0 371190 180002

37-11-90-18
(38.9)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Зайцевой Варвары Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Задача 4. 70 (семьдесят) [illegible] = [illegible]

<u>чистовик (1стр.)</u>

Т.к. нам важно как сидят девочки, но неважно как сидят мальчики, мы можем посчитать кол-во рассадок девочек и ~~[illegible]~~ мальчиков отдельно.

Тогда девочек можно рассадить такими способами:

О _ О _ О _ О _ О _ (между любыми двумя ровно

_ О _ О _ О _ О _ О   1 сиденье)

~~[illegible]~~ Если между какими-то двумя девочками будет 2 сиденья, то такая пара единственная (иначе $10 - \cancel{\ }7 = 3$ места на двух девочек, но с одной стороны уже есть девочка) а значит это еще 4 способа. Больше 2 сидений между соседними девочками быть не может, т.к. оставшиеся 3 девочки должны занимать минимум 6 сидений с учетом условия, но $10 - 6 = 4$ ~~[illegible]~~ сидений, $4 - 2 = 2$ - максимальное кол-во сидений между двумя ~~[illegible]~~ соседними девочками. Итак, для девочек есть 6 рассадок, а с учетом пересадок $6 \cdot 5!$.

Для оставшихся людей будет 5 сидений, на которые можно их посадить в любом порядке, т.е. $5!$ способов.

Итого, для девочек $6 \cdot 5!$ способов, для ост-х $5!$ способов.

Тогда всего $6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120^2 = 6 \cdot 14400 = 86400$ способов.

Ответ: 86400.

Чистовик (2 стр.)

Задача 2.

Рассмотрим все варианты первого выпавшего числа и кол-во нужных послед-тей в таком случае.

1) Если выпало 5 или 6, то возрастающих послед-тей не будет, т.к. 6 - максимальное, а больше 5 только 6, значит возраст. послед-ти из трех чисел не получится.

2) Если выпало 4: только один вариант - 456.

3) Если выпало 3: три варианта - 345, 346, 356, но т.к. 3+4=7, эти числа на противоположных гранях кубика, а значит эти варианты не подходят, тогда только один возможный случай - 356.

4) Выпало 2: возр-е послед-ти: 234, 235, 236, 245, 246, 256.

Но подряд не могут идти числа 2 и 5, 3 и 4, т.к. их сумма равна 7, т.е. подходит только 4 варианта: 235, 236, 245, 246.

5) Выпало 1: возр-е послед-ти - 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156. Но рядом не могут быть 2 и 5, 3 и 4 (т.к. 2+5=7, 3+4=7), значит подходит только 8 вариантов: 123, 124, 126, 135, 136, 145, 146, 156.

Итак, всего возможных последов-ей

1+1+4+8 = 14.

Ответ: 14.

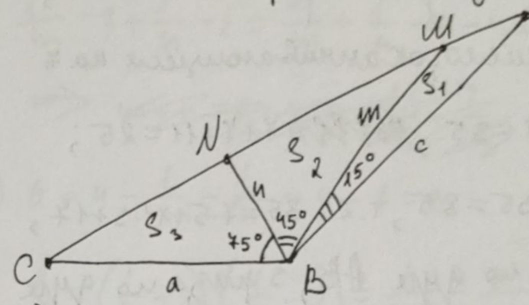
37-11-90-18 (38.9)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик (3 стр.)

Задача 5.

1) Т.к. $\angle MBN > \angle ABM$, то если т. M между C и N, то т. N лежит на продолжении AC за т. A, а по условию она на стороне AC, значит т. M между A и N.



