0 224269 330009

22-42-69-33
(40.17)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гуровой Татьяны Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	8	12	0	12	0	0	56

56

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\boxed{\text{Черновик}}$

$f(-0,5) = \frac{1}{-1,25} = -0,875$

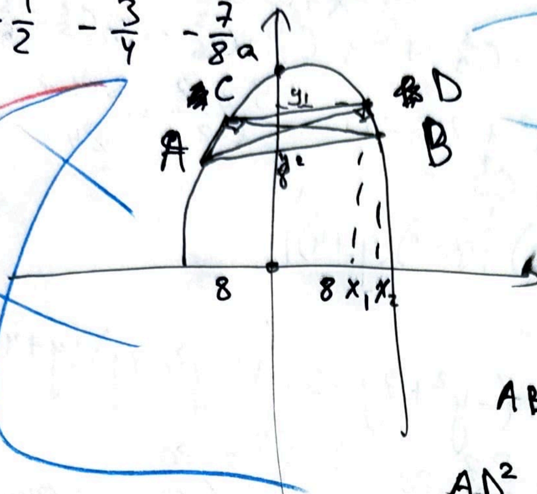
$\frac{x+1}{x-1} = -0,5$

$-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{7}{8}a$

$x + 1 = 0,5 - 0,5x$

$a = 8$

$1,5x = -0,5 \quad x = -\frac{1}{3}$



$8 - bx^2 = y$ $\quad x^2 =$

$8 - 64b = 0$ $\quad 1,75x = -0,25$

$x = -\frac{1}{7}$

$b = \frac{1}{8}$ $\quad -\frac{7}{8}$

$8 - \frac{1}{8}x^2 = y$

$AB = 2x_2$ $\quad x^2 = 64 - 8y$

$AD^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$DB^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2$

$f(0) = -0,5$ $\quad 4x_2^2 = 2x_2^2 + 2x_1^2 + 2(y_1 - y_2)^2$

$2x_2^2 = x_2^2 + x_1^2 + 2(y_1 - y_2)^2$

$128 - 16y_2 = 64 - 8y_2 + 64 - 8y_1 + 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_1y_2$

$y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 - 4y_1 + 4y_2 + 4 = 0 + 4$

$(y_2 - y_1 + 2)^2 = 4$ $\quad$ $\begin{array}{r} +38 \\ 26 \\ \hline 64 \end{array}$ $\quad 74$

$1_4 \; 14м$

$z = 1$

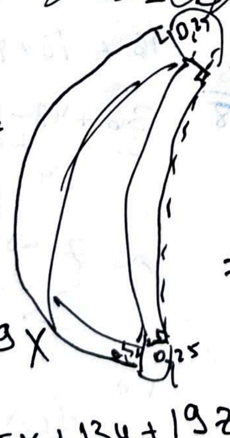
$5x + 13y = 76$ $\quad y_2 - y_1 + 2 = -2$ $\quad z = 2 \quad y = 4 \quad x = 1$

$y = 2 \quad x = 10$ $\quad y_2 - y_1 = -4 \quad y_1 - y_2 = 4$

~~3·5·6 + 3·3·6 + 3·8·3 + 3·3·2~~

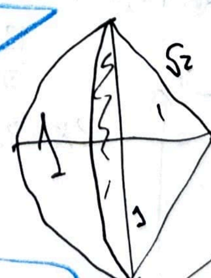
$3 \cdot C_7^2$

$\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}$



$5x + 13y = 57$

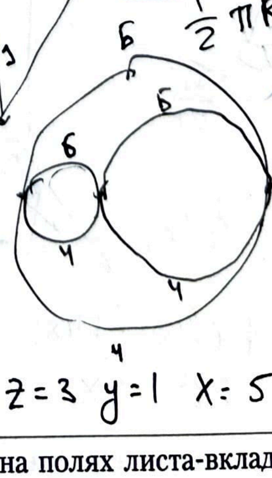
$y = 4 \quad x = 1$



$\frac{\pi}{2} - 1$

$\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$

76



$5x + 13y = 19 x$

$z = 2$

$5x + 13y + 19z = 95$

$x \quad z \le 5$

$z = 5 \quad x = 0 \quad y = 0$

$5x + 13y = 38$

$z = 4 x \quad z = 3$ $\quad z = 3 \quad y = 1 \quad x = 5 \; V$

$\boxed{\text{Черновик}}$ $y \geq 3$

$2+4+8+\ldots+20 = 2(1+2+\ldots+10)$ 110

$y - x + 10 \geq 0$

$y - x + 10 = y^2 - 6y + 9$

$3 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3 + 3 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3 - 3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$

