0 298981 870006

29-89-81-87
(40.20)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" по математике
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Голубева Ивана Максимовича.
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

29-89-81-87

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
12	12	12	0	12	12	0	0	60		Хохлов Ю.С.
										Васильев Д.А.

Решение верное

1.

Решение верное

2.

Решение верное

3.

Нет решения

4.

...запрещается

29-89-81-87
(40.20)

Черновик 60 (шестьдесят)

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$\frac{x-1}{x+1} = t$

$(x-1) = (x+1)t$

$x(1-t) = t+1$

$x = \frac{t+1}{1-t}$

$f'(t) = \frac{1}{2}$

$f(t) = -\frac{1}{\frac{t+1}{1-t}+1} = -\frac{1}{\frac{t+1+(1-t)}{1-t}} = -\frac{1-t}{2}$

$g(x) = \underbrace{f(f(f \ldots f(x)))}_{9}$

$g(x)' = \underbrace{f \ldots f(x)'}_{9} =$

$U(V(x))' = \frac{du}{dV} \cdot \frac{dV}{dx} = d f^n$

$\cancel{g} \; U(V(x))$

$\cancel{g} \; f(g(t)) = a(cx+b)+d = ac x + ab + d$

f - лин. ф-ция g

$f(x) = ax+b \quad g(x) = cx+b \quad \left(\frac{1}{2}\right)^9$

$(xy - 3 + 3x - y)^2 \; (\; (y-x-9)^2 - (x-4)^2) = 0$

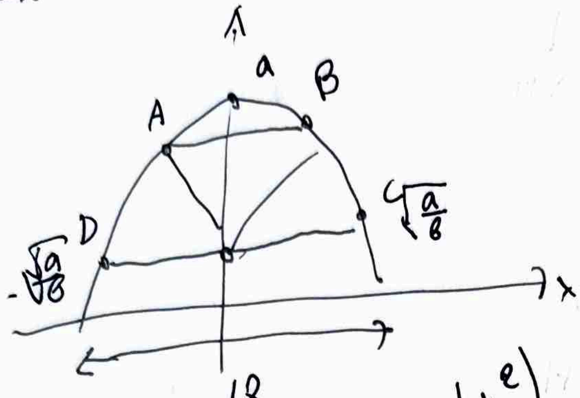
$y - x + 9 = (y-4)^2 \quad (y-13)(y-2x-5)$

$(x-1)y + 3(x-1) = (y+3)(x-1)$

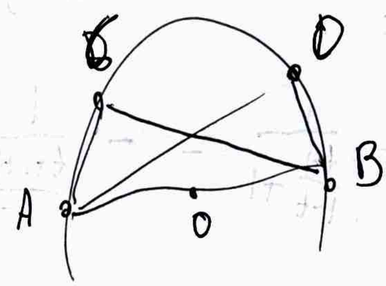
Черновик

$a = bx^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$



$(x_c ; 9 - \frac{1}{9}x_c^2)$



$2\sqrt{\frac{a}{b}} = 18$

$a = 9$

$\sqrt{\frac{9}{b}} = 9$

$b = \frac{1}{9}$

$y = 9 - \frac{1}{9}x^2$

$A(x_a ; 9 - \frac{1}{9}x_a^2)$

$B(-x_a ; 9 - \frac{1}{9}x_a^2)$

$\frac{1}{9}x_a^2$

$\frac{1}{9}x_a$

3 5 6

$C(x_c ; 9 - \frac{1}{9}x_c^2)$

$x_a^2 = x_c^2 +$

$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{AC}(x_c - x_a ; -\frac{1}{9}x_c^2 + \frac{1}{9}x_a^2)$

$x_c - x_a ; \frac{1}{9}(x_a - x_c)(x_a + x_c)$

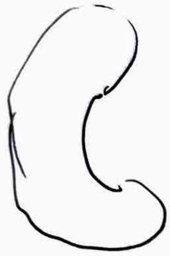
$\vec{BC}(x_c + x_a ; \frac{1}{9}(x_a - x_c)(x_a + x_c))$

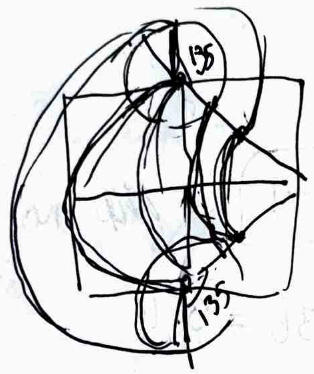
$x_c^2 - x_a^2 + \frac{1}{81}(x_a^2 - x_c^2)^2 = 0$

черновик

1 вр 2 зону знак.

$$2\cdot C_5^2\cdot C_9^3 + 2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_8^3 + 2C_3^2\cdot C_7^3$$





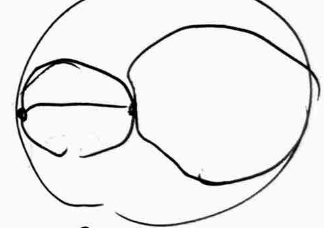
A - множество точек полумесяца

B - мн-во точек круга с радиусом $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C - получившаяся фигура

сумма по Минковскому

$C = A + B$



$x^2+y^2=1$ $(x-1)^2+y^2=2$

AB - 15 км за 5 мин.

