0 544747 540004

54-47-47-54
(38.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дюндина Максима Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Дм

54-47-47-54
(38.8)

черновик

75

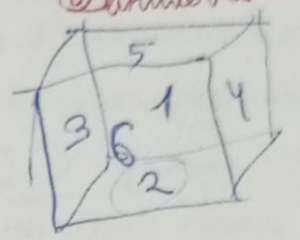
Семьдесят пять

Галочкина

Данилевская

$\left(\frac{1}{m}-2\right)=x_1 \quad x_2=\left(\frac{1}{n}-2\right)$

$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$



$\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2=\cancel{b}$

$\cancel{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=b} \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=-a$

$\cancel{\left(\frac{1}{m}-2\right)+\frac{1}{n}} \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=4-a$

$\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)=b=$

$\boxed{\frac{1}{nm}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4=b}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ – целое

$\frac{1}{nm}$ – целое $\quad n,m=\pm1$

1: 156, 146, 136, 145, 135

2: 235, 236, 245, 246

11

11

4: 456

3: 356

5: x

6: x

$\frac{1}{nm}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\cancel{-4}+a\cancel{+4}=b$

$\frac{1}{nm} \quad a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n} \quad a+b=4+3=7$

$n=1 \quad m=-1 \quad a=2 \quad b=1$

$x^2+2x+1= \quad n=1 \quad m=-1$

$\cancel{x_1x_2=b}=4-4=0 \quad n=-1 \quad m=1$

$x_1=$ $\quad a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=4$

$b=-1+4=3$

$x^2+4x+3=0 \quad x_1,x_2=\frac{-4\pm2}{2}=-2\pm1 \quad -1,-3$

$D=16-12=4$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

$$\frac{bc-a^2+a}{a}+\frac{ca-b^2+b}{b}+\frac{ab-c^2+c}{c}$$

$$=\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$$

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$a\geq b\geq c$ $\quad a=1\ b=1\ c=1$

$ab\geq ac\geq bc$ $\quad 3-3+3=3$ min

$\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$ $\quad x>10 \quad x>5$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

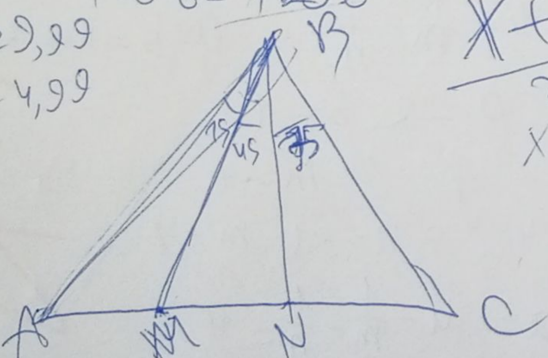
$120\cdot6=720$

$x+5\geq 9{,}99$

$x\geq 4{,}99$

$\frac{x+5}{2}=x$

$x=5$



f(x) =

$x>5$ $\quad x+5>10$

9,9765 | 2

4,98

9,625 / 2 = 4,8125

9,8125 / 2 = 4,90625

9,90625 / 2 = 4,953125

9,953125 / 2 = 4,9765...

54-47-47-54 (38.8)

Черновик.