$x = -y^2 + 7y + 1$

$-3{,}5^2 + 7 \cdot 3{,}5 + 1$

$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7$

84

$3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1$

$(x-1)(y+4)\,|y-x-8| = (x-4)\,|(x-1)(y+4)|$

$\cancel{x=1 \quad x}$

$(-y^2+7y)(y+4)\,|y^2-6y-9| = (-y^2+7y-3)\,|(-y^2+7y)(y+4)|$

$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ $\quad \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

$x = 1 \quad y = 7$

$\times\, 25$
17
175
$+\,25$
425

$3(560 + 840 -$

-200

$(x-1)(y+4) = -a$

$2x_1 x_2 = -6$

1200

$|y-x-8| = 4-x$

$x_1 + x_2 = 6{,}5$

$9 + 16 \cdot 13$

10.

$y - x - 8 = 4 - x$

$(x_1+x_2)^2 =$

$\times\, 16$
13
$+\,48$
16
208

$54{,}25$

$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 15$ $\quad y = 12$ $\quad x$

$\times\, 6{,}5$
$6{,}5$
325
$+\,390$
$42{,}25$

$\times\, 7{,}5$
$7{,}5$
375
525

217

$\times\, 450$
3
1350

$8 + x - y = 4 - x$

$\times\, 21$
21
21
42
441

$2x = \cancel{7}\,y - 4$

$+\,185$
27
212

$0{,}5y - 2 = -y^2 + 7y + 1$

$25 \cdot 17$

$y^2 - 6{,}5y - 3 = 0$

$36 + 1 + 64 = 101$

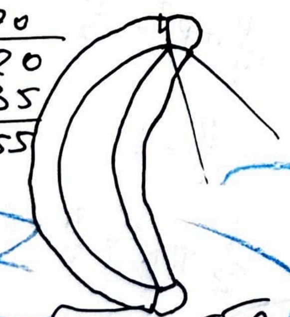
$+\,4950$
270
5220
$+\,135$
5355

$(y$

$4 + 9 + 36 = 49$

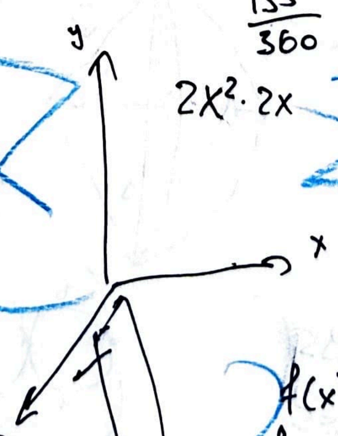
$\frac{1}{2}\pi(R+0{,}25)^2 - \frac{1}{2}\pi R^2$

$16 + 16 + 4 = 36$



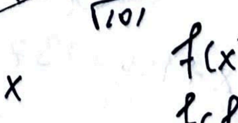
$\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$

$\frac{36 + 49 - 101}{84} = \frac{16}{84}$



$2x^2 \cdot 2x$

$\cos = \frac{-4}{21}$



$x^8 \quad 8x^7$

$2x$

$\sin = \frac{\sqrt{425}}{21} = \frac{5\sqrt{17}}{21}$

$f(x) = x^2$

$f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$f(x) = x$

$f(f(x)) = x^4 = 4x^3$

$f(f(x)) = x$

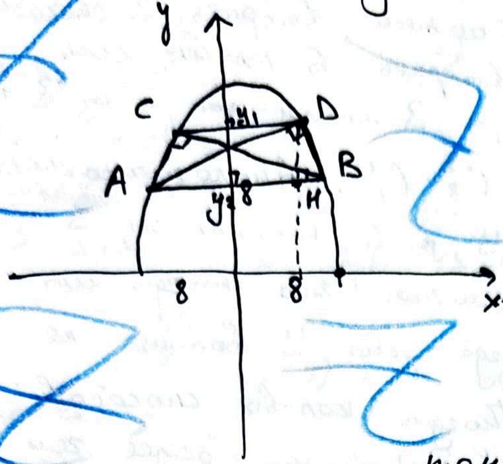
$f'(f(f(x)) \cdot f'(f(x))^2 \cdot f'(x)$

