0 720508 160005

72-05-08-16
(43.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дашевской Анны Владимировны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

72-05-08-16

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
±	±	∓	+	+	+.	+	0	68	[signature]	Дородницын Л.В.
8	8	4	12	12	12	12	0		[signature]	Лапонин ВС

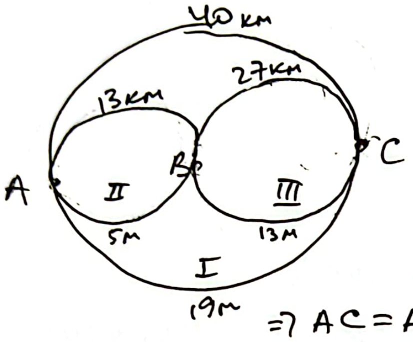
68 (шестьдесят восемь) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

72-05-08-16 (43.2)

Чистовик

Задача 4.

Заметим, что точки A, B и C лежат на одной прямой - диаметре AC большой окружности (Это следует из теоремы о 3 центрах гомотетии, т.к. A центр гомотетии, переводящей I окр во II, B - II в III, C - III в I) номера окружностей обозначены на рисунке.



$\cup AB$ - половина длины окружности II $\Rightarrow AB = 2r_2 = \frac{2\pi r_2}{\pi} = \frac{2\cdot 13}{\pi}$

Аналогично $BC = \frac{2\cdot 27}{\pi}$

$\Rightarrow AC = AB + BC = \frac{80}{\pi}$. Но длина дуги $\cup AC$ равна $2r_1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{80}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 40$км

1ч 35 мин = 95 мин

представим 95 как сумму $a\cdot 13 + b\cdot 5 + c\cdot 19$

I $c=5 \Rightarrow 95 = 0\cdot 13 + 0\cdot 5 + 5\cdot 19$. но такая ситуация невозможна, т.к. чтобы вернуться в A путешествуя лишь по дугам большой окружности, нужно объехать четное число полудуг (целое число окружностей) $5 \not\vdots 2$

I $c=4 \Rightarrow 13a + 5b = 19$ - невозможно

I $c=3$ $19\cdot 3 = 57$ $95-57=38 = 1\cdot 13 + 5\cdot 5$ - один способ

Такая ситуация возможна:

1) $A \to B$ 2) $B \to A$ 3) $A \to B$ 4) $B \to A$ 5) $A \to B$ 6) $B \to C$

$\underbrace{13\text{км} \quad \ldots}_{13\cdot 5\text{ км}}$ 27км

7) $C \to A$ 8) $A \to C$ 9) $C \to A$

$\underbrace{40\text{км} \quad \ldots}_{120\text{ км}}$

итого: $65 + 120 + 27 = 212$ км

I $c=2$ $19\cdot 2 = 38$ $57 = 13a + 5b$ - нет решения в нат. числах

$c=1$ $95-19=76 = 2\cdot 13 + 10\cdot 5$ ~~покрасим вершины A - черн B - бел C - черн.~~ Не умаляя общности мы проедем дугу AC первой (

$c=0$ $95 = \left[\begin{array}{l} 19\cdot 5 \text{ - невозможно (рассуждения как при } c=5,\ 19 \not\vdots 2) \\ 13\cdot 5 + 5\cdot 6 \end{array}\right.$

Задача 4 (продолжение) чистовик

$95=19+2\cdot13+10\cdot5$ и $95=13\cdot5+5\cdot6$ такие невозможны, этот путь закончится в вершине С

Ответ: 212км

Задача 1

4 кол-во способов выбрать защитников и нападающих. Создадим таблицу, цифры в столбцах и строках означают кол-во универсалов в данной категории. (н - нападающие; з - защитники)

з \ н	0	1	2	3
0	C_5^2 (выбрать з) $\cdot C_6^3$ (выбрать н)	$C_5^2\cdot C_3^1\cdot C_6^2$	$C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_6^1$	$C_5^2\cdot C_3^3$
1	$C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_6^3$	$C_5^1\cdot C_6^2\cdot C_3^2\cdot 2!$	$C_3^3\cdot 3\cdot C_6^1\cdot C_5^1$	
2	$C_3^2\cdot C_6^3$	$C_3^3\cdot 3\cdot C_6^2$		

