

0 348433 850008
34-84-33-85
(37.2)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“ по математике
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Древова Ярослава Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

34-84-33-85
(37.2)

Черновик

$$4! + (C_{2, A^4})$$

$$C_{3, 2} \cdot \frac{4!}{2}$$

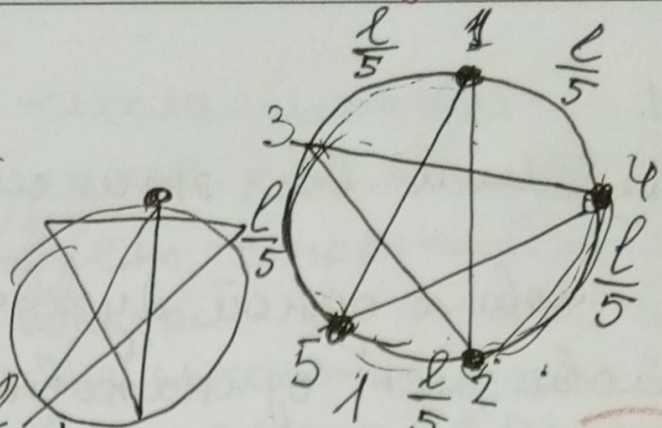
$$\frac{3 \cdot 4!}{2} + 4!$$

$$\frac{l}{5} \quad t$$

$$\frac{3+l}{5} \quad 3t$$

$$\frac{3+t}{5} \quad 6t$$

$$\frac{9+t}{5} \quad 9t$$



$$3 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2$$

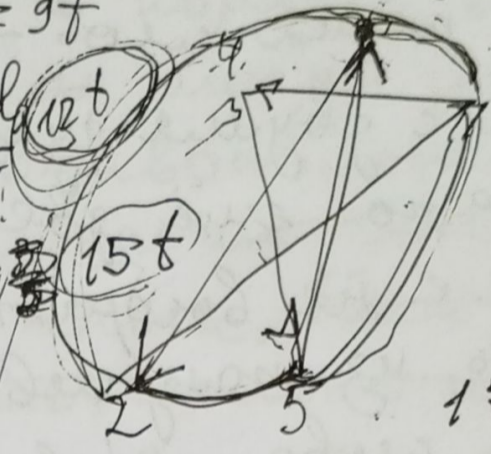
$$4 \cdot 3 \cdot (2+3)$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5$$



$$\frac{12+t}{5} \quad 12t$$

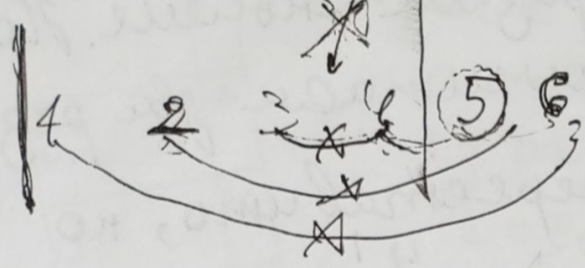
$$\frac{3+l}{5} \quad 3t$$



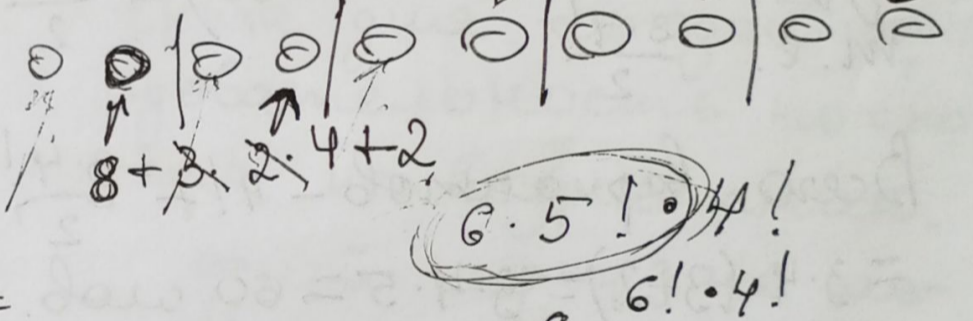
$$531 \quad 114 \quad 171 \quad 360$$

$$9 \cdot 59 - 3 \cdot 38 - 57$$

$$\underline{\quad \quad \quad 12}$$



$$\frac{360}{12} = 30$$



$$X_n + am =$$

$$3 \cdot 38 + 6n = l$$

$$X_n - am$$

$$9n - 3m$$

$$9n + 3m = l$$

$$9 \cdot 19 + 9m$$

$$m+n = 38$$

$$(m+n = 38)$$

$$m+m = 19$$

$$9 \cdot 40 - 6m_1 = l$$

$$9(59-n) + 3m_1 = l \quad 3 \cdot 38 + 6m_1 + 19 \cdot 6$$

$$12m_1 + 6 \cdot 38 = 9 \cdot 40$$

$$59 - n + m_1 = 40$$

$$n - m_1 = 19$$

$$n = (m_1 + 19)$$

$$9 \cdot 59 - 9m_1 - 19 \cdot 9 + 3m_1 = l$$

№1.

