

0 807978 540008

80-79-78-54
(37.6)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

Место проведения Москва
город

дешифр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Заксеева Александра Александровна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
80-79-78-54	85	15	10	15	15	0	15	15	X

80-79-78-54
(37.6)

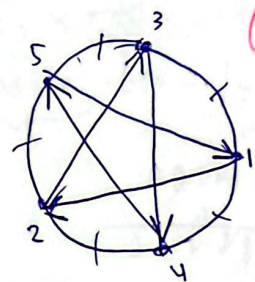
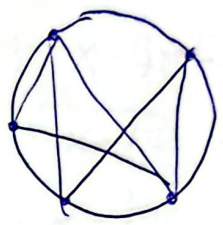
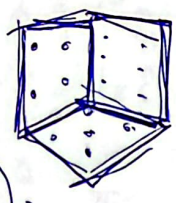
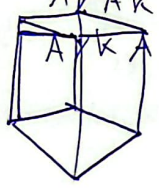
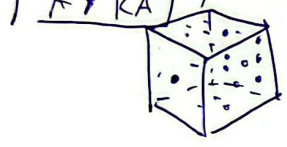
Терновик

АКУЛ $P_4 = 4!$ $36 + 24 = 60$

ААКУ $C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ $3 \cdot P_4!$

ААКУЛ $\frac{5!}{4!} = 5$ $\frac{4!}{2!} = (12 \cdot 3)$

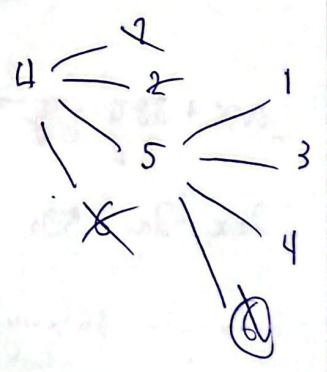
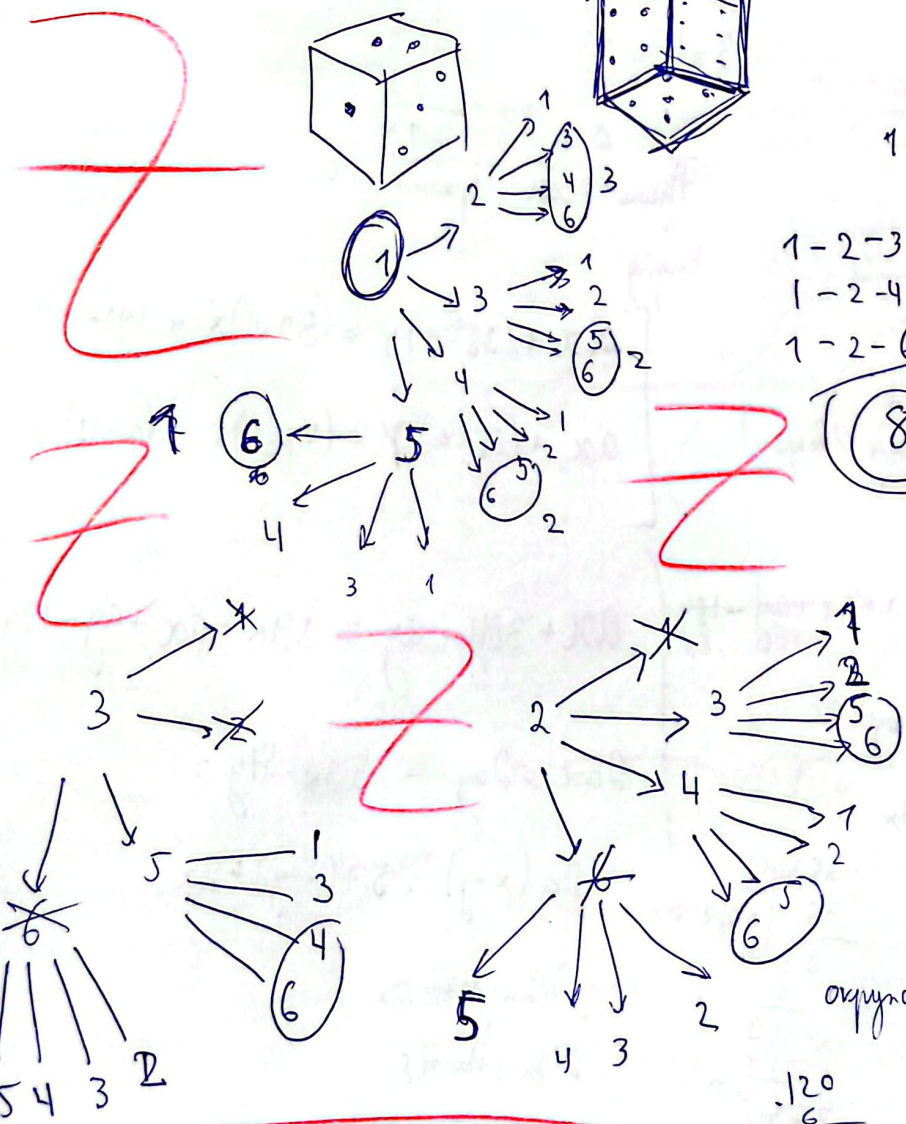
- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| ААКУ | УААК | КАУА | ААКУ | КУАА |
| АКАУ | УАКА | КААУ | АКАУ | КАУА |
| АКУА | УКАА | КУАА | АКУА | КААУ |
| АУКА | | | ААУК | УААК |
| АУАК | | | АУАК | УАКА |
| АУКА | | | | УКАА |