Теперь перепишем таблицу со знач. в каждой клеточке

т.к. универсалов в сумме 3

	0	1	2	3	
0	$10\cdot20$	$10\cdot3\cdot15$	$10\cdot3\cdot6$	$10\cdot1$	$\sum=200+450+180+10=840$
1	$3\cdot5\cdot20$	$5\cdot15\cdot3\cdot2$	$3\cdot6\cdot5$		$\sum=300+450+90=840$
2	$3\cdot20$	$3\cdot15$			$\sum=60+45=105$

$\sum=1795$. и каждому из этих способов соответствует 3 способа выбора вратаря.

$$\begin{array}{r}1795\\ \times\ 3\\ \hline 5385\end{array}$$

Ответ: $1795\cdot3=5385$

72-05-08-16 (43.2)

Задача 3 чистовик

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

Ответ: $x=-59$, $y=12$

$$\sqrt{y-x+10} = y-3 \Rightarrow \begin{cases} y-x+10 \geq 0 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

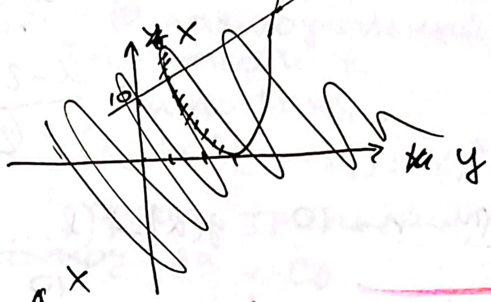
$$\begin{cases} (x(y+4)-(y+4))|y-x-8| = (x-4)|(x-1)(y+4)| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (x-1)(y+4) \cancel{\dots} |y-4-x-4| = (x-4)|(x-1)(y+4)| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

т.к. $y \geq 3$ $\quad y+4>0$

$$\begin{cases} (x-1)|y-4-x-4| = (x-4)|x-1| \\ y-x+10 \geq 0 \\ y \geq 3 \\ y-x+10 = y^2-6y+9 \end{cases} \Rightarrow (*)\ x-1 \text{ и } x-4 \text{ одного знака} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{array}\right.$$

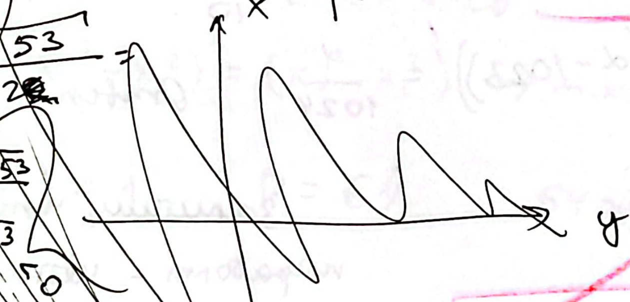


$-x = y^2 - 7y - 1$

$x = -y^2 + 7y + 1$

$y_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{53}}{-2} =$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{7+\sqrt{53}}{2} \\ \dfrac{7-\sqrt{53}}{2} < 0 \text{ — не подходит} \end{array}\right.$$



$(*)$

$|y-4-x-4| = |x-4|$

$|y-x-8| = |x-4| \Rightarrow$ при $x \geq 4$ $\left[\begin{array}{l} y-x-8 = x-4 \\ y-x-8 = 4-x \end{array}\right.$ при $x \leq 1$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}y - 2 \ (***) \\ y = 12 \Rightarrow (**) \end{array}\right.$

$(**)$

$x = -y^2 + 7y + 1 = -144 + 84 + 1 = -59$

$(***)$

$x = \frac{1}{2}y - 2$

$x = -y^2 + 7y + 1 \Rightarrow \cancel{\dots}\ -y^2 + 7y + 1 = \frac{1}{2}y - 2$

$-y^2 + 6{,}5y + 3 = 0 \quad \cancel{y_{1,2} = \frac{-6{,}5 \pm \sqrt{\dots}}{2}}$

