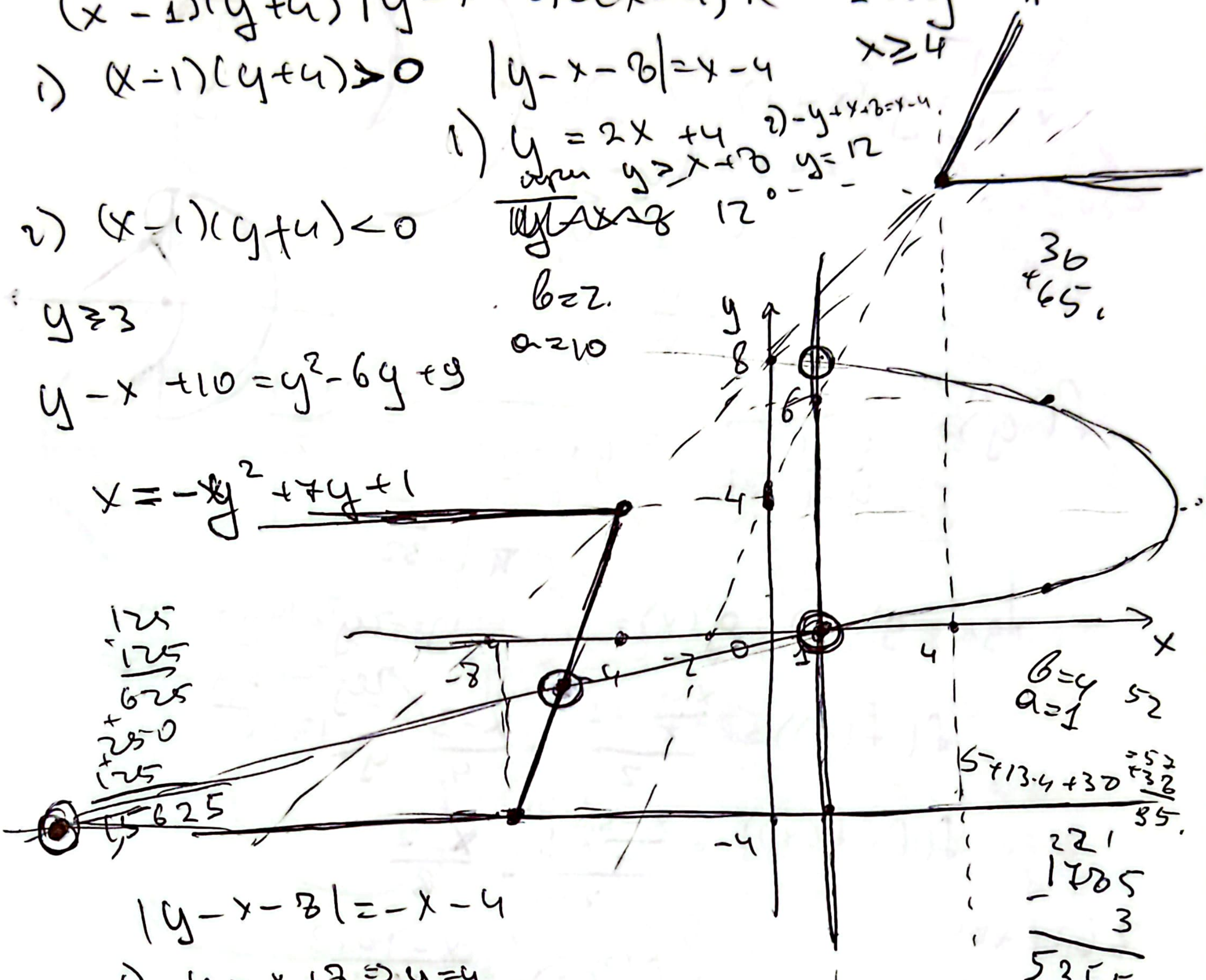
$a=10$

$y \geq 3$

$y - x + 10 = y^2 - 6y + 9$

$x = -y^2 + 7y + 1$

36
+65



125
125
625
+250
125
15625

$b=4$
$a=1$
52

$5+13\cdot4+30 = 57$
+32
85

221
1785
3
5355

$|y-x-8| = -x-4$

1) $y \geq x+8 \Rightarrow y = 4$.

