+1 лист
+1 лист

0 312579 550009

31-25-79-55
(39.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наменование олимпиады

по ____________
профиль олимпиады

Деменевой Маргариты Витальевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
31-25-79-55	64	4	12	12	0	12	12	12	0

31-25-79-55
(39.11)

Черновик

В рис. 3

Одн. ~~5·6~~

~~1 одн. C_3^1~~

+

Одн. $C_5^2\cdot C_6^3$

64 (шестьдесят четыре)

1у. 3· → $C_5^1\cdot C_6^3$

→ $C_5^2\cdot C_6^2$

2ун. C_3^2 → C_6^3

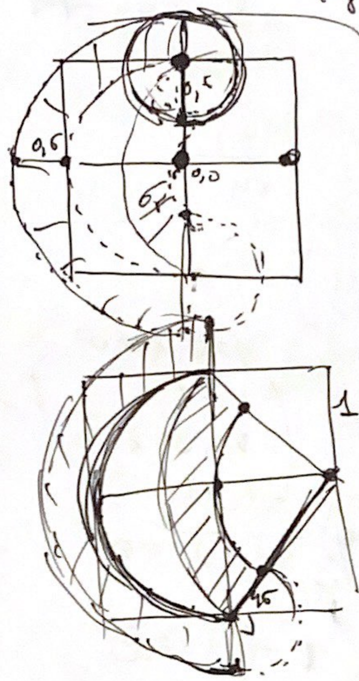
→ $C_5^1\cdot C_6^2$

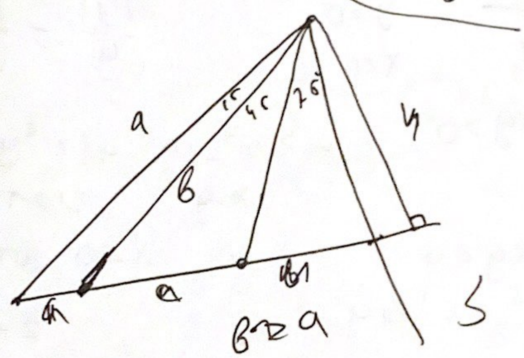
3ун. C_3^3 → $C_5^2\cdot C_6^1$

→ C_6^2

→ $C_5^1\cdot C_6^1$

$C_5^2\cdot C_6^1$





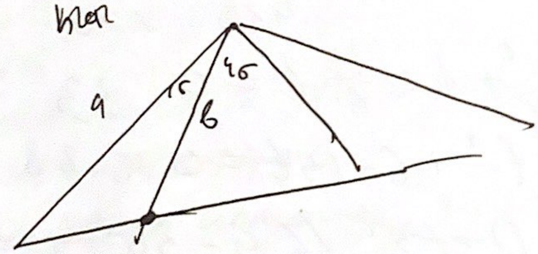
в=2а

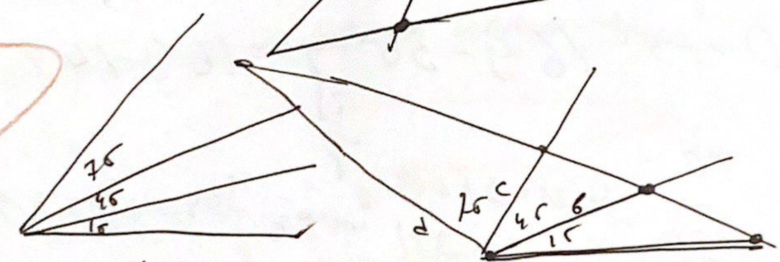
5 $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

Клас

$4\ h_a + h_b = 10$

$h_a^2 b = 12$





$ad\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$ab\sin15 + cd\sin75 =$

$ab + cd$

$abcd$

$abcd\ \sin15\sin75 = 3/2$

$\frac{1}{2}(\cos(60) - \cos(90))$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0

ad ab cd

155
113
465
55
520
750
1270
200

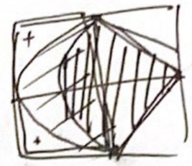
1005
465
1470
3
4410

4410 | 3
147
3
14
12
21

$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

при x и y – ра
зн.

R^2_{11}



$\frac{x|y|}{xy}$

$2(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ $xy(x+y)$

36
4
144

$y>0$
$x<0$ 1

$\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x}$

$y>0$ $x>0$
1 -1
$y<0$ $x<0$
-1 $+1$

$xy>0$ $\frac{|x^3+y^3-19|}{xy} + |x^2y(x+y)+6| + 2 = 0$

истрец.

$xy<0$ $y>0$ $x<0$, тогда $1-(-1)=2$

44 2+2

$y<0$ $x>0$ $-1-1+2=0$

$t^2+1+\frac{13}{6}t=0$ 33 51

13
13
39
13

$6t^2+6+13t=0$ 28

$D = 13^2 = 169 - 36 \cdot 4 = 169 - 144 = 25$

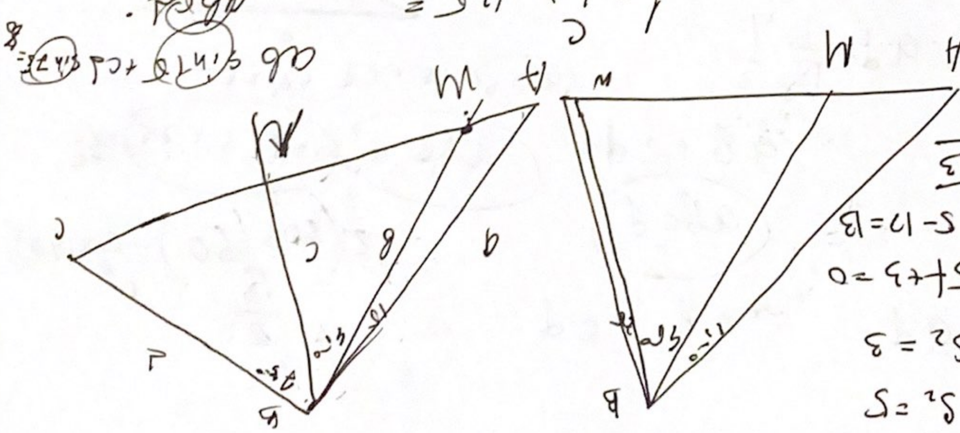
$\frac{21}{1}$

PD

60+72=126

PD 90

136



$S_1+S_2=5$

$S_1 S_2 = 3$

$t^2-5t+3=0$

$D=25-12=13$

$\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

31-25-79-55
(39.11)

Чистовик 1

1) Выбрать ~~хоккеист~~ вратаря* (выбор 2 защ. · выбор 3 нап.)