продолжение после задачи 7

чистовик

Задача 5

$y=f(x): f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$

$\exists\ \frac{x+1}{x-1}=\alpha \Leftrightarrow x+1=\alpha x-\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)x=1+\alpha \Rightarrow x=\frac{1+\alpha}{\alpha-1}, \alpha\neq 1$

$x\neq 1$

Т.к. мн-во значений функции совпадает с её областью определения (все вещ. числа кроме 1)

Тогда $f(\alpha)=\frac{1}{\frac{1+\alpha}{\alpha-1}-1}=\frac{1}{\frac{1+\alpha-\alpha+1}{\alpha-1}}=\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\alpha-2^1+1}{2^1}$

$f(f(\alpha))=\frac{\frac{\alpha-1}{2}-1}{2}=\frac{\alpha-1-2}{4}=\frac{\alpha-3}{4}=\frac{\alpha-2^2+1}{2^2}$

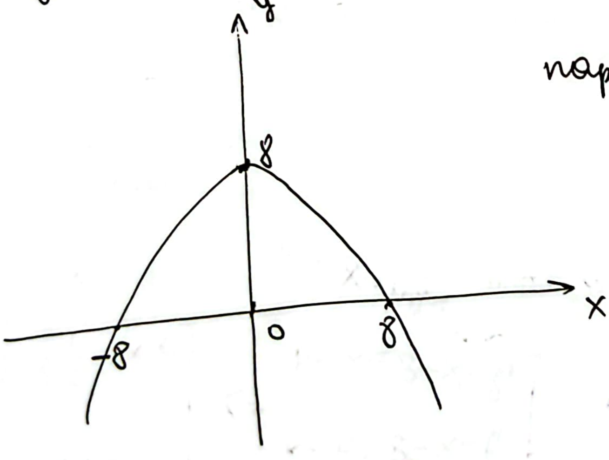
если $\underbrace{f(\ldots f(\alpha))}_{n}=\frac{\alpha-2^n+1}{2^n}$, то $\underbrace{f(\ldots f(\alpha))}_{n+1}=\frac{\frac{\alpha-2^n+1}{2^n}-1}{2}=$

$=\frac{\alpha-2^n+1-2^n}{2^n\cdot 2}=\frac{\alpha-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$

Значит, при $n=10$ $g(\alpha)=\underbrace{f(f\ldots f(\alpha))}_{10}=\frac{\alpha-2^{10}+1}{2^{10}}=\frac{\alpha-1023}{1024}$

$g'(0)=\left(\frac{1}{1024}(\alpha-1023)\right)'=\frac{1}{1024}$ Ответ: $\frac{1}{1024}$

Задача 6



для $-bx^2+a$

Заметим, что график - парабола - чётная функция ($\Rightarrow$ она симметрична отн Oy). Значит, вершина лежит на Oy, её координаты $(0;8)$

Корни x_1 и x_2 такие симметричны. $x_1=-x_2$

$|x_1|+|x_2|=16$

$\Rightarrow |x_1|=8$

По т. Виета ~~$|x_1|\cdot|x_2|=-c$~~ $x_1\cdot x_2=\frac{-a}{b}=-64$ $\frac{a}{b}=64$

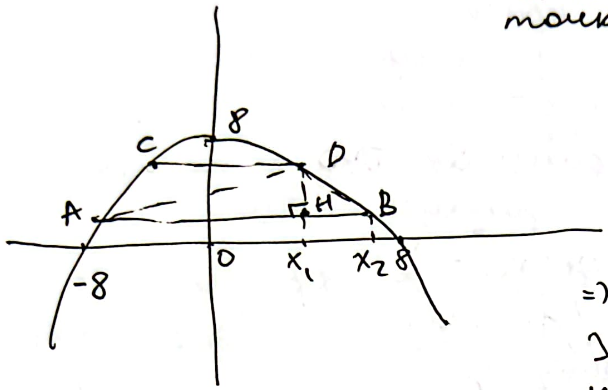
a - ~~координата~~ ордината пересечения параболы и $Oy \Rightarrow a=8$

$\frac{1}{b}=8 \Rightarrow b=\frac{1}{8}$

график $-\frac{1}{8}x^2+8$

(продолжение на сл. листе)

№6. продолжение



чистовик

ACDB - трапеция, т.к. AB || CD точки A, B имеют одинаковую C, D ординату и т.к. функция четна противоположные абсциссы значений, у трапеции ∃ ось симметрии Oy.