Разделим все эти слова на 2 типа:

1. Слова с одной буквой "А". Ясно, в таком слове нет одинаковых букв, поэтому кол-во таких слов - $4!$.
2. Слова с двумя буквами "А". Нужно подобрать ещё две буквы из оставшихся, т.е. не выбрать одну - 3 варианта. Теперь из полученных букв составим слово - $4!$ варианта - если считать все буквы различными. Но так как каждое слово мы посчитали два раза (буквы "А" можно переставить, но это будет то же слово) - $\frac{4!}{2}$ варианта, т.е. $\frac{3 \cdot 4!}{2}$.

$$\text{Всего вариантов} - 4! + \frac{3 \cdot 4!}{2} = 3 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \cdot (3+2) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ слов.}$$

Ответ: 60 слов.

(всего в слове две буквы "А", поэтому хотя бы одна из 4 букв точно "А")

№2.

Ясно, что из любого числа можно перейти в любое другое кроме противоположного (не соседствует с противоположным только). Таким образом в этой возрастающей последовательности нам важно то, что числа идут в порядке возрастания, а также то, что не могут идти подряд числа из пары противоположных. Значит разобьём наши числа на пары противоположных. Нам достаточно только понять, сколько наборов чисел со стороны условия, а дальше числа. Рассмотрим два варианта последовательности:

1. Все числа из разных пар. Тогда здесь будет $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ последовательностей - два варианта для каждой пары. Дальше последовательность можно восстанавливать по возрастанию.
2. Два числа из одной пары (3 не может). Они не могут идти подряд, а значит мы должны подобрать оставшиеся числа между ними - так можно сделать только для пар 1-6 (между ними 4 числа - 4 варианта), 2-5 (между ними 2 числа - 2 варианта), с 3-4 не получится, т.к. между ними нельзя подобрать числа (всего 3 пары). Всего получаем $8 + 4 + 2 = 14$ последовательностей.

Ответ: 14.

34-84-33-85

(37.2)

№4. Пусть он скатала проиёл n шагов китовом,
 m — стирой. И.к. $m+n=Z=38$, то $m=38-n$.

Тогда потом он проиёл $R-n=59-n$ шагов
 китовом. Дальше разберём два варианта:
 (л — длина удава, m_1 — кол-во шагов стирой
 потом)

$$1. \begin{cases} m=38-n \\ l = \frac{x}{y}m + (38-n)X \\ X=9 \\ Y=3 \\ l = \frac{x}{y}m_1 + (59-n)X \\ T=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=38-n \\ l = 3m + (38-n)9 \\ l = 3m_1 + (59-n)9 \\ T = m_1 + 59-n = 40 \\ \Rightarrow n - m_1 = 19 \Rightarrow m_1 = n - 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n-19) \cdot 3 + (59-n) \cdot 9 = l \\ 3 \cdot (38-n) + 9n = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 57 + 9 \cdot 59 - 9n = \\ = 3 \cdot 38 - 3n + 9n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 59 - 57 - 6n = 3 \cdot 38 + 6n \Rightarrow 9 \cdot 59 - 57 - 3 \cdot 38 = 12n,$$

но тогда $n \notin \mathbb{Z}$, т.к. $9 \cdot 59 - 57 - 3 \cdot 38 \div 4$

$$9 \cdot 59 = 1 \cdot 3 = 3, 57 = 1, 3 \cdot 38 = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$n = \frac{9 \cdot 59 - 57 - 3 \cdot 38}{4} = 30 \Rightarrow l = 3 \cdot (38 - 30) + 9 \cdot 30 =$$

$$= 3 \cdot 8 + 270 = 294 \text{ см}$$

2. Всё то же, но $m_1 = n - 18$ ($59 - 41$)

$$\begin{cases} l = 3(n-18) + (59-n) \cdot 9 \\ l = 3 \cdot (38-n) + 9n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 54 + 59 \cdot 9 - 9n = \\ = 3 \cdot 38 - 3n + 9n \end{cases} \quad | : 3$$

$$\Rightarrow 59 \cdot 9 - n - 18 + 59 \cdot 3 - 3n = 38 - n + 3n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 59 \cdot 3 - 18 - 38 = 4n = (3 \cdot 59 - 56) \div 4 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}, \text{ чего}$$

не можем добиться условиями.