2) $y < x+8$; $-y+x-8 = -x+4$
$y = 2x+4$.

I. $(1;0)$
II. $(1;7)$
III. $(-43;-4)$
IV. $(\quad)$

13
19

+57
18
75

15625 | 2
-14 | 78125
16

$-16+28+1 = 13$

$+y^2 - 7x + 6 = 0 \quad x = 7$.

$\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$

18
28
44.

$y = 1$
$y = 6$.

+59
18

$\sqrt{2}-1$ и $\frac{1}{4}$.

$\frac{x-3}{4}-1$

$$\begin{cases} 2x = 2y^2 + 14y - 2 \\ y = 2x + 12 \end{cases}$$

$4\sqrt{2}$ и 5.

$y - 12 = -2y^2 + 14y + 2$

$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)^2 =$

$3y^2 - 13y - 1420$

$= 2 + \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

14
·20
280
+32
112
+169
381

$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 14 \cdot 8}}{4} = \frac{13 \pm \sqrt{381}}{4}$

$2 \cdot 4x_0^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_0^2 + x_1^2 \quad \left(\frac{x_1^2 - x_0^2}{8}\right)^2$

$x_0^2 \quad x_1^2$

Черновик.

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

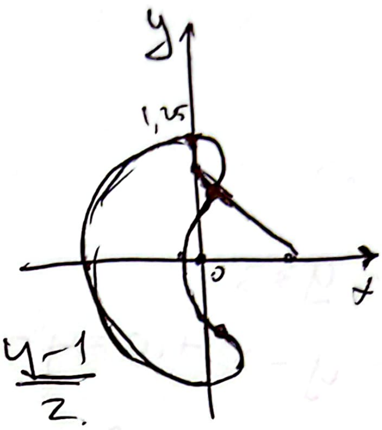
$\frac{169}{+48} \over 217$

$\frac{x+1}{x-1} = y;\ (x+1) = (x-1)y$

$x+1 = xy - y$

$x(y-1) = y+1$

$x = \frac{y+1}{y-1}$.



$f(y) = \frac{1}{\frac{y+1}{y-1} - 1} = \frac{y-1}{y+1-y+1} = \frac{y-1}{2}$

$\pi\left(\frac{25}{32} - \right.$

$tg\,\alpha = g'(x_0) = g'(x) =$

$y = 2y^2 + 14y + 2 + 4$

$2y^2 - 13y - 6 = 0$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$y = \frac{13 \pm \sqrt{}}{}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$

$36 + 1 + 64$.

$g(x)\ f^{10}(x) = \frac{x-1023}{1024}$.

$S(mn) = S(n)$

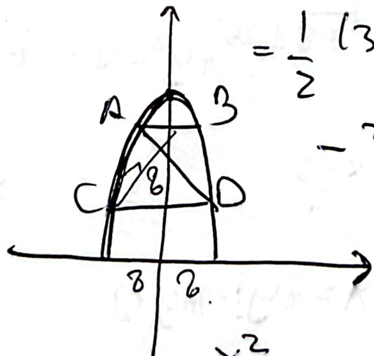
$g'(x_0) = 0$. $\frac{1}{2}\left(\frac{13-\sqrt{217}}{4} - 4\right) =$