Рассмотрим случаи: Если 0 универсалов, тогда вариантов выбрать $C_5^2 \cdot C_6^3 = \frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} = \frac{20\cdot20}{2} = 200$

Если 1 универсал $C_3^1\cdot(C_5^1\cdot C_6^3 + C_5^2\cdot C_6^2) =$ куда этот универсал

$= 3\cdot\left(5\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} + \frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{6\cdot5}{2}\right) = 3\cdot(100+150) =$
$= 250\cdot3 = 750$

Если 2 универсала: $C_3^2\left(C_6^3 + C_5^1\cdot C_6^2 + C_5^2\cdot C_6^1\right) =$
$= 3\left(20 + 5\cdot\frac{6\cdot5}{2} + \frac{5\cdot4}{2}\cdot6\right) = 3(80+15\cdot5) = 3\cdot(80+$
$+50+25) = 3\cdot155 = 465$

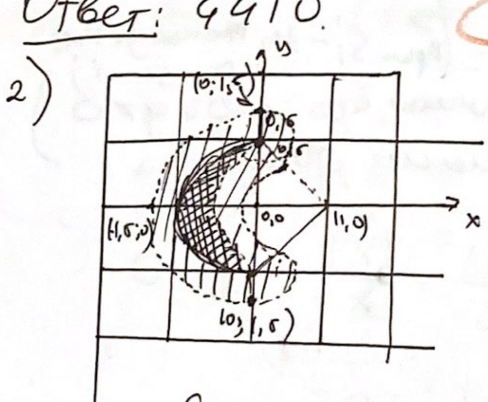
Если 3 универсала: $C_3^3\left(C_6^2 + C_5^1\cdot C_6^1 + C_5^2\right) =$
$= 1\cdot\left(\frac{6\cdot5}{2} + 5\cdot6 + \frac{5\cdot4}{2}\right) = 55$

Тогда всего вариантов выбрать защ. и напад.:
$55+465+750+200 = 1470$

Тогда вариантов выбрать команду $3\cdot1470 =$
$= 4410$

Ответ: 4410.

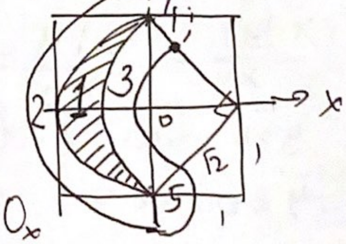
2)



\#\# - изначальный месяц

// - то что расплылось

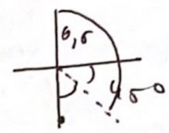
Разобьем на такие части



$S_4 = S_5$ из симм. отн. O_x

Чистовик 2

$S_4=S_5=\frac{90+45}{360}\cdot S'_{0,5}=\frac{135}{360}\cdot 0{,}5^2\cdot\pi=$



$=\frac{45\cdot 3}{45\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\pi=\frac{3\pi}{32}$

$S_4+S_5=2\,\frac{3\pi}{32}=\frac{3\pi}{16}$

$S_2=\frac{1}{2}\left(S'_{1,5}-S'_1\right)=\frac{1}{2}\left(1{,}5^2\pi-\pi\right)=\frac{\pi(1{,}5^2-1)}{2}=$

$=\frac{(2{,}25-1)\pi}{2}=\frac{1{,}25\pi}{2}$

$S_3=\frac{1}{4}\left(S'_{\sqrt{2}}-S'_{\sqrt{2}-0,5}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(2\pi-(\sqrt{2}-0{,}5)^2\pi\right)=$

$=\frac{\pi}{4}\left(2-(2+0{,}5^2-\sqrt{2})\right)=\frac{(\sqrt{2}-0{,}25)}{4}\pi$

$S_1=\frac{1}{2}S'_1-\left(\frac{1}{4}S'_{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi-\left(\frac{1}{4}2\pi-1\right)=$

$=1=\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)+1$

$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=1+\pi\frac{(\sqrt{2}-0{,}25)}{4}+\pi\frac{1{,}25}{2}+\frac{3\pi}{16}=$

$=1+\frac{\pi}{16}\left(3+\frac{\cancel{125}^{5}}{\cancel{100}_{4}}\cdot\cancel{8}^{2}+(\sqrt{2}-0{,}25)\cdot 4\right)=1+\frac{\pi}{16}\cdot$

$\cdot\left(3+5\cdot 2+4\sqrt{2}-1\right)=1+\frac{\pi}{16}\cdot 2\left(1+5+2\sqrt{2}\right)=$

$=1+\frac{\pi}{8}\cdot 2\left(3+\sqrt{2}\right)=1+\frac{\pi}{4}\left(3+\sqrt{2}\right)$ м

<u>Ответ:</u> $1+\frac{\pi}{4}\left(3+\sqrt{2}\right)$ (При S'_i – это площадь окр с радиусом i)

3) Если $xy>0$ (запомним, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$)

тогда они одного знака, тогда

$\frac{x|y|}{xy}-\frac{|x|y}{xy}=\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}=0$

$y>0\ x>0:\ 1-1=0$ $\Rightarrow$

$y<0\ x<0:\ -1-(-1)=0$

А тогда Чистовик 3

$$\underbrace{\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0} + \underbrace{|xy(x+y)+6|}_{\geq 0} + 2^{\frac{2xy}{xy}}}_{\geq 0+0+2=2} = 0$$

$\Downarrow$ $\geq 0+0+2=2.$

противоречие $\Rightarrow$ x и y разных знаков.

