0 071118 320007

07-11-18-32
(40.2)

+1 [illegible]

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Голубева Андрея Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Подпись участника

Дата
«25» 02 2024 года

ценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	8	8	8	12	0	12	0	60

№ 7 пр. Чистовик

$f(10^{89} \cdot m - m) = 9 \cdot 89$

№ 8

П - плоскость треугольника

~~$x = x_0 + kt_1$~~ $ax + by + cz = d$

~~$y = y_0 + $~~

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = d \\ 11x + 10y + 6z = d \\ 5x + 8y + 9z = d \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{d - 4y - 5z}{3}$

$d = \dfrac{5}{3}d - \dfrac{20}{3}y - \dfrac{25z}{3} + 8y + 9z =$

$= \dfrac{2}{3}d = -\dfrac{4}{3}y - \dfrac{2}{3}z$

$\Rightarrow d = -2y - z$

$3x + 4y + 5z = -2y - z$

$\Rightarrow 3x + 6y + 6z = 0$

$\Rightarrow 8x + 4y = d \Rightarrow x = \cancel{\frac{d}{2}z}\ \dfrac{d}{8} - \dfrac{y}{2}$

чистовик

$$\frac{3}{8}d - \frac{3}{2}y + 4y + 8z = d$$

$$\frac{5}{8}d = \frac{5}{2}y + 5z$$

$$\Rightarrow d = 4y + 8z$$

$$\Rightarrow y = \frac{d}{4} - 2z \Rightarrow x = \frac{d}{8} - \frac{d}{8} + z =$$

$$= z$$

$$\cancel{\Rightarrow 4y + 8z = d}$$

$$17z + 10y = d \Rightarrow 17z + \frac{10}{4}d - 20z = d$$

$$\Rightarrow 3z = \frac{3}{2}d \Rightarrow z = \frac{d}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}d \;;\; x = \frac{d}{2}$$

$\frac{a}{2} - \frac{3b}{4} + \frac{c}{2} = 1$ – Ур. пл. (a, b, c) – перем.

Посчитаем кол-во

$\Rightarrow$ $2a - 3b + 2c = 4$

Строго

Чистовик

№1

Универсал не может быть вратарём $\Rightarrow$ вратаря можно выбрать только из 3-х данных вратарей. $\Rightarrow$ Надо посчитать кол-во способов выбрать нап. и защ. и умножить это на 3.

1. Если оба защитника не явл. универсалами:

$$\frac{4\cdot3}{2!}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3!}=6\cdot120=720$$

2. Если ровно один защ. явл. универс.:

$$4\cdot3\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{3!}=2\cdot9\cdot8\cdot7=14\cdot72=720+288=1008$$

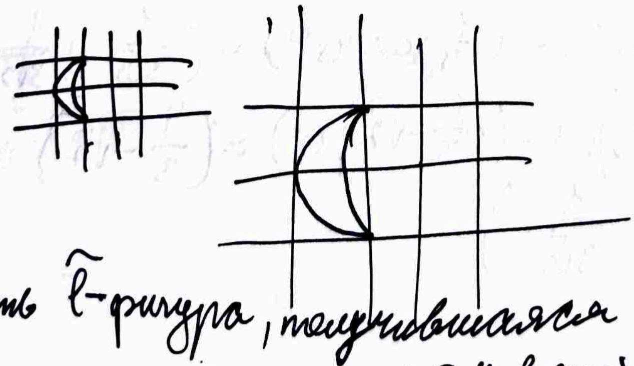
3. Если оба защ. явл. универс.:

$$\frac{3\cdot2}{2!}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}=8\cdot7\cdot3=168$$

• $(720+1008+168)\cdot3=(1008+888)\cdot3=1896\cdot3=$
$=(2000-104)\cdot3=6000-312=5688$

Ответ: 5688.

№2



Пусть $\tilde{\ell}$ — фигура, получившаяся к утру.
Пусть дуга окр с центром в (0;0) — это $\widehat{x}$.
Заметим что границы фигуры $\tilde{\ell}$ будет содержать дугу ABC окр. с центром в (0;0) и радиусом $1\cdot\frac{1}{3}$, где

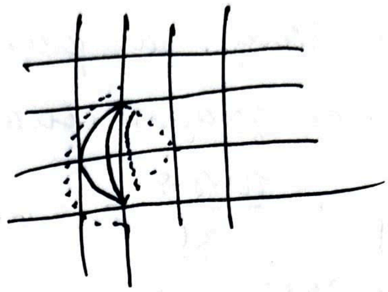
№2пр Чистовик

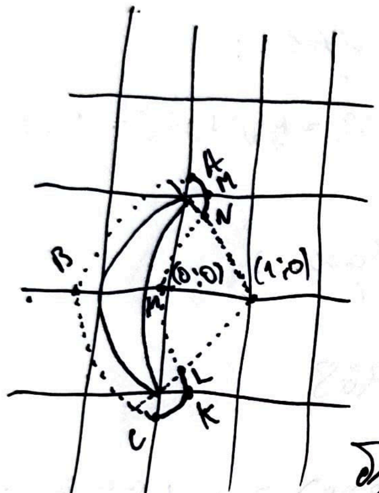
5.