2) Пусть $AB=c$, $CB=a$, $BN=n$, $BM=m$,

$S_{ABM}=S_1$, $S_{NBM}=S_2$, $S_{CBN}=S_3$

3) $S_1=\frac{1}{2}\cdot\sin 15°\cdot mc=\frac{\sqrt3-1}{4\sqrt2}mc$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot\sin 45°\cdot mn=\frac{\sqrt2}{4}mn$

$S_3=\frac{1}{2}\cdot\sin 75°\cdot an=\frac{\sqrt3+1}{4\sqrt2}an$

$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cdot\cos 30°-\sin 30°\cdot\cos 45°=\frac{\sqrt2\cdot\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$

$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\frac{\sqrt2\cdot\sqrt3}{4}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}$

4) $2(S_1+S_3)=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}mc+\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}an=10$

$4\cdot S_1\cdot S_3=\frac{(\sqrt3-1)mc\cdot(\sqrt3+1)an}{8}=\frac{mc\cdot an}{4}=12$, $mcan=48$

5) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sin(\overset{135°}{\cancel{\ldots}})\cdot ac=\frac{\sqrt2}{4}ac=\cancel{\frac{ac}{2\sqrt2}}=\frac{1}{2\sqrt2}ac$

$\sin 135° = \sin 45°$

$S_1+S_2+S_3=5+\frac{1}{2\sqrt2}mn$

$\frac{1}{2\sqrt2}ac=5+\frac{1}{2\sqrt2}mn$, $\frac{1}{2\sqrt2}(ac-mn)=5$, $ac-mn=10\sqrt2$,

$mn=ac-10\sqrt2$

6) $ac(ac-10\sqrt2)=48$

$(ac)^2-10\sqrt2 ac-48=0$

$\left[\begin{array}{l} ac=12\sqrt2 \\ ac=-2\sqrt2<0 \end{array}\right. \Rightarrow ac=12\sqrt2$

7) $S_{ABC}=\frac{1}{2\sqrt2}ac=\frac{12\sqrt2}{2\sqrt2}=6.$

Ответ: $S_{ABC}=6$.

Чистовик.(4 стр.)

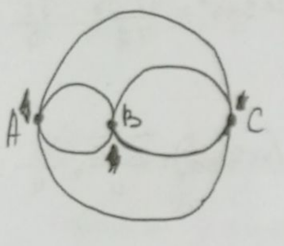
Задача 7.

1 ч 25 мин = 85 мин - число оканчивается на 5,

из чисел 7, 17, 11 можно получить кратное 5 число, если сложить два раза число, оканчивающееся на 7 и один раз 11. $7+17+11=35$, $7+7+11=25$;

Заметим, что $25\cdot2+35=85$, т.е. $85=7\cdot5+11\cdot3+17$,

значит он проехал 5 раз по дуге AB, 3 раза по дуге BC и 1 раз по дуге AC, например: AB, BC(3 раза), CA, AB(4 раза).



Если $AB=15$ км, то окр-ть 30 км,
$30=2\pi r_1$; $r_1=\frac{15}{\pi}$

Аналогично окр-ть с диаметром BC:
$50=2\pi r_2$; $r_2=\frac{25}{\pi}$

$r_3=r_1+r_2=\frac{15}{\pi}+\frac{25}{\pi}=\frac{40}{\pi}$, $l=2\pi r_3=80$,
$AC=40$ (км)

Тогда всего он проехал $15\cdot5+25\cdot3+40=75+75+40=$
$=190$ (км).

Ответ: 190 км.

37-11-90-18
(38.9)

Чистовик (стр.5)

Задача 1.

Т.к. a и b - целые, то сумма и произведение корней тоже целые (по т. Виета), тогда

$\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4$ - целое, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ - целое $\Rightarrow$
или равно 0.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\pm1$ или $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0$.

$m+n=\pm1=mn$ $m+n=0, mn\neq0$

1) $a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=4-1=3$

$b=\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)=\frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4=\frac{1}{mn}-2=-1$

$a+b=3-1=2$

2) $a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=4$

$b=4+\frac{1}{mn}$; $\frac{1}{mn}$ - целое, т.к. b-целое, значит $mn=\pm1$

$\left[\begin{array}{l} b=5 \\ b=3 \end{array}\right.$

$a+b=4+5=9$ или $4+3=7$.

~~Ответ: 2; 9; 7.~~

3) $a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=4+1=5$

$b=6+\frac{1}{mn}=5$

$a+b=5+5=10$

Ответ: 2; 7; 9; 10. посторонние корни

Задача 3.

$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}=\frac{2a(1-a)+2bc}{2a}=1-a+\frac{bc}{a}$; аналогично для b и c.