Причем, при $y>0$ и $x<0$, тогда

$$\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} = 1-(-1) = 2, \text{ и тогда } 2+\frac{2xy}{xy} = 4$$

$$\underbrace{\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0} + \underbrace{|yx(x+y)+6|}_{\geq 0} + 4}_{\geq 4} = 0$$

≥ 4 $\Rightarrow$ противоречие

$\Downarrow$

$\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} = -2$ $\quad \frac{2xy}{xy}$

$\underline{y<0 \text{ и } x>0}$

$$|x^3+y^3-19| + |xy(x+y)+6| - 2 + 2 = 0$$

$$\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0} + \underbrace{|xy(x+y)+6|}_{\geq 0} = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)(x^2-yx+y^2)=19 \\ (x+y)(xy)=-6 \end{cases}$$

$(x+y\neq 0)$

$$\frac{x^2-yx+y^2}{xy} = -\frac{19}{6}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1 = -\frac{19}{6} \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \frac{-19+6}{6} = -\frac{13}{6}$$

$\frac{x}{y} = t$ $\quad (t<0$ из $x>0$ и $y<0)$

$$t+\frac{1}{t}+\frac{13}{6}=0$$

$$t^2+1+\frac{13}{6}t=0$$

$$D = \left(\frac{13}{6}\right)^2 - 4 = \frac{169-6^2\cdot 4}{6^2} = \frac{5^2}{6^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$t = \frac{-\frac{13}{6} \pm \frac{5}{6}}{2} = \frac{-13\pm 5}{12}$$

$\nearrow t_1 = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$

$\searrow t_2 = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}$

Чистовик 4

Тогда 1) $\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $x^2(x+y)=4$

$xy(x+y)=-6$

$x^2(x-1,5x)=4$

$y=-\frac{3}{2}x=-1,5x$

$-0,5x^3=4$

$x^3=-8$

$\Downarrow$

$x=-2$, что $x>0$

противоречие

2) $\frac{x}{y}=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $x^2(x+y)=9$

$xy(x+y)=-6$

$x^2\left(x-\frac{2}{3}x\right)=9$

$y=-\frac{2}{3}x$

$x^3=27$

$\Downarrow$

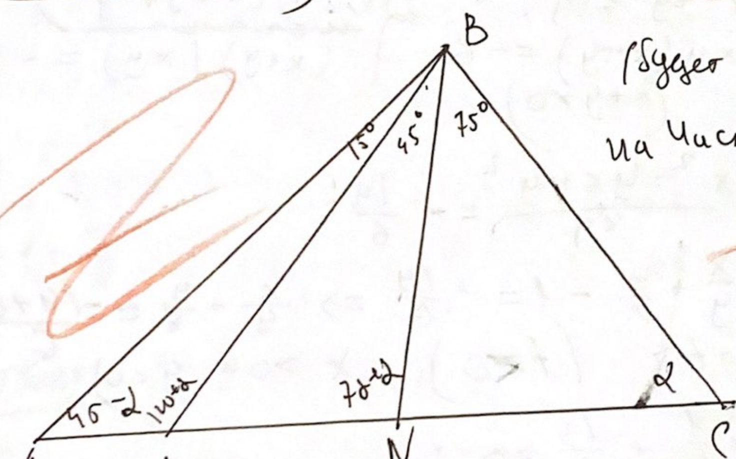
$x=3$

$\Downarrow$

$y=-2$

Ответ: $(3;-2)$

4) (будет далее) на Чистовик 10



$$\begin{cases} S_{ABM}+S_{NBC}=5 \\ S_{ABM}\cdot S_{NBC}=3 \end{cases}$$

$t^2-5t+3=0$
решение этого
это решение системы

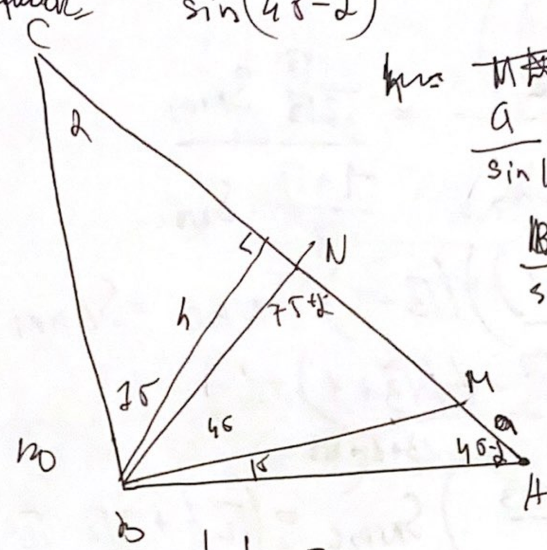
$$\{S_{ABM}; S_{NBC}\}=\left\{\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

31-25-79-55
(39.11)

Черновик

$\sin(45-\alpha)$



$\frac{a}{\sin 15} = \frac{BM}{\sin(45-\alpha)}$

$\frac{BM}{\sin(75+\alpha)} = \frac{BM}{\sin 45}$

$NM = \frac{\frac{1}{\sqrt2} \cdot a \sin(45-\alpha)}{\sin(75+\alpha)\sin 15}$

$\frac{1}{2} ha =$

$\frac{CM}{\sin 120} = \frac{BM}{\sin\alpha}$

$CN = CM - NM =$

$= BM\left(\frac{\sin(75+\alpha)}{\sin 45} - \frac{\sin 120}{\sin\alpha}\right) =$

$= \frac{a(\sin 45-\alpha)}{\sin 15}\left(\sqrt2 \sin(75+\alpha) - \frac{\sqrt3}{2\sin\alpha}\right)$

$\frac{\sin(45-\alpha)}{\sin 15}\left(\sqrt2 \sin(75+\alpha) - \sqrt3\right.$

$S_1 + S_2 = 5$

$S_1 S_2 = 3$

$S_2 = \frac{3}{S_1}$

$AB \cdot BM = \frac{(5-\sqrt{13})(2\sqrt2)}{2(\sqrt3-1)} \cdot 2$

$BN \cdot BC \frac{1}{2}(\cos\alpha - \sqrt3 \sin\alpha)$

$\frac{BN}{BM} = \frac{\sin(60-\alpha)}{\sin(75+\alpha)} = \frac{\sin 60 \cdot \cos\alpha - \cos 60 \sin\alpha}{\sin(75)\cos\alpha - \cos 75 \sin\alpha}$

