0 222622 640000

22-26-22-64
(40.17)

+1 лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Москва
город

выход 14:00 – 14:03

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гороховского Альберта Артуровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	12	0	12	0	12	12	0	56

22-26-22-64
(40.17)

56 (пятьдесят шесть)

Черновик.

$\cancel{C_3^1 \cdot (C_5^2 \cdot C_6^3 + C_6^2 \cdot C}$

$C_3^1 \cdot$

№5

$f\left(\frac{0+1}{0-1}\right) = \frac{1}{0-1} \Rightarrow f(-1) = -1.$

$f\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right) = \frac{1}{-1-1} \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = \frac{1}{2-1} \Rightarrow f(3) = 1.$

$f(0) = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{2}$

$2\cancel{(x+2)} = -x+1$

$3x = -1.$

$x = -\frac{1}{3}.$

$f\left(f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{-1} = -1$

$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

$\cancel{x}+1 = 1$

$x = 0$

$f\left(f\left(f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)\right) = f(-1) =$

$=$

$\frac{x+1}{x-1} = -1$

$2x = 0$

$x = 0$

Черновик

1ч 35 мин = 95 мин.

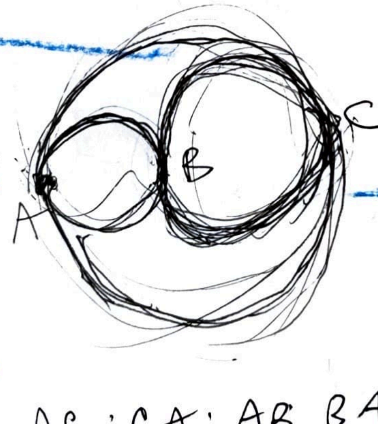
~~AB~~

95 = 19 · 5 – нет

95 = 19 · 4 + 13+5 – нет.

95 = 19 · 3 + … (38

3 раза проехал по AC; 5 раз по AB и 1 раз по BC



AC; CA; AB, BA; AB; BA; AB; BC; CA.

95 = 19 · 2 + … 57

13x+5y=57

13 · 4 + 5 · 3

22-26-22-64 (40.17)

Черновик

$13x+5y=76$

$x=2 \quad y=10 \quad z=1$ ~~$\Rightarrow S=54+130+160$~~

$x=1 \quad y=5 \quad z=3 \Rightarrow S=27+65+$
$+120$

$13x+5y=95$

$x=5 \quad y=6$ – не подх

$1 \le x \le 7$
$1 \le y \le 5$
$3 \le z \le 11$

$\Rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$

№1.

$C_3^1 \cdot$

З , Н , У

ЗУ УУ

2 зад: ЗЗ ННУ УУУ

ННН ННУ

3 нап:

~~$C_5^1 \cdot C_6^3 + C_5^3$~~

ЗЗННН

$C_5^2 \cdot (C_6^3 + C_6^2 \cdot C_3^1 +$

ЗЗ

$+ C_6^1 \cdot C_3^2 \cdot C_3^3) +$

$+ C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot (C_6^3 + C_6^2 \cdot C_2^1 +$

ЗУ

$+ C_6^1 \cdot C_2^2) +$

$+ C_3^2 (C_6^3 + C_6^2 \cdot C_1^1)$

Черновик.

