



52-20-76-47
(40.16)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Горба Ксения Рамановна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
[Signature]

[Handwritten signature]

52-20-76-47
(40.16)

Черновик

1 в.
2 в.
3 н.

~~если ушив.~~

$$(8-2)+1=7$$

$$(9-3)+1=7 \times \frac{24}{7} = 168$$

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$(7-3)+1=5$$

если все ушив. к заус;

~~$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3} = 3 \cdot 8 \cdot 7 = 24 \cdot 7 = 168$~~

$$(7-2)+1=7$$

$$(5-2)+1=4$$

$$C_2^1 = 2$$

$$(6-2)+1=5$$

~~$C_8^2 = 28$ - заус.~~

$$(8-3)+1=6$$

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 7 \cdot 10 = 70$$

$$\begin{matrix} 8 & = & 48 \\ 8-7 & = & 56 \\ 5 & = & 64 \end{matrix}$$

$$2 \cdot 28 \cdot 70 = ?$$

$$2 \cdot 28 + 70 = 30 \cdot 70 = 100$$

$$2 + 28 + 70 =$$

если все ушив. к кан.:

$$C_2^1 = 2$$

$$C_9^3 = 168$$

$$C_9^2 = 168$$

$$5 \cdot 4^2 = 10$$

$$C_7^2 =$$

$$2 + 168 + 10 = 180$$

если $1u^1$ и $2y^1$ к кан., а $1y^1$ к заус.

$$2 \cdot 168 + 15 =$$

$$C_2^1 = 2$$

$$C_9^3 = 168 \text{ - кан.}$$

~~$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 15$~~
 ~~$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$~~
 ~~$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3} = 56 \cdot 2 = 112$~~

$$C_6^2 = 15 \text{ заус.}$$

$$15 + 168 + 2 = 185$$

$$C_2^1 = 2$$

если сначала $1u^1$ и y^1 и $3x^1$

$$C_8^2 = 28$$

в заус.

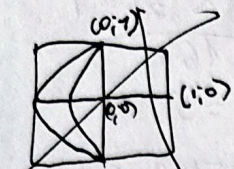
$$\begin{matrix} 185 \\ +142 \\ \hline 327 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 427 \\ +180 \\ \hline 607 \end{matrix}$$

$$C_8^3 = 112$$

$$2 \cdot 168 + 112 = 142$$

$$142 + 185 + 180 + 100 = 327 + 100 + 180 = 427 + 180 = 607 \text{ отв.}$$

Черновик



при $x=2$: $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{3}{4}$

$\sqrt{3}$ $g(x) = f(f(\dots f(\frac{x-1}{x+1})))$
 $y - x + 9 \geq 0$
 $y - 4 \geq 0$
 $y \geq 4$
 $5 - 13 = -8$

$xy - y + 3x - 3 = y(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(y+3)$
 $(xy - 3 + 3x - y) / |y - x - 9| = (x-4) / |xy - 3 + 3x - y|$

$xy + 3x - y - 3 = x(y+3) - (y+3) = (y+3)(x-1)$
 $(y+3)(x-1) / |y-x-9| = (x-4) / |(y+3)(x-1)|$

$|y-x-9| = \frac{(x-4)/x-1}{y-x+9}$
 $\sqrt{y-x+9} = y-4$
 $y-4 \geq 0$
 $(x-1)(y+3) / |y-x-9| = (x-4) / (y+3) / |x-1|$

$y-x-9 \geq 0$
 $\frac{(x-4)x-1}{x-1} = y-x-9$
 $4-x \geq -9$
 $x \leq 13$

$(x-1) / |y-x-9| = (x-4) / |x-1|$

$(x-1) / |y-x-9| = (x-4) / (x-1) \geq 0$

$|y-x-9| = x-4$
 $(x-1) / |y-x-9| = \frac{(x-4)}{(x-1)} \geq 0$

$13-4-9 = 0$

$13-4+9 = 18-4$
 $9+9 = 13-4$

$(x^2) = \sqrt{18-4} = 13-4$

$= 2x$

$x-4 = y^2 - 9y + 6$
 $(y-9)^2 \geq 0$

$y-x+9 = (y-4)^2$
 $y-x+9 = (y-4)^2$

$(y^2 - 9y + 6) / |y-x+9| = (y-4)^2$

$y-x+9 = y^2 - 8y + 16$
 $y-x+9 = y^2 - 8y - 16$
 $y^2 - 9y - (x-1) + 6 = 0$
 $y^2 - 9y - (x-1) + 6 = 0$
 $x-1 = y^2 - 9y + 6$