$A-(0;1\frac{1}{3})$; $B-(-1\frac{1}{3};0)$; $C-(0;-1\frac{1}{3})$.

Т.к. полученные точки будут на расстоянии от $(0;0)$ не более ~~в~~ $1\frac{1}{3}$.

$\widetilde{X}$ – изнач. фигура





~~Все точки ф~~

$\widetilde{\ell}$ – это мн. точек изнач. фигуры + точки на расстоянии не более $\frac{1}{3}$ от точек изнач. фигуры.

Заметим, что фигура $\widetilde{\ell}$ будет иметь след. границу:
Дуга ABC + Дуга CKL + + дуга LrN + дуга NMA.

, где $K=(\frac{1}{3};-1)$; ~~L = ...cos 45~~;

$L=(\frac{1}{3}\cdot\cos 45^\circ; -1+\frac{1}{3}\cdot\cos 45^\circ)=(\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}-1)$

~~$r=(\sqrt{2}-1-\frac{1}{3})$~~; $r=(1\frac{1}{3}-\sqrt{2};0)=(\frac{4}{3}-\sqrt{2};0)$

$N=(\frac{1}{3\sqrt{2}}; 1-\frac{1}{3\sqrt{2}})$

$M=(\frac{1}{3};1)$

Точки лежащие за этой границей не принадлежат $\widetilde{\ell}$, т.к. расстояние до каждой из точек ~~X~~ больше, чем расстояние

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях

№2пр.

Чистовик

от какой-то точки на границе до ближайшей точки из D, но расстояние от ~~границы~~ до точки на границе Г до ближайшей точки D равно $\frac{1}{3}$ => расстояние от точки, что находятся за пределами указанной границы имеют раст. до ближайшей точки в D более, чем $\frac{1}{3}$. => они не подходят.

Площадь ~~этой~~ Г равна:

$$\frac{\pi\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right)^2-\pi\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2}{4}+\frac{\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}\cdot 2=$$

$$=\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi}{9}=\pi\left(\frac{3\sqrt{2}+1}{9}\right)$$

$\frac{\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}\cdot 2$ — сумма двух половинок окружн. с центрами в $(0;1)$ и $(0;-1)$.

Ответ: $\pi\left(\frac{3\sqrt{2}+1}{9}\right)$.

№3

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)\,|y-x-10|=(x-4)\cdot|xy+2x-y-2|\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y+2)\cdot|y-x-10|=(x-4)\cdot|(x-1)|\cdot|y+2|\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$$

№3пр Чистовик

$$\begin{cases}(x-1)(y+2)\cdot|y-x-10| = (x-4)\cdot|x-1|\cdot|y+2|\\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$$

1. Если $x<1$, $y<-2$

$|y-x-10| = (x-4) < 0$ реш. нет.

2. $x=1$.

$\sqrt{y+7} = y-5 \Leftrightarrow \begin{cases} y+7 = y^2-10y+25 \\ y \geq -7\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-11y+18 \\ y\geq -7\end{cases} \Rightarrow y \in \{2;9\}$

$\boxed{x,y \in \{(1;2);(1;9)\}}$

3. $y=-2$

$\sqrt{6-x} = -7$ нет реш.

4. $x>1$; $y>-2$

$\Rightarrow \begin{cases}|y-x-10| = (x-4) \cancel{\Rightarrow x\geq 4}\\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \cancel{\Rightarrow y-x+8 = y^2-10y+25}\end{cases}$

$\cancel{\Leftrightarrow y^2-11y+(25-8+x)}$

$D = 121 -$

I. Если $y \geq x+10 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+6 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+14} = 2x+1$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

№ 3пр. Чистовик.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+14 \geq 0 \\ 4x^2+4x+1 = x+14 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^2+3x-13=0 \Rightarrow D = 9+208 =$
$= 217$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}; \; y = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{4} + 6$, но $x > 1$

$y - x \geq 10 \Rightarrow (x;y) \in \left\{ \left(\frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}; \frac{-3+\sqrt{217}}{4} + 6 \right) \right\}$

$\cancel{\left(\frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}; \frac{-3+\sqrt{217}}{4} + 6 \right)\}}$

II. Если $y = x + 10 \Leftrightarrow x + 10 - y = x - 4 \Rightarrow y = 14$

$\Rightarrow x > 4$

$\sqrt{22 - x} = 9$ нет реш. т.к.