1 га $+25=60+25=85$ мин

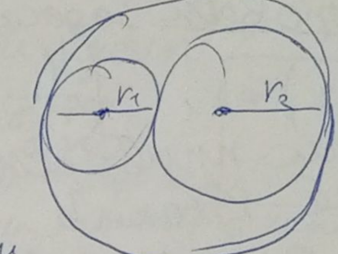
15м 7

25км 11

40 17м

$L=2\pi r_1$ $\quad \frac{1}{2}L=\pi r_1=15м$

$\pi r_2=25км$ $\quad AC=\pi(r_1+r_2)=40км$



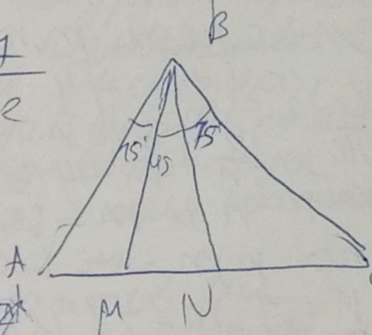
$7x_1+11x_2+17x_3=85$

$x_1\equiv_2 x_2+x_3$

$2x_1+x_2+2x_3\equiv_5 0$

$2(x_1+x_3)+x_2\equiv_5 0$

$4x_2+3x_3\equiv_7 1$



$x_3=0,1,2,3,4,5$ $\quad x_3=1$

$4x_2+0\equiv_7 1$ $\quad 4x_2+3\equiv_7 1$

$4x_2\equiv_7 5$

$x_2=2, 3, 9$ $\quad x_2=3, 10$

$x_2=2\ x_3=0$ $\quad 33+17+7x_1=85$

$7x_1+22=85$ $\quad x_1=35$

$7x_1=63$ $\quad \boxed{5\ 3\ 1}$

$x_1=9$ $\quad x_3=2$ $\quad 4x_2+6\equiv_7 1$

$x_3=2$ $\quad 4x_2\equiv_7 2$ $\quad 7x_1+44+34=85$

$x_2=4$ $\quad x_1=1\ x_2=4\ x_3=2$

$x_3=3$ $\quad 4x_2+9\equiv_7 1 \Rightarrow 4x_2\equiv_7 6$

$x_2=5, 12$

$x_3=4$ $\quad 4x_2+12\equiv_7 1\Rightarrow 4x_2\equiv_2 3$

$x_2=6, 13$

Чистовик Задача 1.

$\left(\frac{1}{m}-2\right)=x_1$ $\left(\frac{1}{n}-2\right)=x_2$ — это корни приведенного квадрат трех-члена x^2+ax+b

По теореме Виета:

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=-a \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=4-a$ Получаем от сюда т.к 4 и a - целое то $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ - целое.

$x_1x_2=\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)=\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4=b$, т.к $\frac{2}{n}+\frac{2}{m}+4$ целое и b целое то и $\frac{1}{mn}$ целое

т.к n и m - целые числа и различные то $nm=\pm 1$ а т.к они различные то[*]

$n=1$ $m=-1$ или $n=-1$ $m=1$ (других вариантов нет)

Заметим что равенство $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=-a$

$\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4=b$ оно симметрично отн n, m Значит в обоих вариантах сумма $a+b$ будет одинаковая.

Подставим 1 вариант

$n=1$ $m=1$

$a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$, $b=\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4$

$a+b=8+\frac{1}{mn}-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}=8-1+3-3=7$

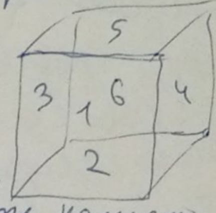
Получаем, что сумма $a+b=7$ и больше ~~вариантов~~ значений этой суммы других нет.

Ответ: $a+b=7$ (других вариантов нет сверху это доказано)

[*] (Если бы n или $m \neq \pm 1$ то $|n|>1$ или $|m|>1$ а значит $\left|\frac{1}{mn}\right|<1$ и будет нецелым противоречие, значит $n,m=\pm 1$)

Чистовик Задача 2.

рис 1



У нас есть игральный кубик. Взаимное расположение цифр на кубике то есть основ оно всегда остается одним и тем же, рассмотрим рис 1, если поменять например пары цифр местами количество вариантов не изменится т.к ~~Если мы~~ у нас будет тоже самое только надо на другие грани повернуть кубик, но общ количество вариантов не изменится. Мы можем получить тот же кубик при другой расстановки цифр т.к у каждой цифры все соседи все кроме $7-x$ Как бы не меняли расстановк соседи останутся такие же.

Рассмотрим сколько вариантов мы можем получить на кубике представленным на рис 1.

Пусть изначально он попал на цифру x.