$x=4$
 $y=13$

Черновик:

$f(f(\frac{1}{3})) = -4$
 $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
 $f(\frac{1}{3}) = -\frac{3}{4}$
 $f(f(\frac{1}{3})) = -4$
 $f(f(f(\frac{1}{3}))) = \frac{1}{3}$
 $g(x) = A(\dots f(\frac{x-1}{x+1})) = \frac{1}{3}$
 $g(\frac{x-1}{x+1}) = \frac{1}{3}$
 $f(\frac{x-1}{x+1}) = \frac{1}{x+1}$
 $f(\frac{x-1}{x+1}) = \frac{1}{x+1}$
 $g(x) = \frac{1}{x+1}$
 $g(0) = -1$
 $A(0; -1)$
 $y = kx + b$
 $-\frac{2}{1} = -2$
 $y = -2x - 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{5}$
 $2x = 4$ или $x = 2$
 $3x - 3 = x + 1$ или $x = 3$
 $x = 2$ или $x = -3$

$42(20+3) = 42 \cdot 20 + 42 \cdot 3 = 840 + 126 = 966$
 $42 \cdot 20 = 840$
 $42 \cdot 3 = 126$

$g(x) = \frac{1}{x+1}$
 $g(0) = -1$
 $A(0; -1)$
 $y = kx + b$
 $-\frac{2}{1} = -2$
 $y = -2x - 1$

$g(x) = \frac{1}{x+1}$
 $g(0) = -1$
 $A(0; -1)$
 $y = kx + b$
 $-\frac{2}{1} = -2$
 $y = -2x - 1$

$g(x) = \frac{1}{x+1}$
 $g(0) = -1$
 $A(0; -1)$
 $y = kx + b$
 $-\frac{2}{1} = -2$
 $y = -2x - 1$

Числовые (I):

52-1

Рассмотрим ~~каждое~~ ^{все} варианты, которые могут случиться:

I. Когда всех "универсалов" заберем в записки:

$$C_2^1 = 2 - \text{вариантов заарей}$$

$$C_{\bullet 3}^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 - \text{вариантов неподвижных}$$

Тогда $C_{6+1}^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ - вариантов неподвижных

Всего в данном примере возможно: $2 \cdot 3 \cdot 35 = 210$ - вариантов распылов.

II. Когда 3х "универсалов" заберем и неподвижных:

$$C_2^1 = 2$$

$$C_9^3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$$

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Тогда всего способов выбора: $2 \cdot 10 \cdot 1 = 20$

~~III. Когда 2х "универсала" заберем и неподвижных, а 1-го записки:~~

~~$$C_9^3 = 168$$~~
~~$$C_6^2 = 15$$~~
~~$$C_2^1 = 2$$~~

~~Всего способов выбора: $2 \cdot 15 \cdot 168$~~

III. Когда 1 записки заберем из "универсалов":

$$C_2^1 = 2$$

$$C_6^2 = 15$$

$$C_8^3 = 56$$

Тогда всего способов выбора: $2 \cdot 15 \cdot 56 = 1680$

~~IV. Когда сначала заберем 1 "универсала" и записки:~~

~~$$C_2^1 = 2$$~~
~~$$C_8^2 = 28$$~~
~~$$C_8^3 = 112$$~~

~~Всего способов: $2 \cdot 28 \cdot 112$~~

~~V. Когда сначала заберем 1 "универсала" и неподвижных:~~

~~$$C_9^3 = 168$$~~
~~$$C_2^1 = 2$$~~
~~$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$~~

~~Всего способов: $2 \cdot 2 \cdot 168$~~

Следовательно, всего способов выбрать шестерку:

$$1680 + 1680 + 210 = 2 \cdot 1680 + 210 = 3360 + 210 = 3570$$

Ответ: 3570

~~Следовательно, всего способов выбрать эту шестерку = 2 \cdot 28 \cdot 70 +~~

Числовик (2):

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \cdot 10 \cdot 168 + 1 \cdot 15 \cdot 168 + 2 \cdot 18 \cdot 112 + 2 \cdot 21 \cdot 168 = \\
 &= 2(18 \cdot 70 + 10 \cdot 168 + 15 \cdot 168 + 28 \cdot 112 + 21 \cdot 168) = 2(28(70 + 112) + 168(10 + 15 + \\
 &+ 21) + 28 \cdot 112) = 2(28 \cdot 182 + 168 \cdot 46 + 28 \cdot 112) = 2(28 \cdot (182 + 112) + 168 \cdot 46) = \\
 &= 2 \cdot (28 \cdot 294 + 168 \cdot 46) = 2 \cdot 8(7 \cdot 147 + 42 \cdot 23) = \\
 &= 16(1029 + 966) = 16 \cdot 1995 = 31920
 \end{aligned}$$