$f'(x) \cdot f'(x) = 1 \quad f'(x) \cdot$

$\cancel{4x}\,2x^4 \cdot 2x^2 \quad 2x$

$\cancel{f'(f(x))}\, 2f(x)$

Задача №6. Чистовик



Вершина параболы будет в точке $(0; a)$ $\Rightarrow$ Парабола симметрична относительно O_y.

По условию высота тонеля равна 8, а высота тонеля это a. $\Rightarrow a = 8$

По условию ширина пола 16, а парабола симм. относит. O_y $\Rightarrow$ Она пересекает прямую O_x в точк. 8 и -8 $\Rightarrow$ $8 - 64b = 0$ $\Rightarrow$ $b = 1/8$ $\Rightarrow a - bx^2 = 8 - \frac{1}{8}x^2 = y$

Т.к. $AB \parallel O_x$ и $CD \parallel O_x$ и параб. симм. относительно O_y то координаты x точек A и B совп. по модулю, и коорд. x точек C и D совп. по модулю. Пусть

$A(-x_2; y_2)$ $B(x_2; y_2)$ $C(-x_1; y_1)$ $D(x_1; y_1)$

~~Если мы в прямоуг. ΔADB опустим высоту DH, то координаты точки H будут $(x_1; y_2)$~~

~~Тогда~~ $\cancel{DH^2 = (y_1 - y_2)^2 = AH \cdot HB = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2}$

~~т.к.~~ $\cancel{y = 8 - \frac{1}{8}x^2 \Rightarrow x^2 = 64 - 8y \Rightarrow x_1^2 = 64 - 8y_1 \quad x_2^2 = 64 - 8y_2}$

$\cancel{\Rightarrow (y_1 - y_2)^2 = 8y_1 - 8y_2}$

$\Rightarrow AB = 2x_2 \quad AD^2 = (x_2 + x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad DB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\Rightarrow 4x_2^2 = 2x_2^2 + 2x_1^2 + 2(y_1 - y_2)^2$

$(y_1 - y_2)^2 = x_2^2 - x_1^2$ т.к. $y = 8 - \frac{1}{8}x^2 \Rightarrow x_1^2 = 64 - 8y_1 \quad x_2^2 = 64 - 8y_2$

$\Rightarrow (y_1 - y_2)^2 = 8(y_1 - y_2) \quad y_1 \neq y_2$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = 8$ Это и есть расстояние между балками AB и CD

Ответ: 8

Н-напад. З-защ. В-врат. Задача №1. Чистовик

Одного вратаря мы всегда можем выбрать 3 способами. Посмотрим сколько способов выбрать 6 человек если ~~нап~~ Н выбираем только из Н, а З можем как и из З так и из У. Это будет равно $3 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3$. Аналогично посч. когда Н выб. и из Н и из У, а З только из З. Это равно $3 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3$. Но заметим что тогда мы 2 раза посчитали случай когда мы У вообще не выбираем. А это $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$. Тогда кол-во способов выбрать 6-х так что У выбираем не более чем в одну группу равно $3 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3 + 3 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3 - 3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3 =$
$= 3600$.

Теперь посчитаем кол-во способов когда ~~уч~~ У участв. в обеих группах. Есть 3 случая. 1) В каждой группе по 1 У 2) В Н 2 У, в З 1 У 3) в Защ 2 У, в Нап. 1 У.