=> это равнобокая трапеция.

Э H - проекция точки D на AB. $D(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$\Rightarrow A(-x_2, y_2)$ $C(-x_1, y_1)$

$\rho = \Delta y = y_1 - y_2 = -\frac{1}{8}x_1^2 + 8 + \frac{1}{8}x_2^2 - 8 = \frac{1}{8}(x_2^2 - x_1^2)$

искомое расст.

Также поскольку $\triangle ADB$ - прямоугольный и DH - высота к гипотенузе $DH^2 = AH \cdot HB$

$DH^2 = (x_1 - (-x_2))(x_2 - x_1) = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2$

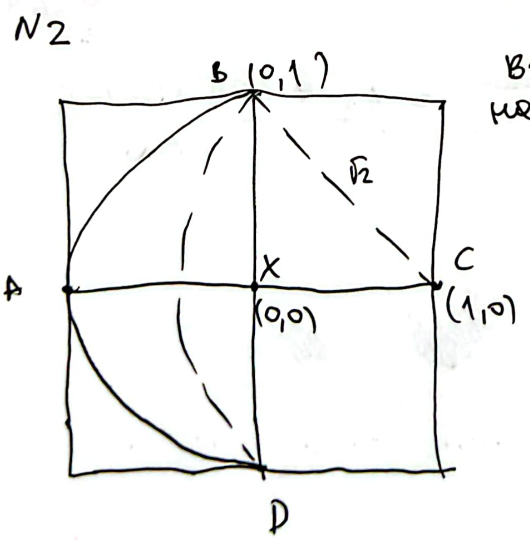
и т.к. DH является высотой трапеции, его длина - расстояние между AB и CD

$\rho = DH \Rightarrow \frac{1}{64}(x_2^2 - x_1^2)^2 = (x_2^2 - x_1^2) \Rightarrow$ т.к. $x_2^2 \neq x_1^2$

$\Rightarrow \frac{1}{64}\underbrace{(x_2^2 - x_1^2)}_{\rho} = 1$ $\quad \rho = 64 \ldots$ $\quad 64 > 8$?!

противоречие..

№2



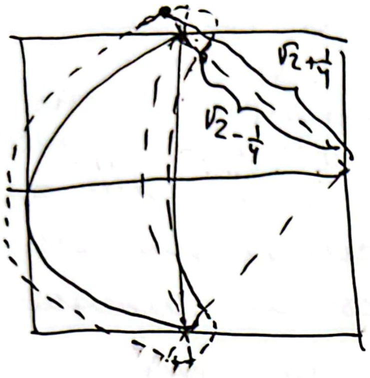
введём обозначения, как показано на рисунке. $BC = \sqrt{BX^2 + CX^2} = \sqrt{2}$

Найдем площадь полумесяца до того, как он расплылся

$$S_0 = \underbrace{\frac{\pi \cdot 1^2}{2}}_{\text{площадь полукруга ABD}} - \underbrace{\left(\frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}\right)}_{\text{площадь сегмента BD окружности C } r=\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

№2. продолжение листовик



К утру краска расплывется так, что у полумесяца образуется «контур» шириной 0,25

в вершинах будут полуокружности радиуса 0,25

~~∃ S_1 – добавка к окружности радиуса 1, S_2 – добавка к окр. радиуса $\sqrt{2}$, а S_3 – пересечения добавок~~

$$\cancel{S_1=\frac{\pi\cdot(\sqrt{2}+\frac{1}{4})^2}{4}-\frac{\pi(\sqrt{2}-\frac{1}{4})^2}{4}=\frac{\pi}{4}\left((\sqrt{2}+\tfrac{1}{4})^2-(\sqrt{2}-\tfrac{1}{4})^2\right)=}$$

$$\cancel{=\frac{\pi}{4}\left(2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}-\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}\left(2\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}}$$