Ответ: 31920

$\omega = 5$

Рассмотрим $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$ при $x=2$

$$f\left(\frac{2-1}{2+1}\right) = -\frac{1}{\frac{2}{3}+1}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{5}$$

Тогда $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{-\frac{3}{5}+1} = -4$

Соответственно, $f\left(f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) = -\frac{1}{-4+1} = \frac{1}{3}$ и все повторяется

Получается, что $f\left(f\left(\dots f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) = \frac{x-1}{x+1}$ * продолжение на шаблоне (3)

$\omega = 3$

$$\begin{aligned}
 &|(xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y| \\
 &\sqrt{|y-x+9|} = y-4
 \end{aligned}$$

Ограничения: $\begin{cases} y-x \geq -9 \\ y \geq 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 &|(x-1)(y+3)|y-x-9| = (x-4)|y+3||x-1| \\
 &\sqrt{|y-x+9|} = y-4 \quad |^2
 \end{aligned}$$

т.к. $y \geq 4$ по ограничению

$$|(x-1)|y-x-9| = (x-4)|x-1|$$

$$|y-x+9| = (y-4)^2$$

$$y-x+9 = (y-4)^2$$

$$(x-1)|y-x-9| = (x-4)|x-1|$$

~~.....~~



Черновики:

$$\begin{cases} (x-1)(y+3) |y-x-9| = (x-4) |x-1| |y+3| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x \geq -9 & -x \geq -9-y \\ y \geq 4 & x \leq 9+y \end{cases}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$(x-1) |y-x-9| = (x-4) |x-1|$$

$$(x-1)^2 (y-x-9)^2 = (x-4)^2 (x-1)^2$$

~~$(x-1)^2 (y-x-9)^2 = (x-4)^2 (x-1)^2$~~

$$(y-x-9)^2 - (x-4)^2 = 0$$

$$(y-x-9-x+4)(y-x-9+x-4) = 0$$

$$\sqrt{22-x^2} = 9$$

$$22-x=81$$

$$x = -59$$

$$y = 13$$

$$x = 5$$

$$y-x-9-x+4=0$$

$$y-x-9+x-4=0$$

$$y = 13$$

$$y-2x-5=0$$

$$y-x \geq -9$$

$$y \geq 4$$

$$-9-13 = -22$$

$$x = 5$$

$$y = 13$$

$$\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y-x \geq -9 \\ y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13-x \geq -9 \\ y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 22 \\ y = 13 \end{cases}$$

или

$$6 \frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{7} - \frac{2}{7} = 0$$

$$\frac{2}{7} + 1 = \frac{9}{7}$$

$$y-2x-5=0$$

$$y-x \geq -9$$

$$y \geq 4$$

$$y-2x-5=0$$

$$-x-9 \geq -9-4$$

$$x \leq 13$$

$$y-2x-5=0$$

$$y \geq 4$$

$$y-2x=5$$

$$y \geq 4$$

$$x \leq 13$$

$$x=15$$

$$y^2 - 8y + 16 = y-x+9$$

$$y^2 - 9y + x + 7 = 0$$

$$\sqrt{14-x^2} = 1 \quad |14-x| = 1$$

Условию (3):

* ~~Расс~~ Пусть Пусть $x=4: f\left(\frac{4-1}{4+1}\right) = \frac{\frac{3}{3}-1}{\frac{3}{3}+1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{6}{3}} = -\frac{1}{3}$

Пусть $x=5: f\left(\frac{5-1}{5+1}\right) = \frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1} = -\frac{1}{5}$

По методу математической индукции для любого x будет верно значение $-\frac{1}{x}$

~~Тогда можно утверждать, что $g(x) = \dots$~~

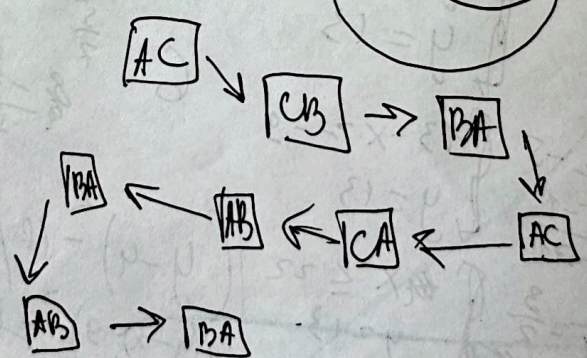
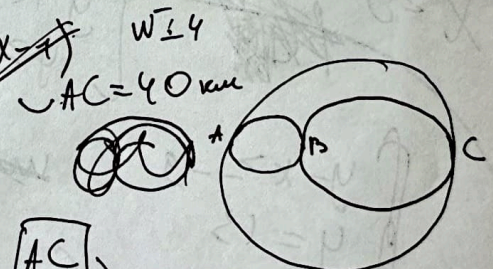
Тогда $g(x) = \underbrace{f(\dots(f(x)))}_g = \underbrace{f(\dots f(\frac{x-1}{x+1}))}_g = -\frac{1}{x}$