1) Кол-во способов в этом случае равно
$3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^1 \cdot C_6^2 = 1350$

2) Кол-во способов равно
$3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^2 \cdot C_6^1 = 270$

3) Кол-во способов равно
$3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 \cdot C_6^2 = 135$

$\Rightarrow$ Кол-во способов выбрать 6 человек равно

$3600 + 1350 + 270 + 135 = 5355$

Ответ: 5355

Задача N3 — Чистовик

Т.к. $\sqrt{y-x+10}=y-3 \Rightarrow y-3\geq 0 \Rightarrow y\geq 3$

Возведем в квадрат $y-x+10=y^2-6x+9$

$\Rightarrow x=-y^2+7y+1$

~~И в левой~~ в 1 уравнении и в левой и в правой части есть $xy+4x-y-4=(x-1)(y+4)$. Это выражение может иметь 3 возможных знака

1) $x=1$ $(x-1)(y+4)=0$ в 1 уравнении равенство выполняется

Во 2-ом $\sqrt{y+9}=y-3 \Rightarrow y+9=y^2-6y+9$ $y^2-7y=0$

т.к. $y\geq 3 \Rightarrow y=7$ Это 1-ое решение $(1;7)$

2) $x>1 \Rightarrow (x-1)(y+4)>0$. $\Rightarrow$ Модуль убирается на $(x-1)(y+4)$ мы можем сократить.

Получим $|y-x-8|=x-4$ т.к. $|y-x-8|\geq 0 \Rightarrow x\geq 4$

1 сл. $y-x-8\geq 0 \Rightarrow y-x-8=x-4 \Rightarrow y=2x+4$

$\Rightarrow x=-4x^2-16-16x+14x+28+1=-4x^2-2x+13$

$\Rightarrow 4x^2+3x-13=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$ $\sqrt{217}<15 \Rightarrow \frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}<1,5$

А у нас $x\geq 4 \Rightarrow$ Этот случай не подходит

2сл. $y-x-8<0 \Rightarrow x+8-y=x-4 \Rightarrow y=12$

$x=-y^2+7y+1<0$ а $x\geq 4 \Rightarrow$ Этот случ. нам тоже не подх. $\Rightarrow$ если $x>1$ решений нет

3) $x<1 \Rightarrow (x-1)(y+4)<0$

$\Rightarrow |y-x-8|=4-x$ т.к. $x<1 \Rightarrow 4-x>0$ подх.

1 сл. $y-x-8\geq 0 \Rightarrow y-x-8=4-x \Rightarrow y=12$

$x=-y^2+7y+1=-59$

2 сл. $y-x-8<0 \Rightarrow x+8-y=4-x \Rightarrow y=2x+4$

$\Rightarrow x=-4x^2-16-16x+14x+28+1 \Rightarrow 4x^2+3x-13=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$ т.к. $x<1 \Rightarrow x=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}$ $y=\frac{13-\sqrt{217}}{4}$

Ответ: $x=1$ $y=7$; $x=-59$ $y=12$; $x=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}$ $y=\frac{13-\sqrt{217}}{4}$

Чистовик

Задача №4

Пусть за это время мы проехали x дуг AB, y дуг BC и z дуг AC.

Тогда $5x + 13y + 19z = 95$

1) $z = 5$ $x = 0$ $y = 0$ В этом случае через 95 минут мы будем в точке C. Не подходит

2) $z = 3$ $y = 1$ $x = 5$. Этот случай возможен

Мы сначала проедем 5 раз по AB приедем в B, потом один раз по BC приедем в C, и потом 3 раза по CA приедем в A.

Посчитаем расстояние в этом случае

$AB = 13 = \pi R_{AB} \Rightarrow R_{AB} = \frac{13}{\pi}$

~~A~~ $BC = 27 = \pi R_{BC} \Rightarrow R_{BC} = \frac{27}{\pi}$

$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{40}{\pi}$

$AC = \pi R_{AC} = 40$

Тогда расстояние равно $13 \cdot 5 + 27 + 40 \cdot 3 = 212$ км

3) $z = 2$ $y = 4$ $x = 1$. Но в этом случае как бы мы ни поехали мы не сможем попасть в точку A, а всегда будем попадать в B не подходит.

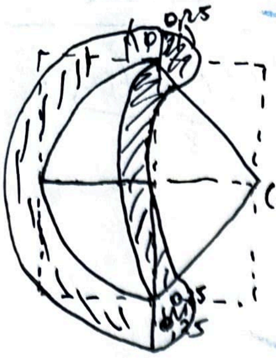
4) $z = 1$ $y = 2$ $x = 10$ В этом случае как бы мы не ездили мы в итоге приедем в C. Не подходит

5) $z = 0$ $y = 5$ $x = 6$. В этом случае как бы мы не ездили мы попадем в C. Не подходит.