$\frac{1}{2\sqrt2}$

$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{\sqrt2}(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha} =$

$= \frac{1}{\sqrt2}(\operatorname{ctg}\alpha - 1)$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик 12

$$\frac{\cancel{2}\left(t\frac{1+\sqrt3}{\cancel{2}\sqrt2}+\frac{\sqrt3-1}{\cancel{2}\sqrt2}\right)}{\sqrt3 t^2-t(\sqrt3+1)+1} = \frac{\frac{1+\sqrt3}{\cancel{2}\sqrt2}S_{ABM}}{\frac{-1+\sqrt3}{\cancel{2}\sqrt2}S_{NBC}}$$

$$\sqrt3(t-1)\left(t-\frac{1}{\sqrt3}\right) \quad 3-1=2$$

$$\left(t\left(\frac{1+\sqrt3}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{\sqrt3-1}{\sqrt2}\right)\right)(\sqrt3-1)\,S_{NBC}=S_{ABM}\cdot$$

$$\cdot(1+\sqrt3)\left(\sqrt3t^2-t(\sqrt3+1)+1\right)$$

$$3+1+2\sqrt3$$

$$\left(\frac{2t}{\sqrt2}+\frac{3+1-2\sqrt3}{\sqrt2}\right)S_{NBC}=\left(\sqrt2t+2\sqrt2-\sqrt6\right)S_{NBC}=$$

$$=\left((3+\sqrt3)t^2-2(2+\sqrt3)t+1\right)S_{ABM}$$

После решения квадратного уравнения

нужно найти $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin(75+45+15)=$

$$=\frac12 AB\cdot BC\cdot\sin(120)=\frac{\sqrt3}{4}AB\cdot BC=$$

$$=\frac{\sqrt3}{4}AB^2\frac{1}{\sqrt2}(t-1)=\frac{\sqrt3}{4\sqrt2}(t-1)AB^2,$$

а $AB=\sqrt{\dfrac{S_{ABM}\cdot\sqrt2(\sqrt3t-1)}{(t-1)\sin15}}$, то есть

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt3}{4\cancel{\sqrt2}}\frac{S_{ABM}\cancel{\sqrt2}(\sqrt3t-1)\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}\sin15}=$$

$$=\frac{\sqrt3}{4\sin15}S_{ABM}(\sqrt3t-1)=$$

$$=\frac{\sqrt3\,\cancel{2}\sqrt2}{(\sqrt3-1)\cancel{4}_{2}}S_{ABM}(\sqrt3t-1)=\frac{\sqrt3}{\sqrt2(\sqrt3-1)}S_{ABM}\cdot$$

$$\cdot(\sqrt3t-1)$$

Числитель $\sqrt{3}$

$$\frac{\left(\sqrt{3}\left(\cancel{t-1}\right)+\left(\cancel{t-1}\right)\right)}{\sqrt{2}\,\cancel{\sqrt{3}}\left(\cancel{t-1}\right)\left(\sqrt{3}t-1\right)}=\frac{\cancel{\left(1+\sqrt{3}\right)}}{\left(\sqrt{3}-1\right)}\frac{S_{ABM}}{S_{NBC}}$$

$$\sqrt{3}t-1=\frac{S_{NBC}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\,S_{ABM}}$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\cancel{(\sqrt{3}-1)}}\cdot\frac{S_{NBC}\cdot\cancel{(\sqrt{3}-1)}}{\cancel{S_{ABM}}\sqrt{2}}\cancel{S_{ABM}}=$$

$$=\frac{S_{NBC}\sqrt{3}}{2}$$

8) Ответ $\geq 10^{99}$ (ни для чисел вида $1\underbrace{00\ldots0}_{9}$ работает ответ понятно почему)

Чистовик 11

$\angle BCA = \alpha$, тогда $\angle BAC = \alpha$; $\angle BMN = \angle ABM +$

сум. $\triangle ABC = 180°$

$+ \angle BAM = 60 - \alpha$; $\angle BNM = \angle MBC + \angle BCN = 75 + \alpha$

по т. синусов: $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin 45 \cos \alpha - \sin \alpha \cos 45}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)$

$\frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin 15 = S_{ABM}$

$$\frac{AB}{BM} = \frac{\sin(120+\alpha)}{\sin(45-\alpha)} = \frac{\cos(30+\alpha)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

~~BN~~ $\frac{AB}{BN} = \frac{\sin(75+\alpha)}{\sin(45-\alpha)}$ $\left(\frac{BN}{AB} = \frac{\sin(45-\alpha)}{\sin(75+\alpha)}\right)$

$\sin(45-\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha$; $\sin(75+\alpha) = \sin 75 \cos\alpha + \sin\alpha \cos 75$

$\Downarrow$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{\cancel{\sin(120+}\cos(30+\alpha)}{\sin(75+\alpha)}$$

$$\frac{1}{2} AB^2 \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{S_{ABM}}{\sin 15} \quad (=)$$

$$\frac{1}{2} AB^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ctg}\,\alpha - 1) \cdot \frac{\sin(45-\alpha)}{\sin 75+\alpha} = \frac{S_{NBC}}{\sin 75°} \quad (\triangle)$$

$$(=)\ AB^2 \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)}$$

$$(\triangle)\ \frac{1}{2} AB^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)^2}{\mathrm{ctg}\,\alpha \sin 75° + \cos 75°}$$

$\Downarrow$

$$\frac{2(\mathrm{ctg}\,\alpha \sin 75 + \cos 75°)}{(\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)(\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)} = \frac{S_{ABM} \sin 75°}{S_{NBC} \sin 15°}$$

$(\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)(\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1) = \mathrm{ctg}^2\alpha\,\sqrt{3} - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha + 1$