∃ S_1 – „добавка" к окружности радиуса 1; S_2 – „добавка" к окр. радиуса $\sqrt{2}$, S_3 – пересечение „добавок", S_4 – окр-ти на вершинах

$$S_1=\frac{\pi\cdot(1+\frac{1}{4})^2}{2}-\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{9\pi}{32}$$

$$S_2=\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4}-\frac{\pi(\sqrt{2}-\frac{1}{4})^2}{4}=\frac{\pi}{4}\left(\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{64}\right)$$

$$S_3=2\cdot\frac{\pi(\frac{1}{4})^2}{8}=\frac{\pi}{16\cdot 4}=\frac{\pi}{64}$$

$$S_4=\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

т.е. $S=S_0+S_1+S_2+S_4-S_3=1+\frac{9\pi}{32}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{\pi}{256}+\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{64}=$

$$=1+\frac{72\pi+32\sqrt{2}\pi-\pi+16\pi-4\pi}{256}=1+\frac{83\pi+32\sqrt{2}\pi}{256}$$

Ответ: $1+\frac{83\pi+32\sqrt{2}\pi}{256}$

Задача 7

чистовик

Ответ: $10^{85}-1$

$\forall$ $k \in \mathbb{N}$: $1 \le k \le n$. Обозначим за $a_1, a_2, \dots a_q$ - цифры в его записи. Их q штук $\Rightarrow$ $q \le 85$. Припишем спереди 0 так, чтоб цифр в сумме в k стало 85

Заметим, что $S(10^{85}-1) = 9 \cdot 85$

$k \cdot n = (10^{85}-1) \cdot k = k \cdot 10^{85} - k$

Запишем вычитание в столбик:

$$\begin{array}{r} - \ a_1 a_2 \dots a_q \overbrace{000 \dots 0}^{85} \\ 00 a_1 a_2 \dots a_q \\ \hline 99\,9{-}a_1 \dots 9{-}a_{q-1}\ 10{-}a_q \end{array}$$

Теперь чтоб произвести операцию вычитания, нужно из последней ненулевой цифры в числе k вычесть ~~~~ единицу, а под каждой цифрой вычитаемого, кроме последней, написать ~~~~ цифру (9 минус это число). У последней ~~~~ будет цифра 10 минус ~~~~ a_q.

Тогда сумма цифр в получившемся числе будет

$$a_1 + a_2 + \dots a_q - 1 + (9-a_1) + (9-a_2) + \dots (9 - a_{q-1}) + 10 - a_q +$$

$$+ 9 \cdot (85 - q) = 9 \cdot (q-1) + 9 + 9(85-q) = 9 \cdot 85$$

т.к. нули приписанные к K превратились в девятки

q.e.d.

Это число является максимальным 85-значным $\Rightarrow$ больше него нет.

№3. продолжение чистовик

$$y_{1,2} = \frac{-6,5 \pm \sqrt{70,25}}{-2} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{6,5+\sqrt{70,25}}{2}\\[2mm] \dfrac{-6,5+\sqrt{70,25}}{2}\end{array}\right.$$

$$y_{12} = \frac{-6,5 \pm \sqrt{42,25+12}}{-2} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{6,5+\sqrt{54,25}}{2} \Rightarrow x = \\[2mm] \dfrac{-6,5+\sqrt{54,25}}{-2} < 3\end{array}\right.$$

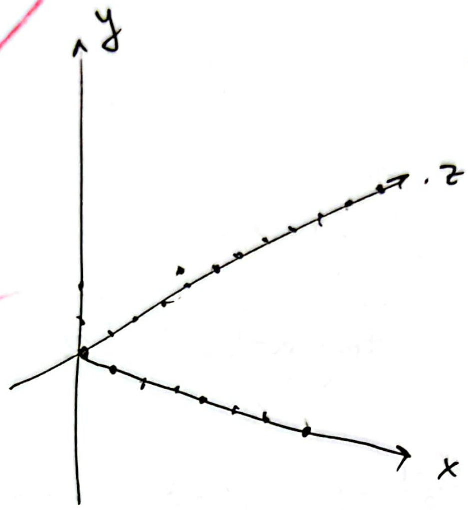
также не решение

чистовик

A (1, 1, 3)

B (7, 2, 11)

C (5, 5, 5)