$\Rightarrow$ Единственный вариант как бы мы могли так проехать это $x = 5$ $y = 1$ $z = 3$. В этом случае автомобиль проедет 212 км

Ответ: 212

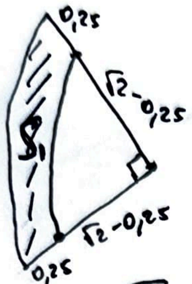
Задача №2. | Чистовик



Посчитаем изначальную площадь полумесяца. Она равна

$$\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - 1\right) = 1$$

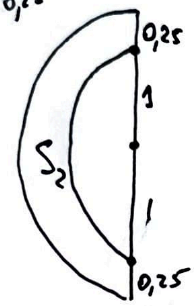
То насколько растечется месяц показано на рисунке штриховкой. Посчитаем площади этих кусков



$$S_1 = \frac{1}{4}\pi\left((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}-0,25)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\pi\left(0,5\sqrt{2} - \frac{1}{16}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(1,25^2 - 1^2\right) = \frac{9}{32}\pi$$



$$S_3 = S_4 = \frac{3}{8}\pi\, 0,25^2$$

Тогда площадь заштрихов. части равна

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi - \frac{1}{64}\pi + \frac{9}{32}\pi + \frac{3}{64}\pi = \frac{2\sqrt{2}+5}{16}\pi$$

А площадь всей получившейся фигуры равна

$$\frac{2\sqrt{2}+5}{16}\pi + 1$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}+5}{16}\pi + 1$

Задача N5 | Чистовик

$g'(x) = (f(f(\dots(f(x))))' = f'(\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{9}) \cdot f'(\underbrace{f(f(\dots f(x))}_{8}) \cdot$
$\dots \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$

Посчитаем чему равно $f(0)$

$\frac{x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

Теперь докажем что $f(-\frac{2^n-1}{2^n}) = -\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{2^n-1}{2^n}$ $\cancel{\Rightarrow (2^{n+1}-1)x = -2^{n+1}+1}$

$\cancel{f(-\frac{2^n-1}{2^n}) = \frac{1}{\frac{-2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}-1}}$

$2^n x + 2^n = -2^n x + x + 2^n - 1 \Rightarrow (2^{n+1}-1)x = -1$

$\Rightarrow f(-\frac{2^n-1}{2^n}) = \frac{1}{\frac{-1}{2^{n+1}-1}-1} = -\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow g'(x) = f'(0) \cdot f'(-0{,}5) \cdot f'(-\frac{3}{4}) \cdot \dots \cdot f'(-\frac{511}{512})$

Тангенс угла наклона касательной как раз и будет значением этого выражения

Заметим что если $f(x) = \frac{x}{x+1}$ то $f(\frac{x+1}{x-1}) = \frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = -\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \Rightarrow f'(0) = -1 \quad f'(-\frac{1}{2}) = 2^2 \quad f'(-\frac{3}{4}) = -2^4$

$\dots f'(-\frac{511}{512}) = -2^{18}$

$\cancel{\Rightarrow f'(x) = -f(x)^2}$

$\Rightarrow$ Тангенс угла равен $1 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot \dots \cdot 2^{18} = 2^{90}$

$\cancel{\Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{4} \quad f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{16} \quad \dots \quad f'(-\frac{511}{512}) = -\frac{1023^2}{1024^2}}$

~~Т.к. выражений у нас четное кол-во и все с − ⇒ произведение будет с +~~

~~Тангенс равен~~ $\cancel{\frac{1 \cdot (2^2-1)^2 \cdot (2^3-1)^2 \cdot \dots \cdot (2^{10}-1)^2}{2^{110}}}$

~~Ответ:~~ $\cancel{\frac{1 \cdot (2^2-1)^2 \cdot (2^3-1)^2 \cdot \dots \cdot (2^{10}-1)^2}{2^{110}}}$

$\boxed{\text{Ответ: } 2^{90}}$