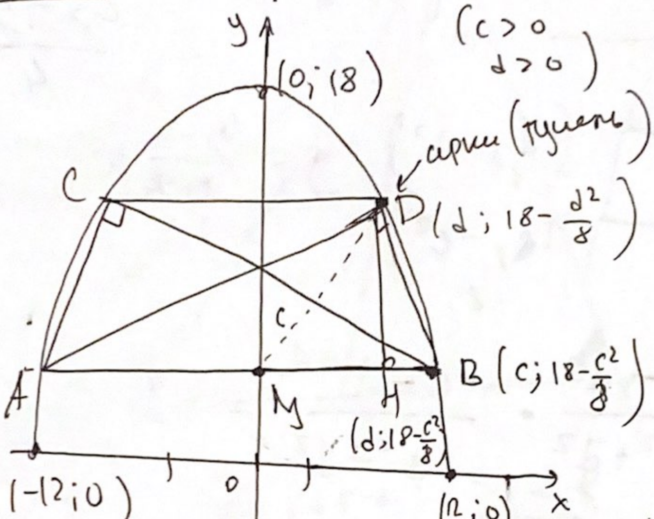
$\mathrm{ctg}\,\alpha = t$

Чистовик 9

по условию верную => противоречие)

Ответ: 190 мин

7)



(c > 0
d > 0)

$y = a - bx^2$

$\begin{cases} 18 = a - b\cdot 0 \\ 0 = a - b\cdot 12^2 \end{cases}$

$a = 18$

$b = \frac{a}{12^2} = \frac{18}{12^2} = \frac{1}{8}$

$\cancel{y = 18 - \frac{1}{8}x^2}$

$(y = 18 - \frac{1}{8}x^2)$

(Введем систему координат как на рисунке) Т.к. ширина 24 => половина $\frac{24}{2} = 12$

$AB \parallel CD$ => ACDB - трап. в силу симм. отно. O_y будет $AH \cap AB$ на O_y и $AC = DB$

пусть $B(c; 18-\frac{c^2}{8}) \Rightarrow A(-c; 18-\frac{c^2}{8})$ (из симметрии), пусть $D(d; 18-\frac{d^2}{8})$

Тогда нас интересует (расстояние между CD и AB будет равно в любой точке расстоянию от точки на CD до AB) ~~расстояние от~~ DH или разница Y координат у D и A (или B)

то есть $\left|18-\frac{d^2}{8} - \left(18-\frac{c^2}{8}\right)\right| = \left|18-\frac{d^2}{8}-18+\frac{c^2}{8}\right| = \frac{1}{8}|c^2-d^2|$

Так же знаем, что $BD \perp AD$, то есть произведение угловых коэфф. BD и AD равно -1

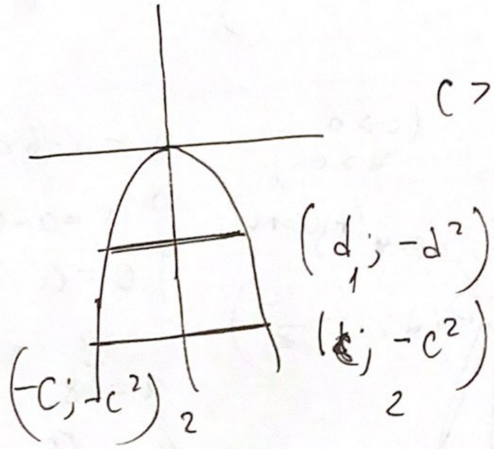
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$$\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$c>0 \quad d>0$$

$$\frac{25-13}{4}$$

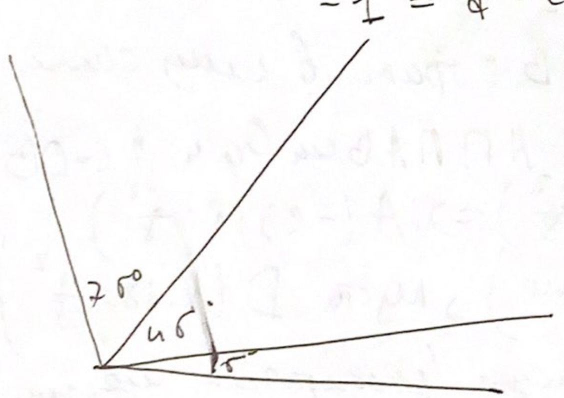


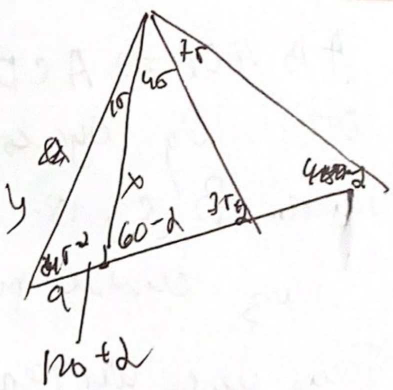
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x$$

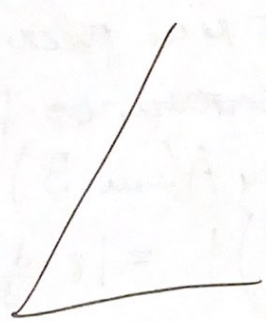
$$\frac{c-d}{-c^2+d^2} \cdot \frac{-c-d}{-c^2+d^2} = -1$$

$$\frac{-\cancel{(c-d)}\cancel{(c+d)}}{\cancel{(d-c)}\cancel{(d+c)}(d^2-c^2)} = -1$$