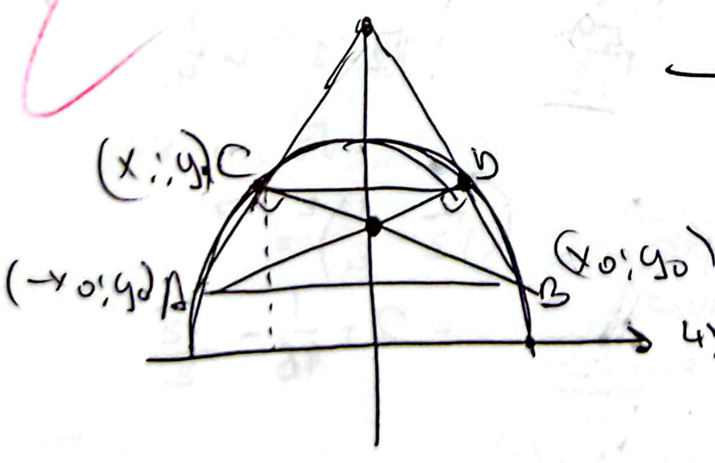
$S(n^2) = S(n)$

$= \frac{1}{2}(13 - \sqrt{217}$

$S(10n) = S(n)$

$- \frac{3+\sqrt{217}}{8}$





$y = 6 - \frac{x^2}{8}$

$4x_0^2 = (x_0+x_1)^2 + (x_0-x_1)^2 + 2(y_1-y_0)^2$

$2x_0^2 = 2x_1^2 + 2\left(8 - \frac{x_0^2}{8} - \left(8\left(1 - \frac{x_1^2}{8}\right)\right)^2 = \right.$ черновик

$3\cdot5\cdot2\cdot5\cdot\frac{6^3}{2} = 10$

$x_0^2 = x_1^2 + \frac{(x_0^2 - x_1^2)^2}{8}$ $10\cdot3\cdot6$

$3\cdot\frac{5\cdot6^3}{2} = 45$

$(x_0^2 - x_1^2) = \frac{(x_0^2 - x_1^2)^2}{8} \rightarrow x_0^2 - x_1^2 = 0$

$\frac{x_0^2 - x_1^2}{8} = 1 \Rightarrow x_0^2 - x_1^2 = 8$

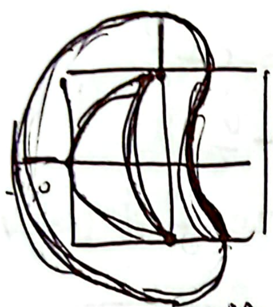
$\frac{5}{16} + \frac{14}{80} = \frac{25+14}{80} \approx \frac{1}{2}\ 8$

$10\cdot3\cdot\frac{5\cdot6^3}{2} = 450$

$\Rightarrow y_0^2 - y_1 = \frac{x_0^2 - x_1^2}{8} = \boxed{1}$

$3\cdot5\cdot4\cdot5$ $\frac{4\cdot5}{2} = 10$

$3\cdot4\cdot5 = 60$



1;0

$\frac{4\cdot5}{2}\cdot\frac{4\cdot5\cdot6}{6} = \boxed{200}$

$3\cdot5\cdot6$

$\frac{5}{16} + \frac{1{,}4}{8}$

$3\cdot5\cdot6$

$2\frac{1}{16} - \frac{\sqrt2}{2} =$

75 − 27 = 48

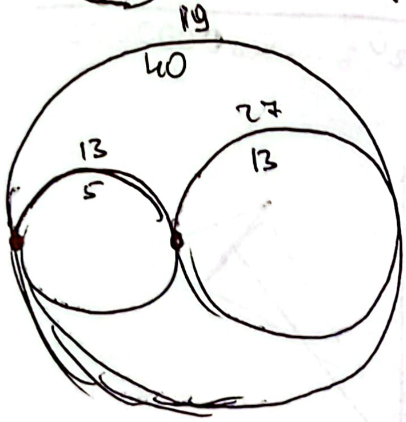
48 − 27 = 21

75 − 57 = 18

75 − 32

1500, 1680, 1785

13, 26, 39, 52



$\frac{33}{16} - \frac{\sqrt2}{2}$

$75 = a\cdot13 + b\cdot27 + c\cdot19$

1) $b = 0$. $13a + 19c = 75$

$c = 0$ $\varnothing$

$c = 1$ $13a = 56$ $\varnothing$

$c = 2$ $13a = 37$ $\varnothing$

$c = 3$ $13a = 18$ $\varnothing$

$\frac{45\cdot3}{45\cdot8}$

$10\cdot4$

$\frac{2\cdot\frac{1}{16}\cdot3}{8} = \frac{3}{64}$

2) $b = 1$; $13a + 19c = 48$

$c = 0$ $\varnothing$

$c = 1$ $\varnothing$

$c = 2$ $\varnothing$

$\frac{16}{32}$

$\frac{5}{16}$

3) $b = 2$. $13a + 19c = 21$.