б. $x > 1$; $y < -2$;

$\begin{cases} |y - x - 10| = 4 - x \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 < 0 \end{cases}$ противореч.

Если ~~$y > x+10$~~ $y < x + 10 \Rightarrow x + 10 - y = 4 - x$
$\Rightarrow y = 2x + 6 \Rightarrow (x;y) = \cancel{\left\{ \left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8}; \frac{-3-\sqrt{217}}{4} + 6 \right) \right.}$

~~но т.к. $x > 1$ и $y < x + 10$~~

$\Rightarrow (x;y) = \cancel{\left\{ \frac{-3+\sqrt{217}}{8}; \frac{-3-\sqrt{217}}{4} + 6 \right\}}$

Но т.к. $y < -2$, то реш. нет.

~~$x > 1$~~
~~$y < x + 10$~~

5.

из пр. Чистовик

6. $x < 1;\ y > -2$

$$\begin{cases} |y-x-10| = 4-x \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

I. $y-x \geq 10 \Rightarrow y = 14$

$\sqrt{22-x} = 9 \Rightarrow x = -59$

$\Rightarrow \boxed{(x;y) = \{-59;14\}}$

II. $y-x \leq 10 \Rightarrow y-x-10 = x-4$

$\Rightarrow y = 2x+6$

$\Rightarrow \sqrt{x+14} = 2x+1$

$$\boxed{\Rightarrow (x;y) = \left\{\left(\frac{-3-\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3-\sqrt{217}}{4}+6\right)\right\}}$$

~~Ответ: $\{(1;2)\} \cup \{(1;9)\} \cup \left\{\left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3+\sqrt{217}}{4}+6\right)\right\} \cup \{(-59;14)\} \cup$~~

Ответ: $\left\{(1;2);(1;9);\left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3+\sqrt{217}}{4}+6\right);\right.$
$\left.(-59;14);\left(\frac{-3-\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3-\sqrt{217}}{4}+6\right)\right\}$

...запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

~~$t = 88$ мин $= 8 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 17 \cdot 1$~~

$t = 88$ мин $= a \cdot 7 + b \cdot 11 + c \cdot 17$

$85 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 17 \cdot 1$

~~$1.\ a = 0 \Rightarrow 85 = 11b + 17c$~~

1. $c = 0 \Rightarrow 85 \underset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 11b \underset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow b \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow [b = 2;\ a = 9]$

2. $c = 1 \quad 85 - 17 = 68 \underset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow 11b \underset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow b \underset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow b = 3$

$b = 3;\ a = 5$

3. $c = 2 \Rightarrow \underline{51} \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 11b \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow b \underset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow b = 4;\ a = 1$

4. $c = 3 \Rightarrow 34 \underset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow 11b \underset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow b \underset{7}{\equiv} 5$, но $55 > 34$

5. $c = 4 \Rightarrow 17 \underset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow 11b \underset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow b \underset{7}{\equiv} 6$, но $66 > 17$

6. $c = 5,\ a = 0,\ b = 0$

Итого

$(a;b;c) = \{(9;2;0);(5;3;1);(1;4;2)\}$

$9;2;0$ – не подходит, т.к. он не вернется в точку А, т.к. $9 \not\vdots 2$, а $2 \vdots 2$

$5;3;1$ ок.

$(1;4;2)$ – не подходит, т.к. $4 \vdots 2$; $2 \vdots 2$; $1 \not\vdots 2$.

$\Rightarrow$ длина пути – $5 \cdot 11 + 3 \cdot 25 + x = 55 + 75 + x =$
$= 130 + x$

№4пр. Чистовик

$x = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = 15 + 125 = 40$

$\Rightarrow 130 + 40 = 170$

Ответ: 170.