$$-1 = d^2 - c^2$$





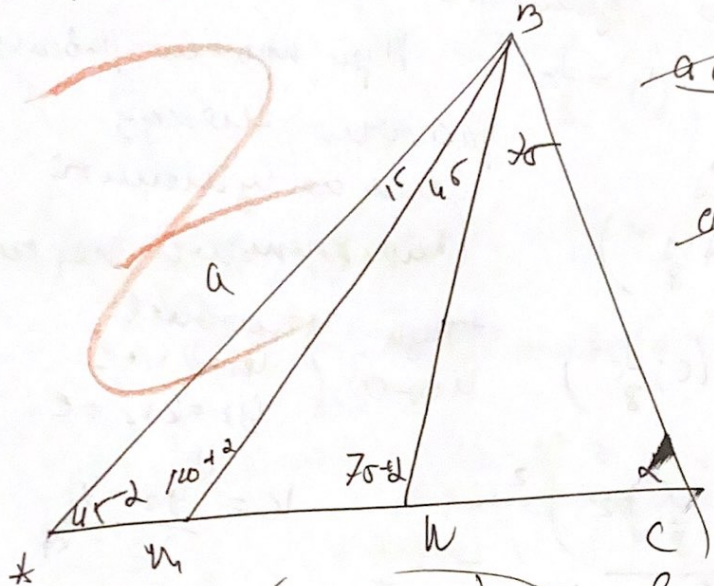


$$\frac{a}{\sin 15} = \frac{x}{\sin(45-\alpha)} = \frac{y}{\sin(120+\alpha)}$$

$$\frac{a \sin(45-\alpha)}{\sin 15} = x$$

$$\frac{a \sin(120+\alpha)}{\sin 15} = y$$

Черновик



$$\frac{\cancel{a a \sin(45-\alpha)}}{\sin(120+\alpha)} \sin 15$$

$$\frac{\cancel{a a} \sin(45-\alpha)^2}{\sin(75+\alpha)} \sin 75$$

$\alpha < 45$

$\sin(75+\alpha)$

$$BM = \frac{\sin(45-\alpha)}{\sin(120+\alpha)} a = b$$

$$BN = \frac{\sin(\cancel{45-\alpha})\, a}{\sin(75+\alpha)}$$

$$BC = \frac{\sin(45-\alpha)\, a}{\sin(\alpha)}$$

$$BC = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$$BM = \frac{b}{\sin(120+\alpha)} \quad BN = \frac{b}{\sin(75+\alpha)}$$

Интересует $\frac{1}{2} \underline{a \cdot BC} \sin 135 =$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

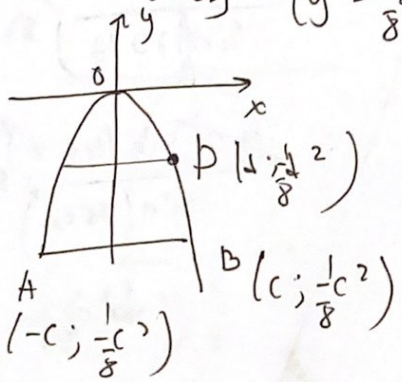
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} a \cdot \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{a^2 \sin(45-\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{2} a^2 \frac{\sin(45-\alpha)}{\sin(120+\alpha)} \cdot \frac{1}{2} \sin 15$$

$$\frac{1}{2} \frac{a^2 \sin(45-\alpha)^2}{\sin(120\alpha)} \cancel{\sin(75+\alpha)} = \sin 75$$

Чистовик 10.

Или можно сдвинуть кривую по оси Oy на 18 вниз ($y = \frac{1}{8}x^2$) При прочих равных расстояние между ними не изменится (параллельный перенос)



тогда условие перп. $\left(\begin{aligned} y_1 &= kx_1 + l \\ y_2 &= kx_2 + l \end{aligned} \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$

$$\frac{\left(-\frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{8}d^2\right)^2}{(c-d)(-c+d)} = -1$$

$$\Downarrow$$

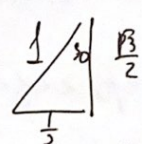
$$\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2 (d-c)^2 (d+c)^2}{\cancel{(d-c)(c+d)}} = -1$$

$$d^2 - c^2 = -8^2$$

Тогда то что нас интересует: $\frac{1}{8}|c^2 - d^2| = \frac{1}{8} \cdot 8^2 = 8$

Ответ: 8.

4) (продолжение)



$\sin 15^\circ = \sin(45-30) = \sin 45 \cos 30 - \sin 30 \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 75^\circ = \sin(45+30) = \sin 45 \cos 30 + \sin 30 \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

5) $\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$ Чистовик 5

$=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$

$=\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c+3\geq 3$

Докажем $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq a+b+c$ (отсюда)

$\Updownarrow$

$a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2\geq abc(a+b+c)=a^2bc+ab^2c+abc^2$

(Известно нер-во $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$, для $x,y,z>0$ и можно доказать КБШ, но считаем известным)

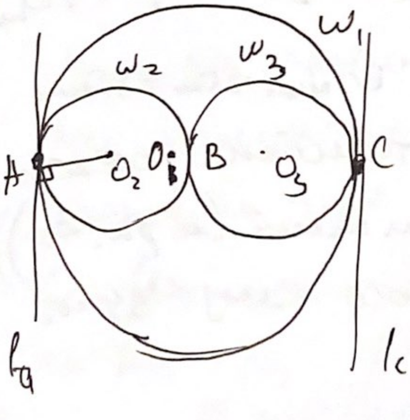
Тогда $(ac)^2+(ab)^2+(bc)^2\geq ac\cdot ab+ac\cdot bc+bc\cdot ab=a^2cb+abc^2+b^2ac$ чтд

Значит при $a=b=c$ достигается равенство 3 и доказано, что меньше нельзя

Ответ: 3

6) Тк на обоих из дуг AC одинаковые скорость и время проезда $\Rightarrow AC=\frac{1}{2}$ дуги окр. $\Rightarrow$

AC-диаметр ω_1 (O_1-цент. ω_1)



l_a и l_c - касат. в A и в C для ω_1 и т.к. AC - диам

$l_a \parallel l_c$.