№3

$(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4|$

$(x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|(x-1)(y+4)|$

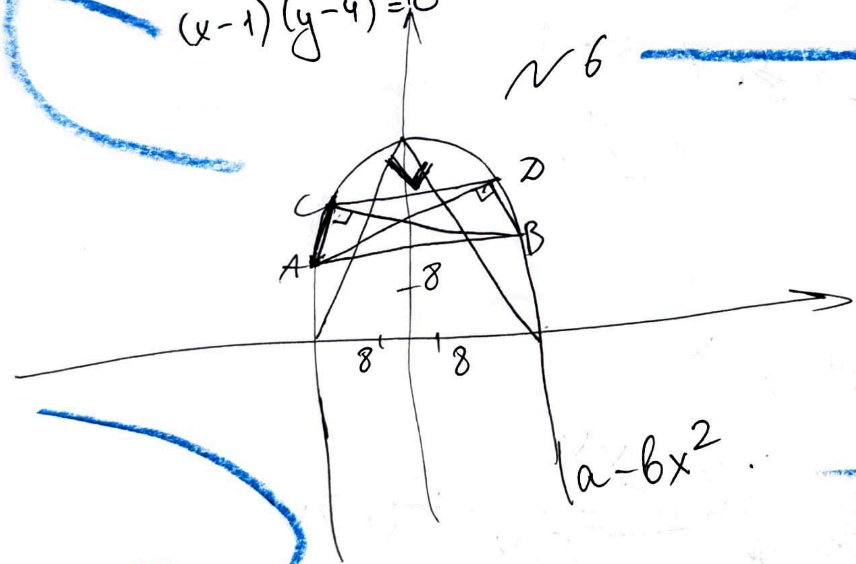
$(x-1)(y+4) \leq 0:$

$(x-1)(y+4)(|y-x-8| + x-4) = 0$

$x-4 = |y-x-8|$

$(x-1)(y-4) = 0$

№6



$a - bx^2$.

$a = 8$

$8 - b \cdot 8^2 = 0$

$b = \frac{1}{8}$

$y = 8 - \frac{1}{8}x^2$

$(x_A; x_A^2)$ $(x_C; x_C^2)$

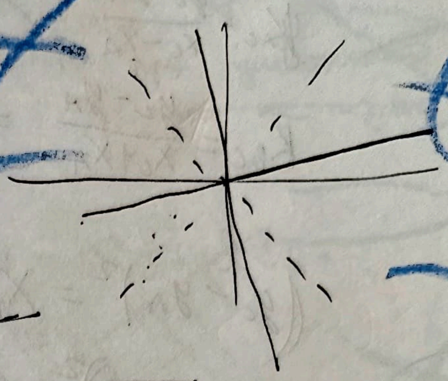
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (x_C^2 - x_A^2)^2 = (x_C - x_A)^2(1 + (x_C + x_A)^2)$

$BC^2 = (x_C + x_A)^2 + (x_C^2 - x_A^2)^2 = (x_C + x_A)^2(1 + (x_C - x_A)^2)$

$AC^2 + BC^2 = AB^2 = (2x_A)^2$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик



$A(x_A; 8-\frac{1}{8}x_A^2)$

$B(-x_A; 8-\frac{1}{8}x_A^2)$

$C(x_C; 8-\frac{1}{8}x_C^2)$

$D(-x_C; 8-\frac{1}{8}x_C^2)$

$\cancel{AC\cdot BC = AB\cdot CH}$

$$\sqrt{(x_C-x_A)^2+\left(\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)\right)^2}\ \cdot$$

$$\cdot\sqrt{(x_C+x_A)^2+\left(\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)\right)^2}=$$

$$=2x_A\cdot\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)\ ?$$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)\right)^2+x_C^2+x_A^2-2x_Cx_A\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)\right)^2+x_C^2+x_A^2+2x_Cx_A\right)}=2x_A\cdot\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)^2$$

$$8-\left(\left(8-\left(8-\frac{1}{8}x_C^2\right)\right)+\left(8-\frac{1}{8}x_A^2\right)\right)$$

$$=8-\left(\frac{1}{8}x_C^2+8-\frac{1}{8}x_A^2\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(x_A^2-x_C^2)$$