если $b=a=c=1$, то все выражение равно $1+1+1=3$.

Ответ: 3.

нет доказательства оценки

черновик (стр. 1)

$\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2=-a$

o _ _ o _ o _ o _ o

o o o o o

$4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=a=\frac{4mn-n-m}{mn}=a$

$b=\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)=\frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4=\frac{4mn-2m-2n+1}{mn}$

$a+b=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+4+\frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}=8-\frac{3}{m}-\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}=2a$

$=\frac{8mn-3n-3m+1}{mn}$

$7\cdot8\cdot9\cdot10=5040$

$5!\cdot6\cdot5!$

$\begin{array}{r}144\\ \times\ 6\\ \hline 86400\end{array}$

$a^2-4b=n^2$

$120^2\cdot6=14400\cdot6=$

a^2-4b

$a=\frac{m+n-1}{mn}=a-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{mn}=b$

$\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

$a+b=2a-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{mn}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha=$ 15

$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=$

$\frac{-4,\ -3}{a=4,\ b=3}$, $x^2+4x+3=0$

$=\frac{\sqrt6}{4}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}=$

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{6}$

$=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$

$\frac{m}{n}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{ma}{nb}=0$

$\sin30\cdot\cos45+\sin45\cdot\cos30=$

$\{x\}+\{y\}=1$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

1-6, 2-5, 3-4

n - целое

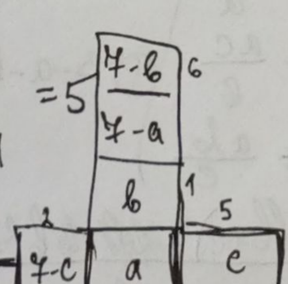
$x\cdot y=n$

x^2-3x+2

$\frac{4}{2}$ $\frac{3}{3}$ 2 1

$D=a^2-4b=5$

3 1



$x\cdot\{y\}, y\{x\}, \{x\}\cdot\{y\}$ - целые

$x=\frac{-1\pm\sqrt5}{6}$

4: 1

3: 1

2: 35, 36, 45, 46 - 4

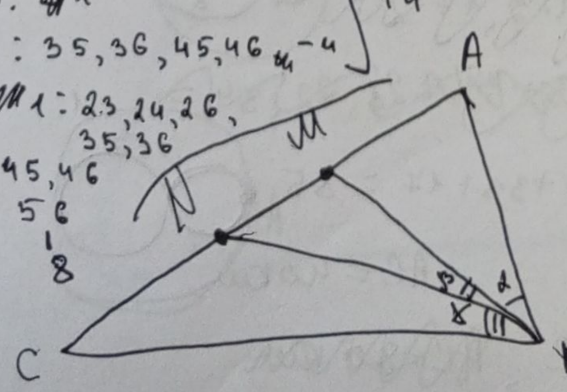
1: 23, 24, 26, 35, 36, 45, 46, 56

8

14

$\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AB\cdot BM\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\gamma\cdot BN\cdot BC=5$

$\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\cdot AB\cdot BM\cdot\sin\gamma\cdot BN\cdot BC=10$