$X=1$. Если второй ход это на грань 2:

123; 124, 126

Если на грань 3:

135; 136

если на грань 4 то. (2 ходом)

145; 146

если на грань 5 то:

156

Если первый ход это грань 2 то:

2 ход на грани: 1; 3; 6; 4

если 1: X т.к 21 не возраст

если 3: 235; 236

если 6: X т.к 3 цифра точно меньше 6.

если 4: 245; 246

Если первый ход на грань 3 то:

вторым ходом на 1 и 2 не сходить

если на 5 то: 356

если на 6 то 3 ход в цифра будет меньше 6.

Продолжение задачи 2. Шестович

Если первый ход на грань 4 то у нас есть единств вариант это 456 т.к всего 2 цифоры ~~..~~ больше 4 и нам надо их 2.

При первом ходу на 5/6 у нас нет последовательностей т.к $5 x_1 x_2$ $x_2 > 5+1$ а у нас max 6.

При 6 аналогично как и с 5.

Получаем проведя перебор:

123; 124; 126; 135; 136; 145; 146; 156; 235; 236; 245; 246; 356; 456. Всего вариантов 14

Ответ: всего вариантов на кубике 14

Мы доказали, что при любом расположении очков на кубике ответ будет всегда один и тот же.

Задача 3 Шестович

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

Преобразуем наше выражение

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3=\min$ нужно найти мин значение:

Докажем что $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

Для этого воспользуемся транс неравенством т.к $a, b, c>0$ то мы можем им пользоватся

Пусть $a \geq b \geq c$ тогда $ab \geq ac \geq bc$ и $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$

Возьмем 2 набора:

$ab \geq ac \geq bc$

$\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$

Тогда заметим что $\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}$ это max ~~пере~~ сумма попарных произведений, а $a+b+c$ нет. Значит $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

Из этого следует что

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c\geq 0$ т.к нам надо min то min будет достигаться ~~при~~ когда это неравенство равно 0.

Возьмем набор $a=b=c=1$

Тогда: $1+1+1-1-1-1+3=3$ Получаем, что минимальное значение выражение ~~достига-ется при~~ равно 3. Докажем, что меньше нельзя.

Ответ: $\boxed{3}$ мин значение выражение

Задача 4. Чистовик стр 5 из 9

У нас есть 5 девочек, 3 мальчика и учительница.
Поймём сколько вариантов для рассадки только девочек. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Пусть пока мы их не отличаем.
Есть вариант 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Заметим, что если какая то девочка перейдёт на место вправо, то все остальные девочки правее её перейдут на одно место в право т.к. между любыми двумя девочками мест ≥ 1. Если же какая-то девочка перешла на более чем 1 место вправо, то:
$1\ 2\ 3 \ldots x \ldots 10$ девочек правее $\frac{10-x}{2}$ с округлением вниз то есть $\frac{9-x}{2}$. А если девочка x перешла на 2 или более мест то:
мест левее будет $10-x-2=8-x$ т.к. девочек $\frac{9-x}{2}$ то мест правее должно быть хотя бы $\frac{9-x}{2}\cdot 2=9-x$
$9-x>8-x$ противоречие. В аналогии доказываем если девочка из нашего первоначального варианта пойдёт влево:
Получаем что всего $5+1=6$ вариантов расстановок девочек, если мы их не отличаем. Если же мы их отличаем то ответ будет: $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ Это только девочки
оставшихся участников 4, а мест 5 тогда вариантов их рассадить будет: $k=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$
Значит теперь перемножаем комбинации и получим: Всего вариантов:
$S=6\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2$

Ответ: $\boxed{6\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2}$ либо это $6\cdot f(5)^2$ $f(x)$ - это факториал x
(если мы их не отличаем)
Всего вариантов девочек $5+1=6$ т.к. (из начальной если от x девочек считая справа перейти на 1 место правее, доказали, что больше вариантов нет.