$AC^2+BC^2=AB^2.$

$$(x_C-x_A)^2+\left(\frac{1}{8}(x_C^2-x_A^2)\right)^2+(x_C+x_A)^2+\left(\frac{1}{8}(x_C^2-x_A^2)\right)^2=$$

$$=4x_A^2$$

$$x_C^2+x_A^2+\left(\frac{1}{8}(x_C^2-x_A^2)\right)^2=2x_A$$

$\cancel{AC}$ $kx_A+b=y_A$

$kx_C+b=y_C$

$k=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$

$kx_Ax_C+bx_C=y_Ax_C$

$kx_Ax_C+bx_A=y_Cx_A$

$b=\frac{y_Ax_C-y_Cx_A}{x_C-x_A}$

Черновик

$k_{AC} = \frac{y_c - y_A}{x_c - x_A}$

$k_{BC} = \frac{y_c - y_A}{x_c + x_A} = -\frac{(x_c - x_A)}{y_c - y_A}$

$(y_c - y_A)^2 = x_A^2 - x_c^2$

$\left(\frac{1}{8}(x_A^2 - x_A^2)\right)^2 = x_A^2 - x_c^2$

$\left(\frac{1}{8}t\right)^2 = t$

$\frac{1}{64}t^2 = t$

$t^2 - 64t = 0$

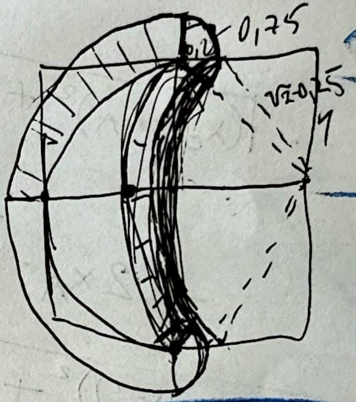
$t = 0;\ t = 64$

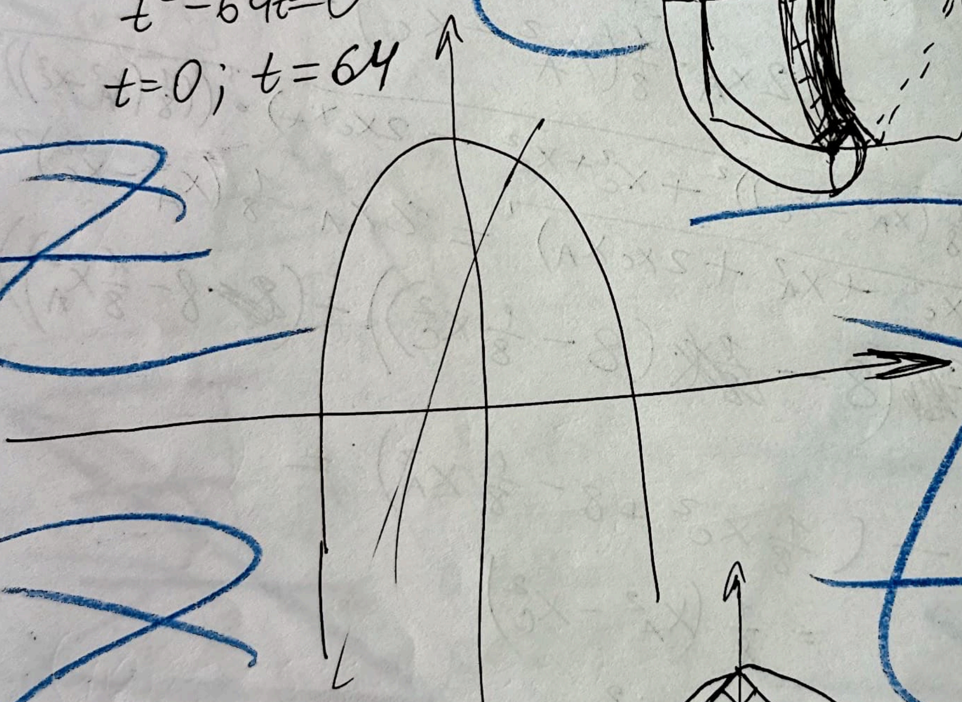
99999

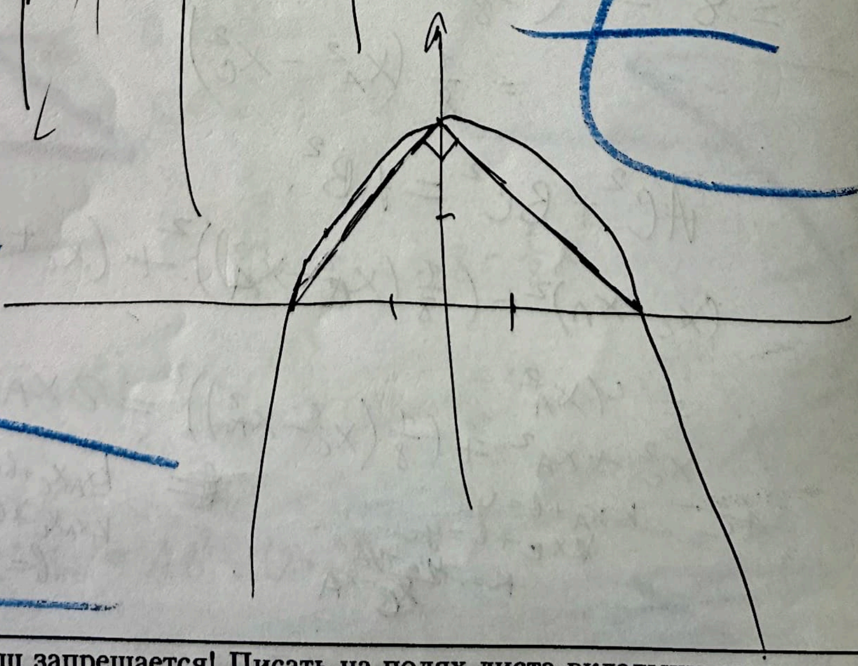
$\times$ 99999

$(\sqrt{2} - 0{,}25)^2 = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{16}$

$1^2 + 0{,}75^2 = 1 + \frac{1}{\ }$







Чистовик лист 6

Задача 7

У чисел вида $n = \overbrace{99\ldots\ldots9}^{k}$