$x_1+x_2=5$, $x_1=5-x_2$

$AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC=$

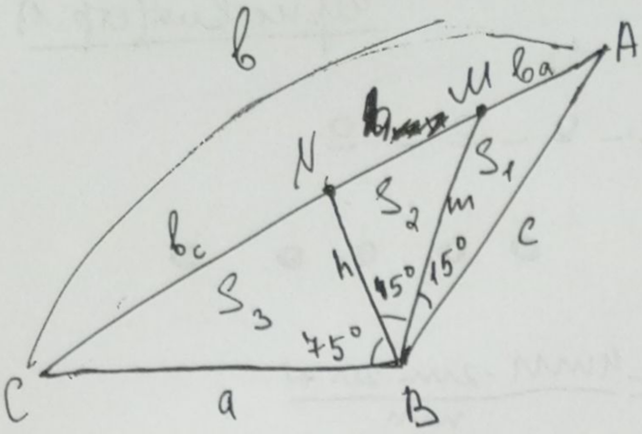
$x_1\cdot x_2=3$

$5x_2-x_2^2=3$

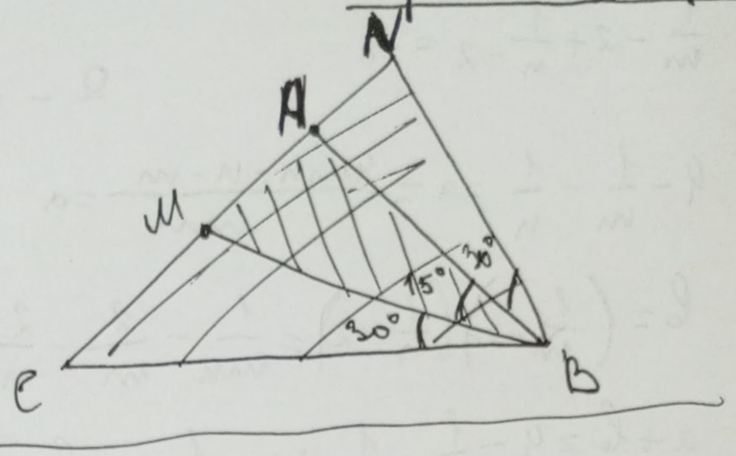
$x_2^2-5x_2+3=0$

$D=25-12=13$

$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$



черновик. (стр. 2)



$S_1 \cdot S_3 = 3$

$S_1 + S_3 = 5$

$\begin{cases} S_{1/3} = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ S_{3/1} = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sin 15 \cdot mc = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} mc$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sin 45 \cdot mn = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} mn$

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \sin 75 \cdot an = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} an$

$2(S_1 + S_3) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} mc + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} an = 10$

$4 \cdot S_1 \cdot S_3 = \frac{(\sqrt{3}-1) mc \cdot (\sqrt{3}+1) an}{\cancel{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}\ 8} =$

$= \frac{2 \cdot mc \cdot an}{8} = \frac{mc \cdot an}{4} = 12$

$mcan = 48.$

$ac \cdot (ac - 10\sqrt{2}) = 48$

$ac^2 - 10\sqrt{2}\, ac - 48 = 0$

$D = 200 + 192 = 392 = 4 \cdot 2 \cdot 49$

$ac = \frac{10\sqrt{2} \pm 14\sqrt{2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} ac = 12\sqrt{2} \\ ac = -2\sqrt{2} \end{array} \right.$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin 45 \cdot ac = \frac{\sqrt{2}}{4} ac = \frac{1}{2\sqrt{2}} ac$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} ac = 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}} mn$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} (ac - mn) = 5$

$ac - mn = 10\sqrt{2}$

$mn = ac - 10\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 6$

$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} = \frac{2a(1-a) + 2bc}{2a} = 1 - a + \frac{bc}{a}$

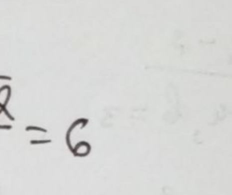
$1 - a + \frac{bc}{a}$

$1 - b + \frac{ac}{b}$

$1 - c + \frac{ab}{c}$

$= 3 - a - b - c + \frac{bc^2 + ab^2 + ac^2}{abc}$

$= \frac{(b+c)^2 - b^2 - c^2}{2a} + 1 - a$

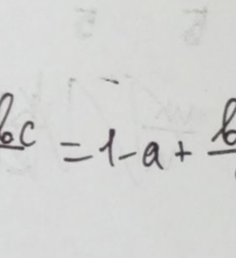


$85 = \cancel{7 \cdot 4,\ 11 \cdot 2,\ 17 \cdot 2} =$

~~...~~ 23, 22, 34 =

15 AB   25 BC

$= 7 \cdot 5 + 11 \cdot 3 + 17 \cdot 1 = 35 + 33 + 17 = 85$



$\boxed{75 + 75 + 40 = 190}$ AC 40

AC = 40 км

$30 = 2\pi r_1,\ 50 = 2\pi r_2$

$r_1 = \frac{15}{\pi},\ r_2 = \frac{25}{\pi}$ $\frac{40}{\pi}$, ~~AC = 80 км~~