34-84-33-85
(37.2)

№7.

$$A = \frac{\overbrace{111 \dots 1110}^{2024}}{\overbrace{111 \dots 111}^{2024}} = 1 - \frac{1}{\overbrace{111 \dots 111}^{2024}}$$

$$B = \frac{\overbrace{222 \dots 221}^{2024}}{\overbrace{222 \dots 223}^{2024}} = 1 - \frac{2}{\overbrace{222 \dots 223}^{2024}} = 1 - \frac{2 \cdot (1)}{\overbrace{2 \cdot 111 \dots 11,5}^{2024}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\overbrace{111 \dots 11,5}^{2024}}$$

$$C = \frac{\overbrace{333 \dots 331}^{2024}}{\overbrace{333 \dots 334}^{2024}} = 1 - \frac{3}{\overbrace{333 \dots 334}^{2024}} = 1 - \frac{3 \cdot 1}{\overbrace{3 \cdot (111 \dots 11 + \frac{1}{3})}^{2024}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\overbrace{111 \dots 11 + \frac{1}{3}}^{2024}}$$

$$\frac{1}{\overbrace{11 \dots 11}^{2024}} > \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11,5}^{2024}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\overbrace{111 \dots 11}^{2024}} > \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11 + \frac{1}{3}}^{2024}},$$

$$\frac{1}{\overbrace{111 \dots 11}^{2024}} > \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11 + \frac{1}{3}}^{2024}} > \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11 + \frac{1}{2}}^{2024}}$$

$$\text{т.к. } \overbrace{111 \dots 111}^{2024} < \overbrace{111 \dots 111}^{2024} + \frac{1}{3} < \overbrace{111 \dots 111}^{2024} + \frac{1}{2}$$

$$(3 > 2 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3})$$

$$\text{Значит } 1 - \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11}^{2024}} < 1 - \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11 + \frac{1}{3}}^{2024}} < 1 - \frac{1}{\overbrace{11 \dots 11 + \frac{1}{2}}^{2024}}$$

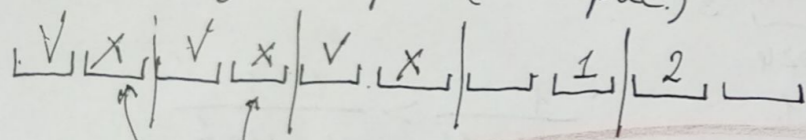
$$\Rightarrow A < C < B$$

Ответ: A, C, B.

№6.

Сначала рассадили девочек.

Разобьём весь ряд на пары соседних мест. Ясно, что в каждой сидит не более одной девочки, но при этом пар $\frac{10}{2} = 5 =$ кол-во девочек, а значит в каждой хотя бы одна - иначе две упадут в одну пару. Одна из них точно сидит в средней паре. Поэтому можно определять места девочек ещё в двух парах (см. рис.)



здесь
теперь быть
не может

Осталось определить места ещё в двух парах - 4 варианта расстановки девочек в них. Но один вариант не подходит, когда они стоят на местах 1 и 2. - 3 варианта. Этот раз "центральная" девочка может сидеть в другом месте - та же самая ситуация, но теперь 6 вариантов расстановки девочек. До этого момента мы считали, что все девочки одинаковые, поэтому кол-во расстановок девочек - $5 \cdot 5! = 6!$. Теперь рассадили мальчиков и учтём их мест - $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ варианта, всего $6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (осталось 5 мест). +

№3.

Пусть прошло время t , l - длина одного круга. Тогда скорость первого (в мин) - $\frac{3l}{5}$, второго - $\frac{6l}{5}$, третьего - $\frac{9l}{5}$, четвёртого - $\frac{12l}{5}$, пятого - l . Тогда прошли они $\frac{3tl}{5}$, $\frac{6tl}{5}$... tl . Заметим, что разность расстояний между любыми двумя можно представить как целое кол-во $\frac{l}{5}$ (кол-во ~~прошедших~~ скальков-то промежутков + сколько-то кругов). Но $3 \cdot \frac{6tl}{5} - \frac{3tl}{5} = \frac{3tl}{5} = 3t \cdot \frac{l}{5}$, $tl - \frac{3tl}{5} = 12t \cdot \frac{l}{5}$