есть замечательное свойство: при умножении на другие числа, которые ~~не~~ $\leq n$ ~~они не изме~~ сумма цифр числа не меняется.

~~Док-во:~~

~~Пусть $n = \overbrace{999\ldots\ldots999}^{k} = 10^k\cdot 9 + 10^{k-1}\cdot 9 + \ldots + 10^1\cdot 9 + 9$~~

~~$m = 10^l\cdot p_1 + 10^{l-1}\cdot p_2 + \ldots + 10^1\cdot p_l + p_{l+1}$~~

~~Тогда $mn = 10^{k+l}\cdot 9p_1 + 10^{k+l-1}\cdot 9(p_2+p_1) + \ldots + 10^1\cdot 9(p_l+p_{l+1}) + 9p_{l+1}$.~~

~~Т.к суммы цифр чисел $9p_1, 9(p_2+p_1), \ldots, 9(p_l+p_{l+1}), 9p_{l+1}$ будут равны~~

Докажем по индукции.

Док-во:

При $k=1$ верно: ~~$9\cdot1$~~ 9

Пусть оно верно при $k = l$

Докажем для $k = l+1$. $\Rightarrow$ $\overbrace{999\ldots\ldots999}^{l+1} = \overbrace{999\ldots\ldots99}^{l}\cdot 10 + 9$

$\Rightarrow n = 9999\ldots\ldots999$

$mn = \boxed{m\cdot \overbrace{9999\ldots\ldots99}^{l}\cdot 10} + 9m$

сумма цифр равна $9l$ сумма цифр равна 9

$\Rightarrow$ сумма цифр $mn = 9(l+1)$ ч.т.д.

$\Rightarrow$ подходит число $\overbrace{9999\ldots\ldots99}^{85 \text{ штук}}$

Ответ: $\overbrace{9999\ldots\ldots99}^{85}$.

Задача 3.