Bc - 25 км за 13 мин.

AC - $\overset{40}{19}$ мин

$AB=\frac{30}{\pi}$

$Bc=\frac{50}{\pi}$ $AC=\frac{80}{\pi}$

$\overset{\smile}{AC}=40$

$95=5\cdot 19$

$$5a+13b+19c=95$$

$$5a+13b\underset{19}{\equiv}0 \quad 13b+19c=0$$

черновик.

задача 4

$5a+13b+19c=5\cdot19$

1 реш. $\boxed{c=5 \quad a=0 \quad b=0}$ - не подходит

групп.

$c=4 \qquad 5a+13b=19 \quad \varnothing$

$c=3 \qquad 5a+13b=2\cdot19$

38

5 1

$\boxed{c=3 \quad a=5 \quad b=1}$ - по

$c=2 \qquad 5a+13b=3\cdot19$

$b\neq0 \quad 5 \ 7$

$b=1$

$\boxed{c=2 \quad b=4 \quad a=1}$ -

$c=1 \qquad 5a+13b=4\cdot19.$

$c=\varnothing$

$13\cdot x\leq4\cdot19=76$

~~40+36~~ $40+36=76$

$x=50+65=65$

$x\leq5 \qquad 13x\leq95$

$x\leq7$

$\boxed{c=1 \quad b=2 \quad a=10}$ -

$c=0 \qquad 5a+13b=5\cdot19$

$b \vdots 5$

$\boxed{c=0 \ b=5 \ a=6}$ -

$\boxed{c=0 \quad b=0 \quad a=19}$ -

29-89-81-87 (40.20)

Листовик

Задача 1

среди 2 защ. могут быть : * 2 универсала,
** 1 универсал,
*** 0 универсалов

*: C_2^1 - кол-во способов выбрать вратарей

C_3^2 - кол-во сп. выбрать защитников

C_7^3 - кол-во сп. выбрать нападающих

($6_{нап}$ + 1 унивв.)

аналогично:

**: C_2^1 - вратары

$C_5^1 \cdot C_3^1$ - защитники

C_8^3 - нап.

***: C_2^1 - врат.

C_5^2 - защ.

C_9^3 - нападающие

Итого:

$$C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 + C_2^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 + C_2^1 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3 =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 35 + 30 \cdot 8 \cdot 7 + 20 \cdot 12 \cdot 7 =$$

$$= 6 \cdot 35 + 210 \cdot 8 + 240 \cdot 7 = 210 + 210 \cdot 8 + 210 \cdot 8 =$$

$$= 210 \cdot 17 = 2100 + 1470 = 3570 \text{ способов}$$

Ответ: 3570 сп.

черновик

Задача 5

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$t=\frac{x-1}{x+1}$ $\quad (x+1)t = x-1$

$t\neq 1$ $\quad x(t-1) = -1-t$

$x=\frac{t+1}{1-t}$

$f(t) = -\frac{1}{\frac{t+1}{1-t}+1} = -\frac{1}{\frac{t+1+(1-t)}{1-t}} = -\frac{1-t}{2} =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}$ - линейная ф-ция

$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}$, при $t\neq 1$

пусть $h(x)=ax+b$ - лин. ф-ция $\quad k(x)=cx+d$ - лин. ф-ция

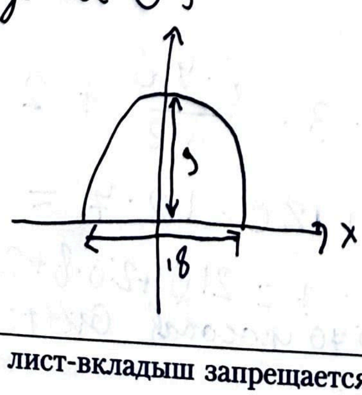
$h(k(x)) = a(cx+d)+b = acx+ad+b$ - лин. ф-ция

Коэф перед x - произведение коэф. перед x у h(x) и k(x)

=) $\quad g(x) = f(\underbrace{\ldots\ldots f(x)}_{9})$ - линейная ф-ция => тангенс угла наклона кас. к граф. - коэф. перед x. т.е. $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$

Ответ: $\frac{1}{512}$

Задача 6



$y=a-bx^2$ $\quad$ пер. параболы с Ox:

$a-bx^2=0$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ =>

ширина поля $2\sqrt{\frac{a}{b}}$

$4b=a$

=)