$AB = \sqrt{6^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{101}$

$BC = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

$CA = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{34}$

черновик

$y = f(x)$ $\quad f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ $\quad 10^{84} - 1$

$\exists \ \frac{x+1}{x-1} = \alpha$ $\quad x+1 = \alpha x - \alpha$ $\quad 9 \quad 9 \cdot 2 = 18 \quad 9 \cdot 3 = 27$

$(\alpha - 1)x = 1 + \alpha$ $\quad 99 : 9$

$x = \frac{1+\alpha}{\alpha - 1} \Rightarrow \alpha \neq 1$

$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\frac{1+\alpha}{\alpha-1} - 1} = \frac{1}{\frac{1+\alpha-\alpha+1}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{2}$

$f(0) = -\frac{1}{2}$

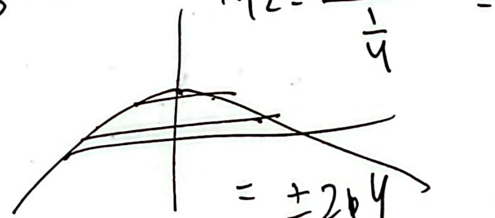
$f(f(\alpha)) = \frac{f(\alpha)-1}{2} = \frac{\frac{\alpha-1}{2}-1}{2} = \frac{\alpha-3}{4}$ $\quad 111 \cdot 17 = 777 + 111 = 1887$

$f(f(f(\alpha))) = \frac{\frac{\alpha-3}{4}-1}{2} = \frac{\alpha-7}{8} \quad 2^3$ $\quad 99 : 2$

$\Rightarrow$ 10 раз

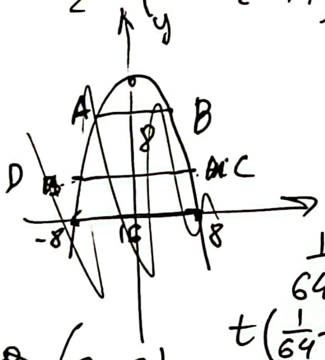
$g(\alpha) = f(f(\ldots f(\alpha))) = \frac{\alpha - 2^{10} + 1}{2^{10}}$ $\quad -\frac{1}{8}x^2 + 8$ $\quad x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{4}}{\frac{1}{4}} =$

$g'(\alpha) = \frac{1}{2^{10}}(\alpha - 2^{10} + 1)$ $\quad 3 \quad 99 \cdot 41 = 99 + 396 = 4059$



$= \pm 2\sqrt{4}$

N6

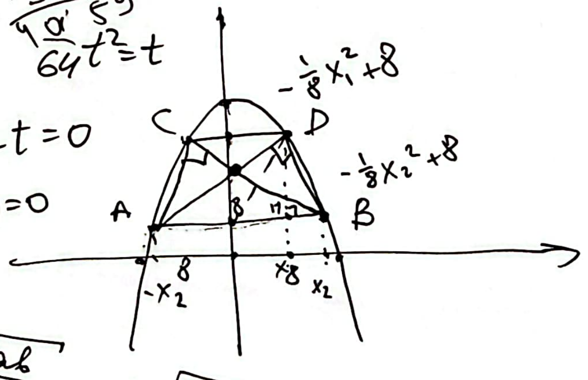


$64t^2 = t$

$\frac{1}{64}t^2 - t = 0$

$t\left(\frac{1}{64}t - 1\right) = 0$

$\frac{1}{64}t = 1$



$-bx^2 + a$

вершина $(0, a)$

корни $\frac{0 \pm \sqrt{4ab}}{2b} = \pm\sqrt{\frac{4ab}{4b^2}} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}} = \pm 8$ $\quad \sqrt{\frac{8}{b}} = 8$

$\beta = -\frac{1}{8}x_1^2 + 8 - \left(-\frac{1}{8}x_2^2 + 8\right) =$ $\quad \frac{8}{b} = 64$

$= \frac{1}{8}(x_2^2 - x_1^2)$ $\quad 87000 : 87$ $\quad \frac{1}{b} = 8 \quad b = \frac{1}{8}$