Расстояние между 1 и 3; 3 и 5; 5 и 2; 2 и 4; 4 и 1 равны 15

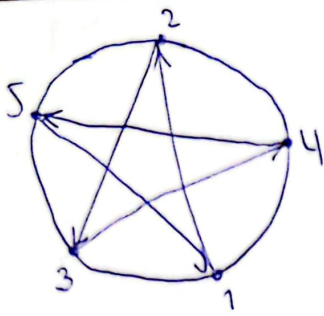
- 1-2-3
- 1-2-4
- 1-2-6

$(8) + (4) + (2) + 1$



Пусть a - длина окружности - тогда $X = \frac{a}{5}$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 6 \\ \hline 720 \end{array} \quad \begin{array}{r} 720 \\ - 120 \\ \hline 144 \\ + 72 \\ \hline 86400 \end{array}$$



$$\begin{aligned} 30t - 10t - x &: a \\ 50t - 30t - x &: a \\ 20t - 50t - x &: a \\ 40t - 20t - x &: a \\ 10t - 40t - x &: a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 14400 \\ \underline{6} \\ 86400 \end{array}$$

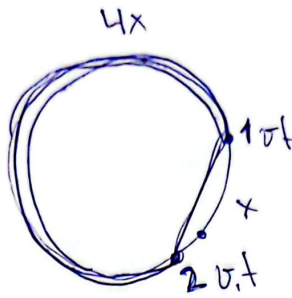
$$x = 9 \text{ см}$$

$$y = 3 \text{ см}$$

$$L = 38 \text{ марок}$$

$$T = 40 \text{ марок}$$

$$R = 59 \text{ (марок вперёд)}$$



$$\begin{aligned} 20t - x &: a \\ 20t - x &: a \\ -30t - x &: a \\ 20t & \\ -30t - x &: a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20t &= x \\ -30t &= x \end{aligned}$$

$$29 \cdot 9 + 11 \cdot 3 =$$

$$33 + 261 = 294$$

$$270 + 24 = 294$$

$$29 \cdot 9 + 11 \cdot 3 = 297$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \underline{9} \\ + 261 \\ \underline{9} \\ 294 \end{array}$$