чистовик

=>

$a=9 \quad 2\sqrt{\frac{a}{b}}=18$

$\sqrt{\frac{9}{b}}=9$

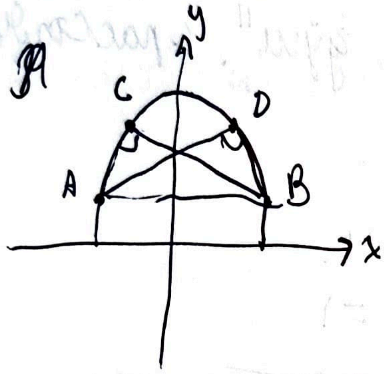
$b=\frac{1}{9}$ => график $y=9-\frac{1}{9}x^2$ – график симм. самому себе отн. Oy.

пусть A имеет координаты $(x_a; 9-\frac{1}{9}x_a^2)$, ~~тогда~~

т.к. $AB \parallel Ox$ => B имеет коорд. $(-x_a; 9-\frac{1}{9}x_a^2)$

пусть C имеет координаты $(x_c; 9-\frac{1}{9}x_c^2)$

аналогично рас. с B т. D имеет коорд. $(-x_c; 9-\frac{1}{9}x_c^2)$



$\rho(AB, CD) = |y_A - y_C| =$

$= |9-\frac{1}{9}x_a^2-(9-\frac{1}{9}x_c^2)| =$

$= |\frac{1}{9}x_c^2-\frac{1}{9}x_a^2| = \frac{1}{9}|x_c^2-x_a^2| =$

$= \frac{1}{9}|t|$

т.к. $\angle ACB=90^\circ$ => $\vec{AC}\cdot\vec{BC}=0$

$\vec{AC}(x_c-x_a; \frac{1}{9}(x_a^2-x_c^2))$

$\vec{BC}(x_a+x_c; \frac{1}{9}(x_a^2-x_c^2))$

$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = x_c^2-x_a^2+\frac{1}{9}^2(x_a^2-x_c^2)^2=0$

пусть $x_c^2-x_a^2=t$

$t+\frac{1}{81}t^2=0$

$t(1+\frac{1}{81}t)=0$

$t=0 \quad t=-81$

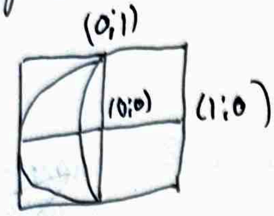
$t=-81$

$t\neq0$ ~~если t=0~~ иначе т. будут ~~совпадать~~ совпадать что противоречит условию =>

$\rho(AB, CD) = \frac{1}{9}|t| = \frac{1}{9}\cdot81=9$

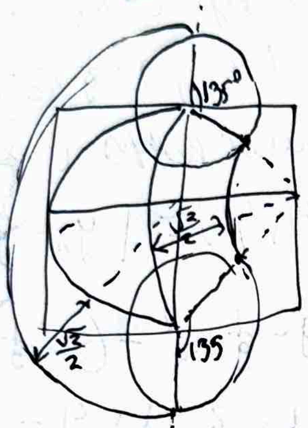
Ответ: 9

чистовик Задача 2.



получившаяся фигура - мн-во точек, таких что расстояние до полумесяца $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

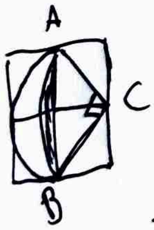
пол. фигура разбивается на изн. полумесяц, два сектора с радиусом $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и углом $45^\circ+90^\circ=$ $=135^\circ$ и две "дуги". с расстоянием $\frac{\sqrt{2}}{2}$



радиус первой окр. $\sqrt{(1-0)^2+0^2}=1$

радиус второй окружности $\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.

площадь полумесяца - площадь сектора с углом в 180° у 1 окр. минус площадь семента с углом 90° у 2 окр.



$$S_{\text{полумес.}}=S_{\text{сект}}-S_{\text{сегм}}=\frac{S_{1\text{окр}}}{2}-S_{\text{сектора}}+$$

$$+S_{\text{тр.}ABC}=\frac{\pi r_1^2}{2}-\frac{S_{2\text{окр}}}{4}+\frac{AB\cdot\rho(C,AB)}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi r_2^2}{4}+\frac{2\cdot1}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4}+1=$$

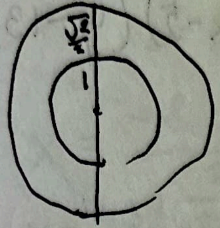
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=1$$

Площадь двух секторов - сектор с углом $135^\circ\cdot2=270^\circ$ и рад. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S_{\text{сект}}=\frac{3}{4}\cdot\pi r^2=\frac{3}{4}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3\pi}{8}$$

чистовик.