$75 = 5a + 13b + 19c$

1) $c = 0$

$75 = 5a + 13b$

$\left[\begin{array}{l} b = 5 \\ a = 2 \end{array}\right.$

$27\cdot5 + 13\cdot2 = 135 + 26 = \boxed{161}$

$-144 +$

$-12^2 + 12\cdot7 + 1 = -12\cdot5 + 1 = -59$

$\frac{3}{8}\cdot2\cdot\frac{1}{16}$

$\frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

$16 + 28 = 44$

$c = 1$ $\varnothing$

2)

$-\frac{49}{4} + \frac{49}{2} + 1 =$

$= \frac{49}{4} + 1 =$

$= 13{,}25$

3 5 6

3(

$C_5^2 \cdot C_6^3 + 3\cdot5\cdot C_6^3 +$

$+ C_3^2\cdot C_6^3 + C_5^2\cdot3\cdot C_6^2 + C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_6^1 + C_5^2\cdot1 + \ldots$

Черновик

$99 \cdot 2 = 198$

$99 \cdot 11$: $99 + 990 = 1089$

$99 \cdot 4 = 396$

990

$a+b=0{,}2d$

$c=-0{,}4d$

$5a+0{,}4d-4{,}4d+d=0.$

$a+b=3c+d=0$

$7a+2b+11c+d=0$

$5a+5b+5c+d=0.$

$\overline{999999}.$

$a=0{,}0d$

$a+b=-c+\frac{d}{5}$

10^m-1

$(10^m-1)\cdot n=$

$2c-\frac{d}{5}+d=0$

$S=9m$

$=10^m\cdot n-n.$

$2c=-\frac{4}{5}d$; $c=-0{,}4d$

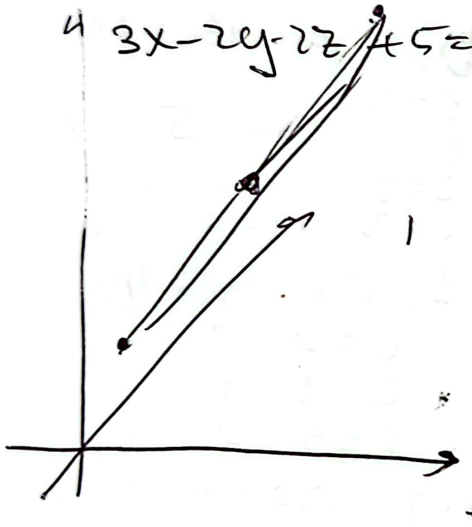
$0{,}6d_x-0{,}4d_y-0{,}4d_z+d=0.$

$9999\cdot m$

$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n0000000} - a_n$

$3x-2y-2z+5=0.$

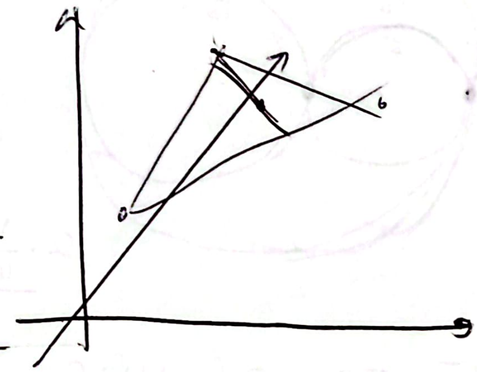
99



1

$+396$

$-1.$



$\overline{1}$

$-a_1a_2\ldots$

99

(+1) −1

$10000 - 10$

$99\cdot 11=100\cdot n-n>$

$=1100-11$

$22000-22 = 21978$

$200-2=198$