Пусть $0x$ прошен a марок $к$ марок $в$ перёд

$$ax + (38-a)y = (59-a)x + (a-18)y$$

$$ax + (38-a)y = (59-a)x + (a-18)y$$

$$ax + 38y - ay = 59x - ax + ay - 18y \quad \left\{ \begin{aligned} ax + 38y - ay &= 59x - ax + ay - 19y \\ 2ax - 2ay &= 59x - 56y \end{aligned} \right.$$

$$2ax - 2ay = 59x - 56y$$

$$2a(x-y) = 56(x-y) + 3x$$

$$6(2a-56) = 3x$$

$$6(2a-56) = 27 \quad | :6$$

$$2a-56 = 4,5$$

$$a = \frac{60,5}{2}$$

$$\begin{array}{r} 363 \overline{) 12} \\ \underline{-36} \\ 03 \\ \underline{-0} \\ 30 \\ \underline{-24} \\ 60 \\ \underline{363} \\ 12 \end{array} \quad \left. \begin{aligned} 30,25 \\ 30,2 \end{aligned} \right\}$$

$$2ax - 2ay = 59x - 57y$$

$$2a(x-y) = 57(x-y) + 2x$$

$$(x-y)(2a-57) = 2x$$

$$6(2a-57) = 18$$

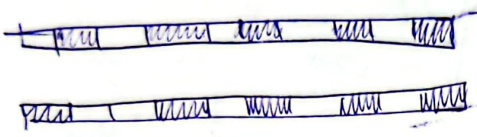
$$2a-57 = 3$$

$$2a = 60$$

$$a = 30$$

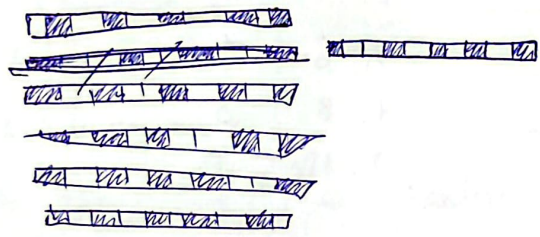
80-79-78-54
(37.6)

5 г.
3 м.
1 г.
1 д.



$6 \cdot 5! \cdot 5!$

1 2 3 4



$5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$30t - 0t - X = 5x$
 $5x - (30t - 0t) = X$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 120 \\ + 24 \\ \hline 12 \\ 74400 \end{array}$$

120
 $\cdot 14400$
 $\hline 6$
 86400

$\frac{11 \dots 110}{11 \dots 111} = 1 - \frac{1}{17 \dots 1} = 2$

$\frac{22 \dots 221}{222 \dots 2223} = 1 - \frac{2}{222 \dots 223}$

$\frac{333 \dots 333}{33 \dots 334} = 1 - \frac{3}{3 \dots 334}$

$\frac{1}{1 \dots 1} = \frac{2}{22 \dots 22} > \frac{2}{222 \dots 223} \Rightarrow$

$\frac{1}{11 \dots 1} > \frac{2}{22 \dots 223}$

$A < B$!!!

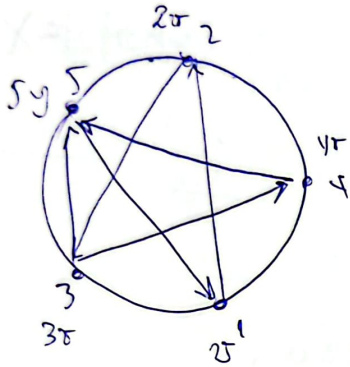
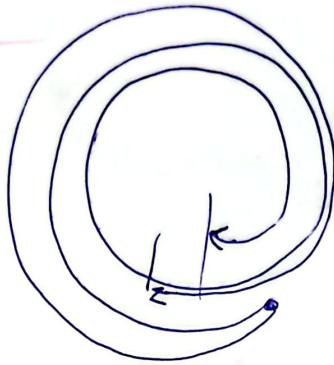
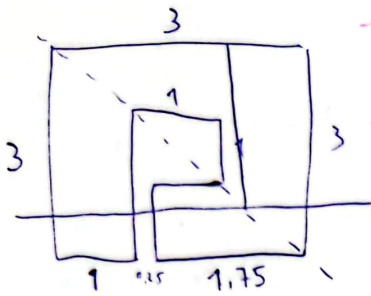
$\frac{3}{3 \dots 333} > \frac{3}{3 \dots 334}$ Ha