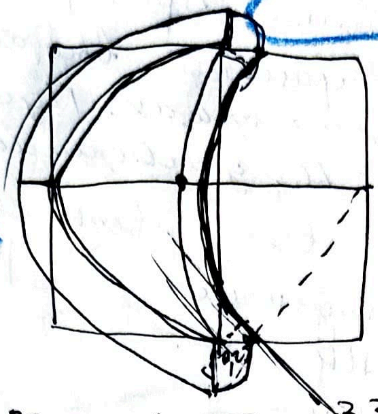
$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)\,|y-x-8| = (x-4)\,|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3\end{cases}$$

см. на обороте

$10^n \cdot 9 + 10^{n-1} \cdot 9 + \ldots \ldots + 10^1 \cdot 9 + 9$

$10^k p_1 + 10^{k-1} p_2$

Черновик



$\frac{33}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{33 - 8\sqrt{2}}{16}$

$1^2 + 0{,}75^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$= 8 - 8\sqrt{2}$

$R = 1{,}25$ $S = \frac{\pi R^2}{2}$

$S_{изн} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - 1\right) =$

$= 1.$

$S_{приб 1} = \frac{\pi \cdot 1{,}25^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2}$

$S_{приб. 2} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} + \frac{\pi \cdot (\sqrt{2} - 0{,}25)^2}{4}$

$S_{приб. 3} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{3}$

Чистовик Лист 1

Задача 1

Кол-во вариантов выбрать вратаря: C_3^1

Рассмотрим теперь варианты выбрать двух защитников и трёх нападающих. Пусть защитники – З, нападающие – Н, универсалы – У.

Составим таблицу всех возможных вариантов:

Защитники	Нападающие	Кол-во вариантов
ЗЗ	ННН	$C_5^2 \cdot C_6^3$
ЗЗ	ННУ	$C_5^2 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1$
ЗЗ	НУУ	$C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_3^2$
ЗЗ	УУУ	$C_5^2 \cdot C_3^3$
ЗУ	ННН	$C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3$
ЗУ	ННУ	$C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1$
ЗУ	НУУ	$C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^1 \cdot C_2^2$
УУ	ННН	$C_3^2 \cdot C_6^3$
УУ	ННУ	$C_3^2 \cdot C_6^2 \cdot C_1^1$

Итого всего вариантов: $C_3^1\Big(C_5^2\big(C_6^3+C_6^2\cdot C_3^1+C_6^1\cdot C_3^2+$

$+C_3^3\big)+C_5^1\cdot C_3^1\ \big(C_6^3+C_6^2\cdot C_2^1+C_6^1\cdot C_2^2\big)+$

$+C_3^2\cdot\big(C_6^3+C_6^2\cdot C_1^1\big)\Big)=\cancel{3\cdot\left(\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!4!}\right.\right.}$

$=3\cdot\big(10(20+5\cdot3+6\cdot3+1)+5\cdot3(20+5\cdot2+6\cdot1)+$

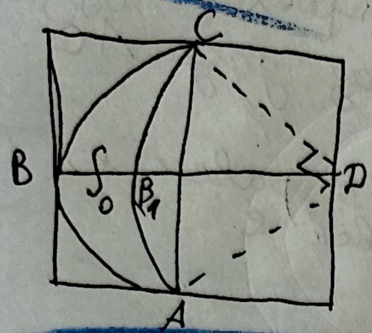
$+3(20+5\cdot1)\big)=3(10\cdot54+15\cdot36+3\cdot25)=$

$=3(540+540+75)=3\cdot1155=3465.$

Ответ: 3465.

Чистовик лист 2

Задача 2.



① Посчитаем S_0 начальную месяца

$S_0 = S_{ABC}$ (как полуокружности) −

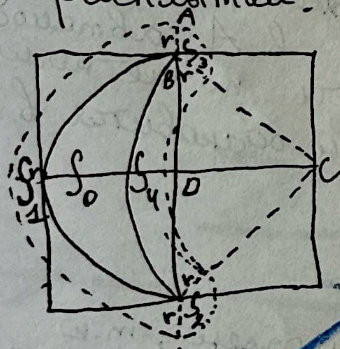
− S_{AB_1C} (как части сектора окружности) =

$= \frac{\pi \cdot AC^2}{2} - (S_{AB_1CD}$ (сектор окружности) $- S_{ACD}$ (линняя часть) $) = \frac{\pi \cdot AC^2}{2} -$

$- \left(\frac{\pi \cdot B_1D^2}{4} - 1\right) = 1 + \frac{\pi}{4}(AC^2 - B_1D^2) =$

$= 1 + \frac{\pi}{4} \cdot (2 \cdot \cancel{4} - 2) = 1$.