$O_1A\perp l_a$ $O_1C\perp l_c$

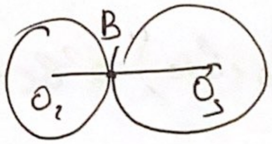
$O_2A\perp l_a \Rightarrow O_2\in AO_1$

$O_3C\perp l_c \Rightarrow O_3\in O_1C \Rightarrow$

Чистовик 6

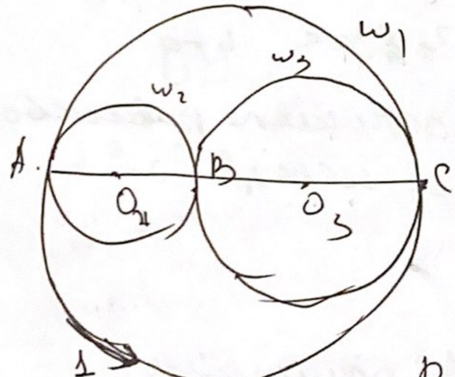
A, O_1, C на одной прямой, (диаметр содер. центр окр.) $O_2 \in AO_1$ $O_3 \in O_1C$ =>

A, O_2, O_1, O_3, C лежат на одной прямой (необязательно в этом порядке), тогда



B так же принадлежит этой прямой, потому что точка касания двух окружностей (касающихся) принадлежит линии центров)

Пусть l - это прямая содержащая A, B, C и центры всех окр.



Длина дуги $\omega_2 = 15 \cdot 2 = 30$

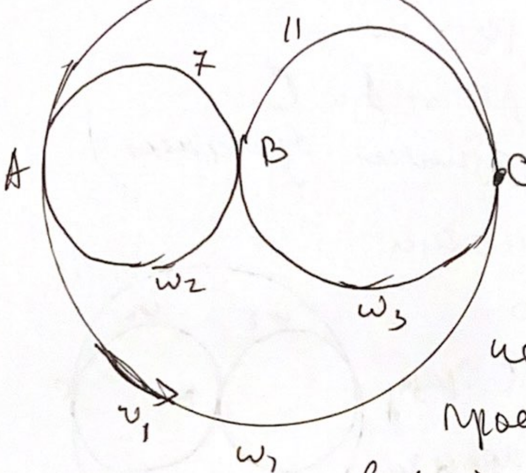
$R_{\omega_2} = \frac{l}{2\pi} = \frac{30}{2 \cdot \pi} = \frac{15}{\pi}$ (мин)

$R_{\omega_3} = \frac{l}{2\pi} = \frac{2 \cdot 25}{2 \cdot \pi} = \frac{25}{\pi}$ (мин)

$R_{\omega_1} = R_{\omega_2} + R_{\omega_3} = \frac{15}{\pi} + \frac{25}{\pi} = \frac{40}{\pi}$ (мин) => длина окр. $\omega_1 = 2R_{\omega_1} \cdot \pi = 2 \cdot \frac{40}{\pi} \cdot \pi = 2 \cdot 40$ (мин) => длины дуг $AC = \frac{l_1}{2} = \frac{2 \cdot 40}{2} = 40$ (мин)

Всего автомобиль катался 60мин+25мин=85мин (85:17). ~~Р~~ Сначала автомобиль поехал по любой из дуг (БОО покажем (см. рис. 1)) и проехал 17мин => осталось ему ездить 85−17=68 мин.

Чистовик 7



Каждый раз когда Автомобиль меняет по дуги ω_1, то время кратно 17 остается (заметим что все время ездить по дугам AC он не может, т.к тогда надо проехать 5 раз => не вернется в A => хотя бы раз проедет по дуги ω_2 или ω_3). $11x + 7y \,\vdots\, 17$ где $x, y \in \mathbb{N}$ или $\{0\}$

и $11x+7y \le 68$, то есть

$11x + 7y = 17$ $x=0$, то $17 \not\vdots\, 7$ $x=1 \Rightarrow 7y=6$ противоречие

$11x + 7y = 34$ $x=0$, то $34 \not\vdots\, 7$ $x=1$, то $23 \not\vdots\, 7$ $x=2$, то $22 \not\vdots\, 7$, $x=3$, то $1 \not\vdots\, 7$ => против.

$11x + 7y = 51$ $x=0$, то $51 \not\vdots\, 7$; $x=1$, то $40 \not\vdots\, 7$; $x=2$, то $29 \not\vdots\, 7$; $x=3$ то $18 \not\vdots\, 7$; $x=4$, то $y=1$ – един. решение; далее x слишком большие чтобы рассм. ($y<0$) будет

$11x + 7y = 68$
$x=0$, то $68 \not\vdots\, 7$
$x=1$, то $\cancel{57} \not\vdots\, 7$
$x=1$, то $46 \not\vdots\, 7$
$x=3$, то $\cancel{35}$ $y=5$
$x=4$, то $24 \not\vdots\, 7$
$x=5$, то $13 \not\vdots\, 7$
$x=6$, то $2 \not\vdots\, 7$

$\Downarrow$

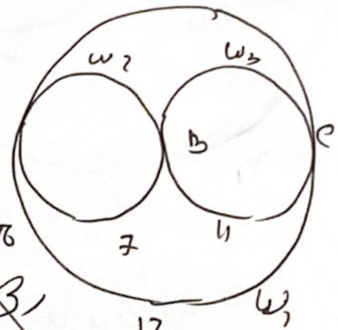
2 решения по дугам BC проехать 4 или 3 раз; и по AB проехать 1 или 5 раз соотв. Причем при проезжании по дуге BC 4 раза надо проехать по дуге AC 1 раз, а в другом случае 0. Рассмотрим случай с по BC 3 раза, а по AB 5 раз: $A \xrightarrow{17} C \xrightarrow{11} B \xrightarrow{11} C \rightarrow B \xrightarrow{7} A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{7} A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{7} A$ такой вариант возможен и автомо-

Чистовик 8

Билль проедет расстояние $1\cdot 40+3\cdot 25+5\cdot 15=$
$=40+75+50+25=190$ км

(А→С это по дуге АС от А к С аналогично с другими буквами)