Задача 6. Чистовик стр 6 из 9

а) Пусть в какой то момент в кувшин залили 5 литров воды и потом выпили половину и получили снова такой же объем.
$\frac{x+5}{2}=x \Rightarrow x=5$ Max Минимальный объем кувшина $5+5=10$ литров (Теоретически 10 литров в кувшине никогда не будет.)
~~Заметим, что~~ Докажем, что 10 хватает.
Пусть в какой то момент ~~количество~~ объем воды в кувшине превысил 10 литров тогда рассмотрим 2 шага назад.
Пусть $x+5>10 \Rightarrow x>5$ ~~Ход назад~~ День назад
У нас было в 2 раза больше воды: $2x>10$
Значит мы еще день назад получили больше 10 литров, это противоречит нашему высказыванию. Значит 10 литров точно хватит.
Докажем, что меньше 10 литров объем кувшина брать нельзя вода выльется.
Пусть $V<10$ литров - объем кувшина
Заметим что $\frac{x+5}{2}=x$ Из этого следует что ~~объем~~ объем будет меньше 10, то объем воды будет увеличиваться т.к. $\frac{x+5}{2}$
$x+5<\frac{x+5}{2}+5$ т.к. $2x<x+5$ т.к. $x<5$
Значит объем меньше 10 литров брать нельзя. $V_{min}=10$ литров
И в один момент достигнет отметки V дальше вода выльется т.к. объем увеличивается.

б) Давайте проделаем операции вручную и найдем на какой день объем станет ~~больше~~ не менее 99,9%. (Заметим что мы будем убирать все цифры после запятой, т.к. они уже никак не повлияют на ~~цифр~~ разряд единиц и 2 разряда после запятой

день	объем
1	3,5
2	4,25
3	4,62
4	4,81
5	4,90
6	4,95
7	4,97
8	4,98
9	4,99

Нам нужно получить в объем $x \geq 4{,}99$ т.к когда прибавим 5 литров получим $10 \cdot 0{,}999 = 9{,}99$ литр

$\frac{3{,}5+5}{2} = 4{,}25$

$\frac{4{,}25+5}{2} = 4{,}625 \approx 4{,}62$

$\frac{4{,}62+5}{2} = 4{,}81$

$\frac{4{,}81+5}{2} = 4{,}90$

$\frac{4{,}90+5}{2} = 4{,}95$

$\frac{4{,}95+5}{2} = 4{,}97$

$\frac{4{,}97+5}{2} = 4{,}98$

$\frac{4{,}98+5}{2} = 4{,}99$

Получаем, что на 9 день будет 9,99... литров заполнен кувшин.

Ответ: а) 10 литров минимальный объем кувшина, чтобы он никогда не мог наполнится при данных условиях.

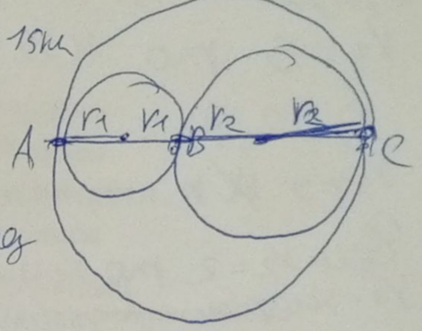
б) на 9 день кувшин будет заполнен не менее, чем на 99,9% от всего объема.

Чистовик

Неверно т.к. на 10 день

Задача 7. Чистовик

Мы знаем, что длина дуги $\overset{\frown}{AB} = 15$ км, длина дуги $\overset{\frown}{BC} = 25$ км



$\overset{\frown}{AB} = \frac{L}{2} = \frac{2\pi r_1}{2} = \pi r_1$

длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ формула через радиус.

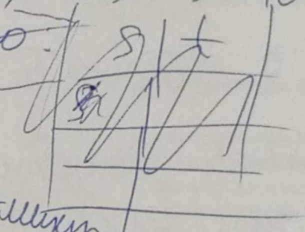
$\overset{\frown}{BC} = \frac{L}{2} = \frac{2\pi r_2}{2} = \pi r_2$ — длина дуги BC через формулу с радиусом.