Теперь нарисуем полумесяц после распытия.



$r = 0,25$

② $S_1 = \frac{\pi \cdot (1+0,25)^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2}$

$S_4 = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\pi \cdot (\sqrt{2} - 0,25)^2}{4}$

$S_2 = S_3 = \frac{\pi r^2}{} \cdot \frac{\angle ABC}{360^\circ}$

т.к $\angle OBC = 45^\circ$, то $\angle ABC = 135^\circ$

$\Rightarrow S_2 = S_3 = \frac{\pi \cdot 0,25^2 \cdot 3}{8}$

③ $S_{нов} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ (т.к остальная краска распылась вовнутрь

$\Rightarrow S_{нов} = 1 + \frac{\pi}{2}(0,25 \cdot 2,25) + \frac{\pi}{4} \cdot (0,25 \cdot (2\sqrt{2} - 0,25)) +$

$+ \frac{\pi}{4} \cdot 0,25^2 \cdot 3 = 1 + \frac{\pi}{16}(4,5 + 2\sqrt{2} - 0,25 + 3 \cdot 0,25) =$

$= 1 + \frac{\pi}{64}(18 + 8\sqrt{2} - 1 + 3) = 1 + \pi \cdot \frac{5 + 2\sqrt{2}}{16}$

Ответ: $1 + \frac{\pi}{16} \cdot (5 + 2\sqrt{2})$

Чистовик. лист 3

Задача 4

① Пусть автомобиль x раз проехал дугу AB, y раз дугу BC, z раз дугу AC.

② Пусть радиус окружности AB равен r, радиус окружности BC равен R

тогда:

$AB = \pi r$

$BC = \pi R$

$AC = \pi\left(\frac{2r+2R}{2}\right) = \pi(r+R) = AB + BC =$

$= 40$ км.

③ Автомобиль ~~проехал~~ ехал 1ч 35 минут = 95 минут

$\Rightarrow 5x + 13y + 19z = 95$; $x, y, z \in \{0\} \cup N$

$z = 0$ $5x + 13y = 95$

$x = 6, y = 5$

Но такой вариант невозможен, так как чтобы при $z \vdots 2$ вернуться в A, автомобилю надо дуги AB и BC проехать по четному кол-ву раз (т.к иначе он остановится в B или C)

$z = 1$ $5x + 13y = 76$

$x = 10$, $y = 2$

Но такой вариант невозможен, т.к проехав 10 раз по AB и 2 раза по BC, в силу симметрии он окажется в A, но за одну дугу AC он не сможет сделать один круг.

$z = 2$ $5x + 13y = 57$

$x = 3$, $y = 4$

Не подходит, т.к уже сказано, что при $z \vdots 2$ x и y также должны $\vdots 2$

$z = 3$ $5x + 13y = 38$

$x = 5$, $y = 1$

Вариант подходит. Пример для этого варианта:

$AC \to CA \to AB \to BA \to AB \to BA \to AB \to BC \to CA$.

$S = 27 + 65 + 120 = 212$ км

см. след. лист.

Чистовик $\boxed{\text{лист 4}}$

Задача 4 (прод.)

$z=4$ $\quad 5x+13y=79$

решений нет

$z=5$ $\quad 5x+13y=0$

$x=0,\ y=0$

не подходит, т.к через 5 дуг AC он окажется в C.

Ответ: 212 км.

Задача 5.