$g'(x) = +1$

$\Rightarrow +1 = k = tgx$, где x - угол ^{наклона} касательной к ф-ке функции

Ответ: $\pi/4$

~~$|x-4|/|y-x-9| = (x-4)/(x-4)$
 $y-x+9 = (y-4)^2$
 $|y-x-9| = x-4$ (1)
 $y-x+9 = (y-4)^2$~~



(1) $|y-x-9| = x-4$
 $x-4 \geq 0$
 $y-x-9 = x-4$
 $y-x-9 = 4-x$
 $x \geq 4$

Получим 95 минут \Rightarrow сложим получаем, что общий маршрут в км равен $25+75+120 = 220$

Ответ: 220 км

№7 Числовик (4):

Дано: $S(n)$ - сумма цифр, $n \in \mathbb{N}$; x - количество цифр чис.
 на $n \Rightarrow x=100$

Классы: $n_{\max} = \forall n \in [1; n]$, чтобы верно $S(n \cdot n) = S(n)$

Тогда $S(2n) = S(n)$

$S(3n) = S(n)$

$S(10 \dots 0n) = S(n)$

$S(n(n-1)) = S(n)$

$S(n^2) = S(n)$



Рассмотрим условия задачи на более простом примере: пусть $x=4$

$S(n^2) = S(n)$ для $n_{\max} = 9999$

$S(n) = 36$

$9999^2 = (10000-1)^2 = 10000^2 - 20000 + 1 = 99980001$
 $S(n^2) = 36$

$S(n(n-1)) = S(n)$ для $n_{\max} = 9999$

$9998 \dots 9999 = (9999-1) \cdot 9999 =$

$= 9999^2 - 9999 = 99970002$

$S(n(n-1)) = 36$

Проверим далее, найдем ли не закономерность:

$S(5n) = S(n)$

$n = 4995$

$S(5n) = 36$

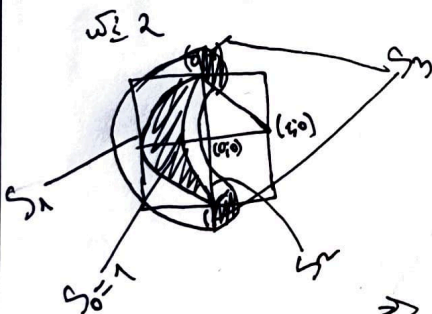
Аналогично, если проверим $x=6$, найдем ли не закономерность:

$S(n^2) = S(n)$ для $n_{\max} = 99999$

\Rightarrow при $x=100$ $n_{\max} = \frac{99 \dots 99}{100 \text{ цифр}}$

$S(5n) = S(n)$ для $n_{\max} = 99999$

Ответ: $\frac{99 \dots 99}{100 \text{ цифр}}$



$S_1 = \frac{\pi (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \pi}{2}$; $S_2 = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \pi (\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4}$

$S_3 = \frac{3\pi}{8}$
 $S_1 = \frac{\pi (1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) - \pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$S_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$
 $S_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{4\pi}{16} =$

$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{4\pi}{16} =$

$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \pi \Rightarrow S_{\text{общее}} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = \pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \pi$

Ответ: $1 + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \pi$

Пусть $\frac{x-1}{x+1} = t$, $x-1 = t(x+1)$
 $x - tx = t+1$
 $x(1-t) = t+1$
 $x = \frac{t+1}{1-t}$

$x+1 = \frac{t+1}{1-t} + 1 = \frac{2}{1-t}$

$\frac{1}{x+1} = \frac{1-t}{2}$
 $-\frac{1}{x+1} = \frac{t-1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2}$
 $f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{2} = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-1-2}{4} = \frac{x-3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-3-4}{8} = \frac{x-7}{8}$
 Тогда $f(\dots f(x)) = \frac{x-(2^n-1)}{2^n}$

$\Rightarrow f_9 = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$ Ответ: $\frac{1}{512}$