A, C, B

$22 \dots 23 \cdot 3$
 $\frac{6 \dots 669}{2024}$

$\frac{6}{666 \dots 68} > \frac{6}{66 \dots 69}$

$3 \dots 334 \cdot 2 =$
 $\frac{6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 8}{2024}$



$$20t - x = 5x$$

$$20 - 50t = 2$$

$$-30t - 4x = 5x$$

$$\begin{cases} 20t = 5x \\ -30t = 4x \end{cases}$$

$$t = \frac{5x}{5} = x$$

$$1: 3x$$

$$2: 16x - 1x$$

$$3: 24x - 4x$$

$$4: 32x - 2x$$

$$5: 40x - 0$$

$$2xt = x$$

$$3xt = 4x$$

$$2xt - x = 5x$$

$$3xt - 4x = 5x$$

$$3t - 4 = 2t + 1 = 5$$

$$t - 3 = 5$$

$$t = 8$$

$$x(2t - 1) = 5x$$

$$x(3t - 4) = 5x$$

$$2t - 1 = 5$$

$$3t - 4 = 5$$

$$1. 2 - 2$$

$$2. 4 - 4$$

$$3. 6 - 1$$

$$4. 8 - 3$$

$$5. 10 - 0$$

Тестовик. (стр. 1)

Задача 1.

Сперва из набора из пяти дощечек нужно выбрать 4. Так как дощечек пять, то «выкидываем» одну лишнюю, мы автоматически получаем набор из 4 оставшихся. Однако среди дощечек два раза встречается буква «А», из-за чего кол-во наборов сокращается с 5 до 4:

1. АКУЛ (выкинули «А»)
2. АКУА (выкинули «Л»)
3. АКЛА (выкинули «У»)
4. АУЛА (выкинули «К»)

Число вариантов для первого набора равно $4! = 24$. Т.к. все элементы разные.

кол-во вариантов для остальных наборов равно $\frac{4!}{2!} \cdot 3$ (поскольку в каждом наборе по 2 «А», и таких наборов 3).

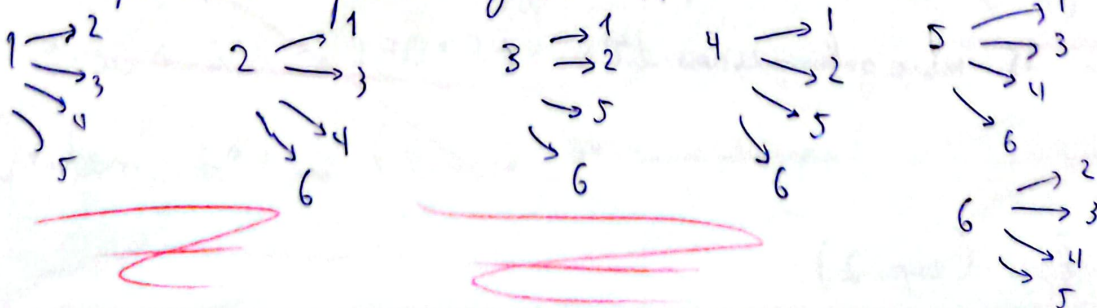
3).
Осталось сложить $4! + \frac{4!}{2!} \cdot 3 = 24 + 12 \cdot 3 = 24 + 36 = 60$