Площадь 1 "дуги" — площадь сектора с углом 180° и рад. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ минус площадь сектора с углом 180° и рад 1.



$$S_{1 дуги} = S_{1 сект} - S_{2 сект} = \frac{\pi\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi 1^2}{2} = \frac{\pi\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}{2} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

Площадь 2 „дуги" - разность площадей секторов с углом 90° и радиусами $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{2 дуги} = S_{1 сект} - S_{2 сект} = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\pi\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi\cdot 2}{4} - \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$S_{ф} = S_{полуп.} + S_{сект} + S_{1 дуги} + S_{2 дуги} =$$

$$= 1 + \frac{3\pi}{8} + \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{2\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}\cdot 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 1 + \pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $1+\pi+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Задача 3

$(xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y|$

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y) \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

возведём в квадрат оба равенства.

чистовик.

$$\begin{cases} ((x-1)(y+3))^2((y-x-9)^2-(x-4)^2)=0 \\ y-x+9=(y-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x-1)(y+3))^2((y-2x-5)(y-13))=0 \\ x=-y^2+9y+9-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x=1 & (1) \\ y=-3 & (2) \\ x=\frac{y-5}{2} & (3) \\ y=13 & (4) \end{array}\right. \\ x=-y^2+9y-7 \quad (5) \end{cases}$$

(1) и (5) :

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-y^2+9y-7 \end{cases}$$

$1=-y^2+9y-7$

$0=-y^2+9y-8$

$0=(y-1)(-y+8)$

$y=1 \quad y=8$

(1; 1)

(1; 8)

(2) и (5) :

$$\begin{cases} y=-3 \\ x=-y^2+9y-7 \end{cases}$$

$x=-(-3)^2+9(-3)-7=$

$=-9-27-7=-43$

(-43; -3)

(3) и (5) :

$$\begin{cases} x=\frac{y-5}{2} \\ x=-y^2+9y-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x+5 \\ x=-y^2+9y-7 \end{cases}$$

~~$\frac{y-5}{2}=-y^2+9y-7 \mid \cdot 2$~~

~~$y-5=-2y^2+18y-14$~~

~~$0=-2y^2+17y-9$~~

$x=-(2x+5)^2+9(2x+5)-7$

$\cancel{2y^2-17y+9=0}$

$\cancel{D=b^2-4ac=289-4\cdot 18=289-72=217}$

$x=-4x^2-20x-25+18x+45-7$

$4x^2+3x-13=0$

$D=b^2-4ac=9+16\cdot 13=217$

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 13 \\ \hline 48 \\ +160 \\ \hline 208 \end{array}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$$

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{4}+5$$

$$\left(-\frac{3+\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3+\sqrt{217}}{4}+5\right)$$

$$\left(-\frac{3-\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3-\sqrt{217}}{4}+5\right)$$

(4) и (5)

$$\begin{cases} y=13 \\ x=-y^2+9y-7 \end{cases}$$

$x=-13^2+9\cdot 13-7=$

$=-4\cdot 13-7=-59$

$(-59;\ 13)$

нужно проверить будут ли прав. знаки в 1 рав-ве и выполнено ли О.Д.З:

Проверка. $(1;1)$:

$(1-3+3-1)\,|1-1-9|=(1-4)\,|1-3+3-4|$

$\sqrt{1-1+9}=1-4$ – ~~неверно~~ не подходит

$(1;8)$: верхнее рав-во зануляется

нижнее: $\sqrt{8-1+9}=8-4$ – верно

$(-43;-3)$: $y-4=-7<0 \Rightarrow$ не подходит.

$$\left(-\frac{3-\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3-\sqrt{217}}{4}+5\right):\ y-4=\frac{-3-\sqrt{217}}{4}+1=$$

$$=\frac{1-\sqrt{217}}{4}<0$$ – не подходит

$\left(-\frac{3+\sqrt{217}}{8};\ \frac{-3+\sqrt{217}}{4}+5\right)$: $y-4=\frac{-3+\sqrt{217}}{4}+5-4\geq 0$

$x-4=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}-4=\frac{-35+\sqrt{217}}{8}<0$

$xy-3+3x-y=(x-1)(y+3)$

$y+3>y-4\geq 0$

$x-1=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}-1=\frac{-11+\sqrt{217}}{8}>0 \Rightarrow$

левая часть в 1 рав-ве >0 а правая <0

значит не подходит

$(-59;13)$: $y-4=9\geq 0$

$x-4=-59-4=-63<0$

$xy-3+3x-y=(x-1)(y+3)=-60\cdot 16<0$

значит верно.

Ответ: $(1;8)$ $(-59;13)$.

Задача №4 см. черновик.

там показано, что $AC=40$ км.

по кругу AB он проехал

$3\cdot 40+5\cdot 15+1\cdot 25=120+75+25=220$ км