① Найдём $f\left(f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=f\left(\frac{1}{x-1}\right)$

② Найдём такое x, что $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow x=0$

$$\Rightarrow f\left(f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=f\left(\frac{0+1}{0-1}\right)=\frac{1}{0-1}=-1.$$

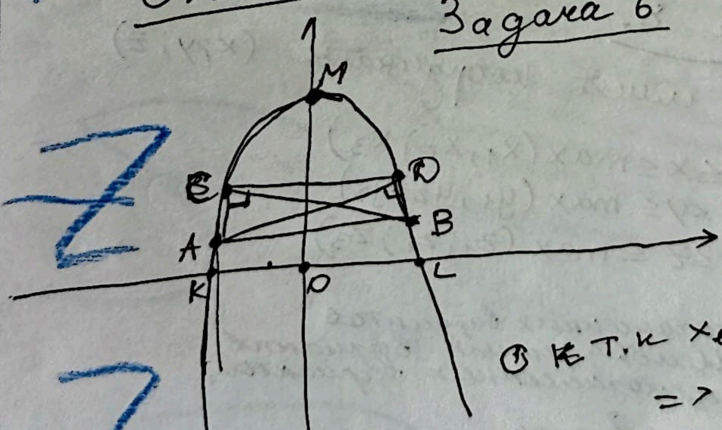
$$f\left(f\left(f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)\right)=f(-1)=f\left(\frac{0+1}{0-1}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \overset{g(x)=}{\underbrace{f(f(\ldots f(x)))))))))}_{10\text{ раз}}}=-1.$$

$\Rightarrow$ ③ $\operatorname{tg}\alpha=k=g'(0)=0.$

Ответ: 0.

Задача 6



① т.к $x_в=-\frac{0}{2b}=0$, то $M(0;8) \Rightarrow$
$\Rightarrow a-0b^2=8 \Rightarrow a=8$

② Также $KO=OL \Rightarrow a-8^2b^2=0$
$K(-8;0), L(8;0)$ $\quad b=\frac{a}{-8^2}=-\frac{1}{8}.$

③ Пусть $A(x_A;y_A)$; $C(x_C;y_C) \Rightarrow B(-x_A;y_A)$; k_{AC} – коэф. наклона прямой AC; k_{BC} – коэф. наклона BC

Тогда: $y_{AC}=k_{AC}x+b_{AC}$
$y_{BC}=k_{BC}x+b_{BC}$

см. на обороте

Задача 6 (прод.)

$$\begin{cases} y_A = k_{AC}x_A + b_{AC} \\ y_C = k_{AC}x_C + b_{AC} \end{cases} \Rightarrow k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

Аналогично $k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_C - y_A}{x_C + x_A}$.

4) Т.к $AC \perp BC$ (по усл.), то

$k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$.

$$\frac{(y_C - y_A)^2}{x_C^2 - x_A^2} = -1.$$

$$\left(\left(8 - \frac{1}{8}x_C^2\right) - \left(8 - \frac{1}{8}x_A^2\right)\right)^2 = x_A^2 - x_C^2$$

$$\left(\frac{1}{8}(x_A^2 - x_C^2)\right)^2 = x_A^2 - x_C^2$$

Пусть $x_A^2 - x_C^2 = t$, тогда

$\left(\frac{1}{8}t\right)^2 = t$

$t^2 - 64t = 0$

$t = 0$ или $t = 64$

$t=0$ неверно, т.к AB и CD различны по определению.

Но расстояние между AB и CD $d = y_C - y_A = \frac{1}{8}(x_A^2 - x_C^2)$

$\Rightarrow d = \frac{1}{8} \cdot 64 = 8$.

Ответ: 8.

Задача 8.

Пусть точка имеет координаты $(x; y; z)$

Тогда
$$\begin{cases} \min(x_1; x_2; x_3) \le x \le \max(x_1; x_2; x_3) \\ \min(y_1; y_2; y_3) \le y \le \max(y_1; y_2; y_3) \\ \min(z_1; z_2; z_3) \le z \le \max(z_1; z_2; z_3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$
$\begin{cases} 1 \le x \le 7 & - 7 \text{ целочисленных вариантов} \\ 1 \le y \le 5 & - 5 \text{ целочисленных вариантов} \\ 3 \le z \le 11 & - 9 \text{ целочисленных вариантов.} \end{cases}$

Всего $7 \cdot 5 \cdot 9 = 315$ точек.

Ответ: 315 точек.