Тогда $\overset{\frown}{AC} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$

$R = \frac{2r_1+2r_2}{2} = r_1 + r_2$ — радиус окружности

$\overset{\frown}{AC} = \pi(r_1+r_2) = 15+25 = 40$ км.

~~Получаем, что~~



$S_{\overset{\frown}{AB}} = 15$ км за 7 минут

$S_{\overset{\frown}{BC}} = 25$ км за 11 минут

$S_{\overset{\frown}{AC}} = 40$ км за 17 минут

Пусть x_1 — это сколько раз он проехал по дуги AB, x_2 — по дуге BC, а x_3 — по дуге AC.

$\cancel{x_1 \cdot 15}$ $x_1 \cdot 7 + x_2 \cdot 11 + x_3 \cdot 17 = 85$ минут $= 60+25$

Рассмотрим это по модулю 7

$4x_2 + 3x_3 \underset{7}{\equiv} 1$

$x_3 < 5$ т.к $x_3 \geq 5$ то $5 \cdot 17 = 85$ мин но он тогда не будет в точке A т.к x_3 — нечетно а x_1 и x_2 — он не ехал по дугам AB и BC при $x_3 > 5$ $x_3 \cdot 17 > 85$ противоречие

Переберем варианты когда x_3 это одн.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Продолжение задачи 7 Шестовик. стр 9 из 9

$x_3 = 6$ то $4x_2 \equiv_7 1$ т.к 4 и 7 взаимопросты то будут подходить числа с промежутком 7.

$x_2 = 2, 9 \ldots$

$x_2 \geq 9$ ~~не~~ т.к $x_2 \cdot 11 > 85$ при $x_2 \geq 9$

Если $x_2 = 2$ то $x_1 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 85 \Rightarrow x_1 = 9$ но тогда x_1 - нечетно А значит мы не попадем в точку А т.к x_2 - четное и мы сделаем ~~А~~ оборота вокруг ~~...~~ окружности BC но x_1 все равно должно быть четно, ~~что~~ б противоречие.

~~Значит~~

$x_3 = 1$ то $4x_2 + 3 \equiv_7 1 \Rightarrow 4x_2 \equiv_7 5$

$x_2 = 3, 10 \ldots$ $x_2 \geq 10$ не подходит см выше.

$x_2 = 3$ тогда ~~$x_1 = 9$ Получаем $5 \cdot 7 + 3$~~

$7x_1 + 33 + 17 = 85 \Rightarrow x_1 = 5$ Заметим что: Этот вариант подходит если мы вначале 5 раз ~~сначала~~ проехали по дуге AB потом 3 раза по дуге BC и последний раза по дуге AC Вполне понятно поправку, что от перестановки действий результат не поменяется Если подряд x_1 раз по дуге AB, x_2 раз по дуге BC и x_3 раз по дуге AC не подходит то в каком бы порядке мы не делали все равно не подойдет.

$x_3 = 2$ то $4x_2 + 6 \equiv_7 1 \Rightarrow 4x_2 \equiv_7 2$

$S = \cancel{5 \cdot 7 + 3 \cdot 11}$

$S = 5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 40 = 190$ км

$x_2 = 4, 11 \ldots$ $x_2 \geq 11$ не подходит

$x_2 = 4$ Получаем: $x_1 \cdot 7 + 44 + 34 = 85 \Rightarrow x_1 = 1$ Заметим что не подходит т.к в подряд проехать не получается

Если $x_3 = 3$ то $4x_2 + 9 \equiv_7 1 \Rightarrow x_2 = 5, 12 \ldots$ Но при $x_2 = 5$ Получаем что $3 \cdot 17 + 55 > 85$ противоречие. Значит единств ответ это 5; 3; 1

Ответ: $S = 190$ км, больше вариантов нет. стр