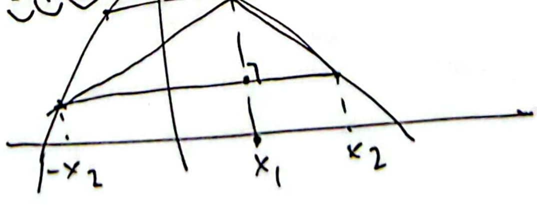
913

$AH \cdot HB = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2)$

$S(h) = 9 \cdot 85$

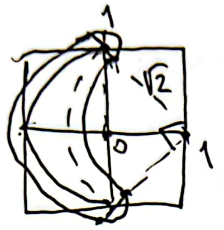
$(10^{85} - 1) \cdot k =$ k — 2 числа б-сумма

$= k000\ldots0$ k

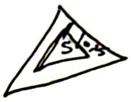


черновик

№2



$$S_0 = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 2}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1$$



№5

$y = f(x)$: $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$f(f(x))$: $f\left(\frac{f(x)+1}{f(x)-1}\right) = \frac{1}{f(x)-1}$

$f(-1)$: $f(0) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$f(2) = \frac{1}{0,5} = 2$

$\frac{x+1}{x-1} = 2$

$x+1 = 2x-2$

$x = 1,5$

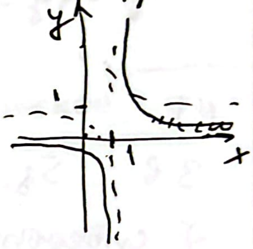
$f(3) = 1$

$x+1 = 3x-3$

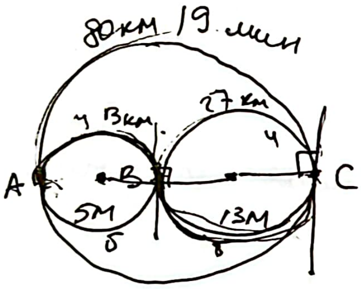
$2x = 4$

$x = 2$

$\frac{x+1}{x-1} = \alpha$



№4



$AB = \frac{2\cdot 13}{\pi}$ $BC = \frac{2\cdot 27}{\pi}$ $AC = AB + BC = \frac{80}{\pi}$

$\pi r = 13$

$\Rightarrow \cup AC = 80$ км

3км - за 5 мин

27км за 13 мин

$95 = 19 \cdot 5$

$95 = a \cdot 13 + b \cdot 5 + c \cdot 19$

$\exists\, c = 5 \Rightarrow a = b = 0$

$\exists\, c = 4$ - не сущ.

$c = 3$ $19 \cdot 3 = 57$ $95 - 57 = 38 = 1 \cdot 13 + 5 \cdot 5$

$a = 1$ $b = 5$

$c = 2$ $19 \cdot 2 = 38$ $95 - 38 = 57 =$ не сущ

$c = 1$ $95 - 19 = 76 = 26 + 50$

черновик

N3 $x(y+4)-(y+4)$

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y+4)(x-y)|y-x-8| = (x-4)|(y+4)(x-y)| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3\end{cases} \Rightarrow$$

$y \geq 3$

$y-x+10 \geq 0$

$y \geq x-10$

$$\begin{cases}(x-\cancel{y}\,1)|y-x-8| = (x-4)|x-\cancel{y}\,1| \\ y-x+10 = y^2-6y+9\end{cases}$$

$y^2-7y-1=-x$ $\quad x=-y^2+7y+1 = \frac{-7\pm\sqrt{49+4}}{-2}$

$x-y \leq 10$

$x \leq y+10$

$x \leq 13$

$x-4$ и $x-1$ одн знака

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$

1 4

N1

3в 5з 6н 3у

4 способа выбрать 2з и 3н

~~есть среди защ. 0 ун: 5.4~~

з \ н	0	1	2	3
0	5·6	5·		
1				
2				

- кол-во универсалов среди них

есть: 5з 6н 3у

надо: 2з + 3н

з \ н	0	1	2	3
0	$C_5^2 \cdot C_6^3$	$C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2$	$C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_6^1$	$C_5^2 \cdot C_3^3$
1	$C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3$			
2	$C_3^2 \cdot C_6^3$			