№5

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2} = f\left(1 - \frac{4}{x+2}\right)$

~~$f(0) = f(-1) =$~~

~~$z = \frac{x-2}{x+2}$~~

~~$f(-1) = -1$~~

$z = 1 - \frac{4}{x+2} \Rightarrow f(z) = \frac{z-1}{2}$

~~$f(f(z)) = \frac{\frac{z-1}{2} - 1}{2} =$~~

$g(x) = \underbrace{f(f(f(f(\ldots(z))))\ldots))}_{11 \text{ раз}} = \frac{\frac{\frac{\frac{z-1}{2} - 1}{2} - 1}{2} - 1}{2}$

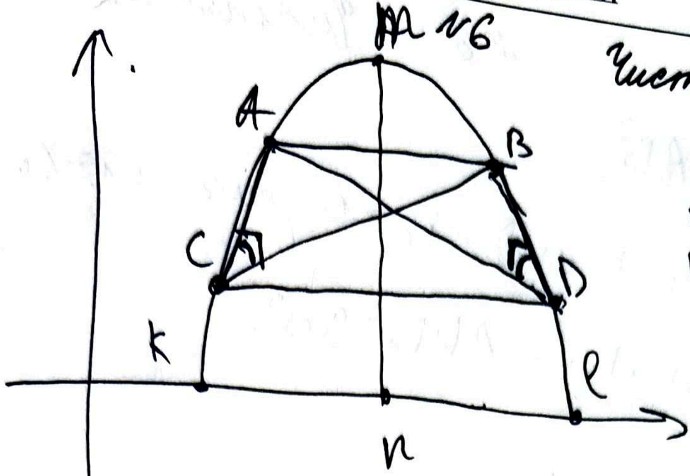
$= \frac{z}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^9} - \ldots - \frac{1}{2} =$

$= \frac{z}{2^{11}} - 1 + \frac{1}{2^{11}}$

$g'(z) = \frac{1}{2^{11}} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2^{11}}$

Ответ: $tg = \frac{1}{2^{11}}$

№6



Чистовик

~~MN = 20~~

Kl = 20

MN = 10

Заметим, что если AB ∥ Kl, то ~~Kl~~ K симметрично l отн MN. ~~В~~ ОО $N=(0;0)$, $M=(0;10)$ и C симметрично D.

$B=(x_0;-bx_0^2+20)$

$a=20$

~~$AC=(2x_0$~~

$A=(-x_0;-bx_0^2+20)$

$D=(x_1;-bx_1^2+20)$

$AD^2=(x_1+x_0)^2+b^2(x_1^2-x_0^2)^2$

$BD^2=(x_1-x_0)^2+b^2(x_1^2-x_0^2)^2$

$AB^2=4x_0^2$

~~$\Rightarrow AD^2=BD^2+AB^2 \Rightarrow 4x_1x_0=4x_0^2$~~

~~$\Rightarrow$ либо $x_0=0$, либо $x_1=x_0$~~

и x

№6 Чистовик

$AD^2 = BD^2 + AB^2$

$\Rightarrow 4x_0^2 = 4x_1x_0 \Rightarrow$ либо $x_0 = 0$, либо $x_1 = x_0$

$x_1 \neq x_0$, т.к. $\angle ADB = 90^\circ$.

$\Rightarrow x_0 = 0$

№7

Если $n \neq 10^{89}$, то

$x = n \cdot 10^{89} = \overline{n\underbrace{0000000\ldots}_{89}}$

~~x + n — пос~~ Последние 89 цифры числа $x+n$ совпадают с послед. 89 цифрами n.

$\Rightarrow$ а цифры перед послед. 89 превращаются в цифры с суммой равной первой цифре числа n. $f(n + n[1]) = n[1]$

$n[i]$ — i-ая цифра числа n слева.

$\Rightarrow$ ~~первая цифра~~ $n[1] = 9$, т.к. иначе $n[1] < n[1] + 1 < 10 \Rightarrow$ и все цифры кроме может последней равны 9, т.к. иначе переход через десяток не дойдет до первого разряда. $\Rightarrow n = \underbrace{9\ldots9}_{89}$ $\overline{x} = 10^{89} - n$

Заметим, что $n=10$ подходит.

Ответ: $n = \underbrace{999\ldots99}_{90}$ — самое большое 90-значное число.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик 60 (шестьдесят)

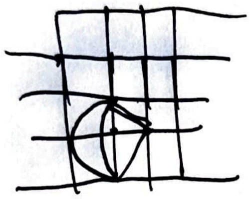
~~1В~~ 2З 3Н -В

~~3В~~ 4З 7Н 4З4 - Е

3. ~~Если~~ 1. 2 из 4, тогда $\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3!}=$

$=6\cdot120$

2. 1 из 4 и 2 из 3, тогда



$(xy+2x-y-2)(y-x-10)=$

$=(x-4)(xy+2x-y-2)$

$(x-1)(y+2)$

$\sqrt{y-x+8}=y-5$

$y^2-10y+25=y-x+8$

$y^2-11y+(25-8+x)$

$\sqrt{y+4}=y-5$

$y^2-10y+25=y+4$

y^2-

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!