Теперь рассмотрим когда
по АВ проедет 1, по
ВС 4 раза, а по АС 7 раза,

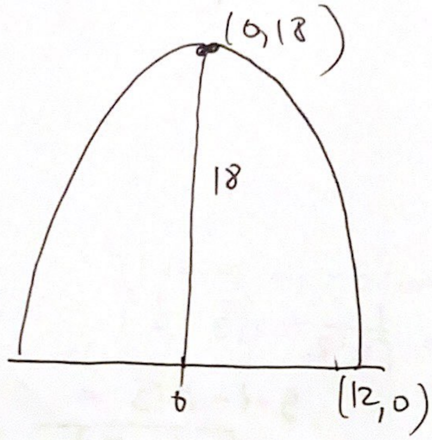


~~Тогда если по дуге проезжать в сумме нечетное число раз, то окажемся в диаметрально против. точке.~~ ~~значит~~ ~~а если четное, то в той же (кол-во раз проедем полный круг - это 2 дуги => при четном в ту же точку, а при нечетном половину). Значит перед- вишня по ω1 он приедет в А, по~~

Т.к. по дуге АВ проедем 1 раз, то если начнем в А, то приедем в В и наоборот.
Если возвращаться будем по дуге АС в А, тогда по дуге из АВ мы поедем от В к А, но вернуться должны по АВ, а проедем 1 раз по ней (дуге) => противоречие, а значит поедем из В в А (фиксируем), а значит должны 1 раз еще проехать по АС, но тогда это заведомо из С в А, но 4 больше проехать не сможем => противоречие (то есть из/в точку А проедем нечетное число раз,

Черновик

$40 + 75 + 35 = 15$



$$\begin{cases} 0 = a - 12^2 b \\ 18 = a \end{cases}$$

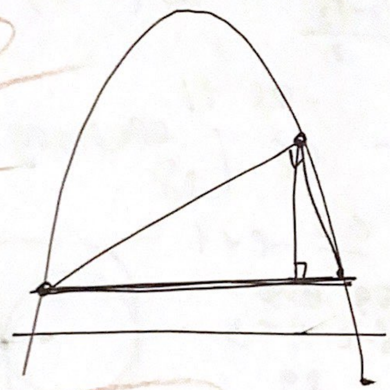
$0 = 18 - 12^2 b$

$0 = 2 - 16 b$

$b = \frac{1}{8}$

$y = 18 - \frac{1}{8} x^2$

$\frac{12 \cdot 12}{8} = \frac{3^2 \cdot 16}{2}$



$MD = c$

$MD^2 = c^2$

$d^2 + \left(18 - \frac{d^2}{8} - 18 + \frac{c^2}{8}\right)^2 = c^2$

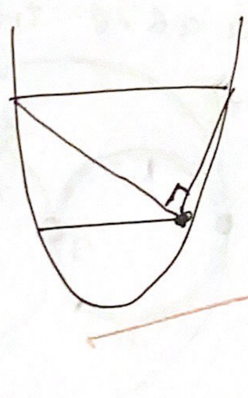
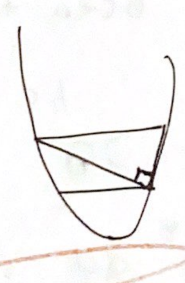
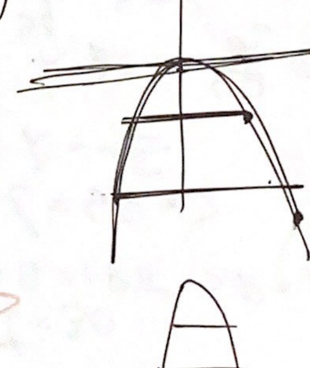
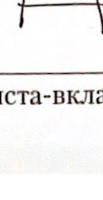
$d^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 (c^2 - d^2)^2 = c^2$

$8^2 d^2 + (c^2 - d^2)^2 = c^2$

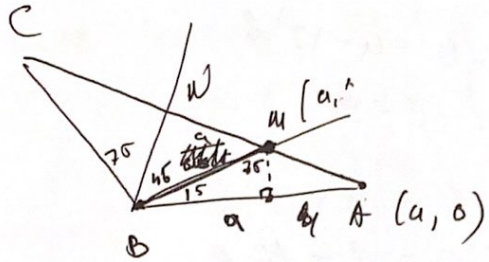
$64 n + m^2 - 2nm + n^2 = m$

$n^2 + 2n(32 - 2m) + m^2 - m = 0$

$D = 4(32 - 2m)$

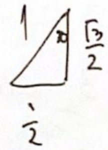





Черновик



$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45 \cos 30 - \sin 30 \cos 45 =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2} (\sqrt{3} - 1)$



$3 + 1 - 2\sqrt{3} =$

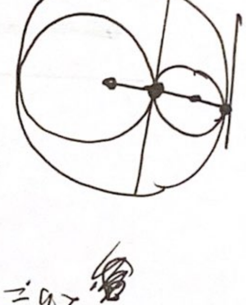
$= \sqrt{2(2-\sqrt{3})}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

~~abc~~

~~$\frac{bc}{a} - a + 1$~~

$\frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ca}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 =$



$= \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c \quad 11 + 3$

$3\sqrt[3]{abc}$ 89 abc - сред. геом. / сум. ...

$ab = \text{const} = p$

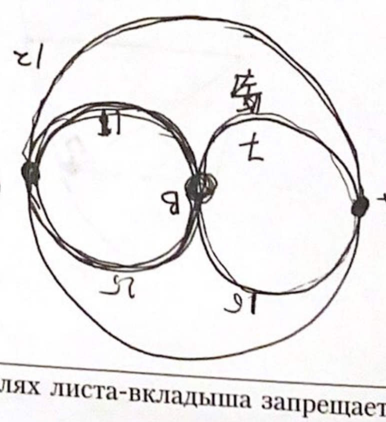
$a + b = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2p}$

$a^2 + b^2$

$a + \frac{p}{a} = \frac{a^2 + p}{a}$ $\quad \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \quad a + b + c$

$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \quad abc(a+b+c)$

$bc \cdot ca + ca \cdot ab + b^2 \quad t + t + 11$



$2R\pi = \ell$

AB: $\ell = 30$

$30 = 2R\pi \Rightarrow R = \frac{15}{\pi}$

BC: $\ell = 50 \Rightarrow$

$R = \frac{25}{\pi}$