Ответ: 60 наб

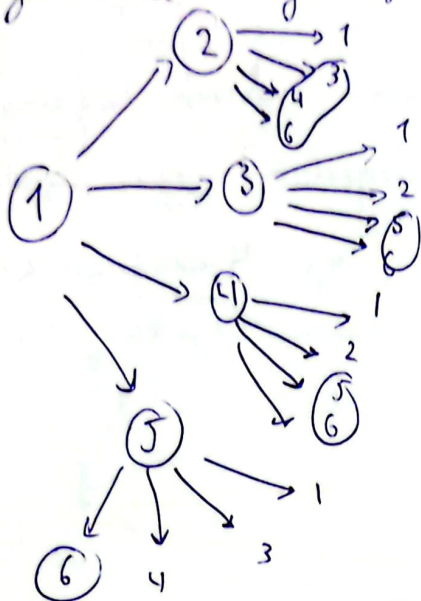
Задача 2.

Так как надо получить возрастную последовательность из трёх элементов, при этом каждый элемент не больше 6, но минимальный элемент не больше 4.

Заметим, что каждая грань соседствует со всеми кроме той, значение на которой в сумме со значением на выбранной грани даёт 7:



Схематично подсчитаем кол-во вариантов при ~~каждом~~ ~~каждом~~ значении - единице:



При первом ходе 1-2 ходят 3, 4, 6 (обведены)
 При 1-3 : 5, 6
 При 1-4 : 5, 6
 При 1-5 : 6.

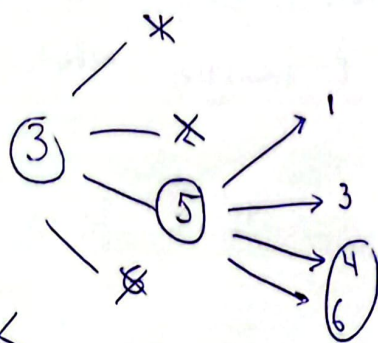
Итого для 1 : 8

Аналогично для 2, 3 и 4:

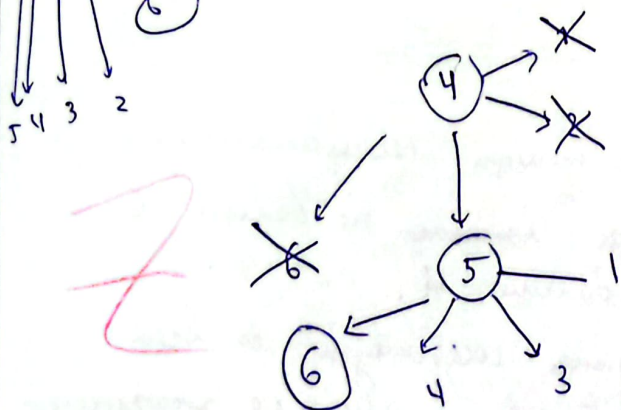


← не имеет смысла идти дальше

Итого для 2 : 4



Итого для 3 : 2



Итого для 4 : 1.

Суммируем: $8 + 4 + 2 + 1 = 15$

Ответ: 15 последовательностей.

Тимошкин (стр. 2)

Задача 4.

Темновик (3 стр.)

$$x = 9 \text{ м}$$

$$y = 9 : 3 = 3 \text{ м}$$

$$z = 38 \text{ шагов}$$

$$T = 40 \text{ шагов}$$

$$R = 59 \text{ шагов}$$

Пусть попугой прошел a шагов вперед при первом измерении. Тогда на обратном пути от тропки $(R-a)$ шагов вперед. Так как все длины угады известны, получаем два разных варианта:

$$1). x \cdot a + (z - a) \cdot y = x \cdot (R - a) + y \cdot (T + 1 - R + a)$$

Подставив значения получаем:

$$9a + (38 - a) \cdot 3 = 9(59 - a) + 3(41 - 59 + a)$$

$$6a + 114 = 531 - 54 - 9a + 3a$$

$$6a + 114 = 477 - 6a$$

$$12a = 363$$

$$a = 30,25$$

$$2). x \cdot a + (z - a) \cdot y = x \cdot (R - a) + y \cdot (T - R + a)$$

Подставив значения получаем:

$$9a + (38 - a) \cdot 3 = 9(59 - a) + 3(40 - 59 + a)$$

$$6a + 114 = 531 - 9a + 57 + 3a$$

$$6a + 114 = 474 - 6a$$

$$12a = 360$$

$$a = 30$$

Т.к. число шагов - натуральное число, то нам удовлетворяет только один ответ ($a = 30$). Так как все остальные нам известны, то нетрудно подставить длину угады:

$$9 \cdot 30 + 3 \cdot 8 = 270 + 24 = 294 \text{ м}$$

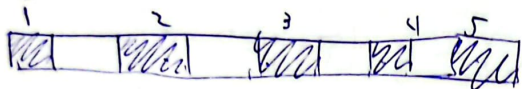
Ответ: 294 м (2 метра 94 сантиметра).

Задача 6.

Заставка (4 стр.)

Сначала подсчитаем кол-во возможных взаимных расположений девочек в ряду так, чтобы никакие две не сидели рядом.

Для этого возьмем простейшую конструкцию, удовлетворяющую условию (закрашенные клетки - девочки):



Заметим, что конструкция занимает собой 9 клеток, а в задаче 10 мест. Значит, нам остается добавить в конструкцию еще одну незакрашенную клетку. Сделать это можно 6 способами так как нам пока что неважно взаимное расположение белых клеток:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

Теперь осталось разобраться с их взаимным расположением. Девочек 5, и поэтому между их позициями 5! перестановок. Если мальчиков тоже, учитывая еще одно, то это будет 5! (5-3-1-1) тоже одно, если бы было больше, то возникли бы некоторые трудности с их перестановками). Мы найдем, что кол-во перестановок учителей, мальчиков и пустых мест (белых клеток) равно 5! (почему все учителя - разные).

В итоге нам остается перемножить

$$6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120^2 = 6 \cdot 14400 = 86400$$

Ответ: 86400

Задача 7. (Штатов на 5 стр.)

$$A = \frac{\underbrace{111\dots 10}_{2024}}{\underbrace{111\dots 11}_{2024}} = 1 - \frac{1}{\underbrace{111\dots 1}_{2024}}$$

$$B = \frac{222\dots 21}{222\dots 23} = 1 - \frac{2}{\underbrace{222\dots 23}_{2024}}$$

$$C = \frac{333\dots 31}{333\dots 34} = 1 - \frac{3}{\underbrace{33\dots 34}_{2024}}$$

$$1. \frac{1}{\underbrace{111\dots 1}_{2024}}^{(2)} = \frac{2}{\underbrace{222\dots 2}_{2024}} > \frac{2}{\underbrace{222\dots 23}_{2024}} \Rightarrow A < B$$

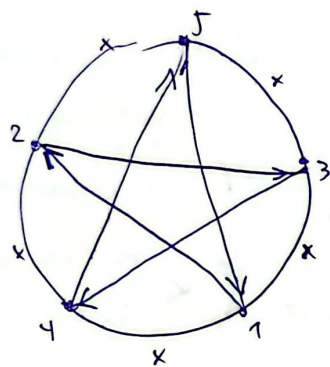
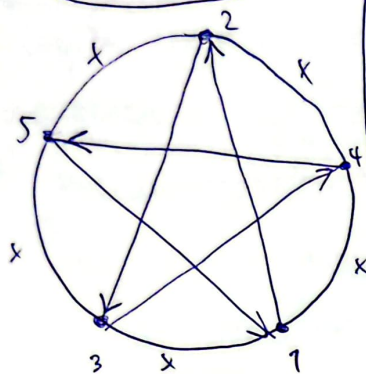
$$2. \left. \begin{aligned} \frac{2}{\underbrace{222\dots 23}_{2024}}^{(3)} &= \frac{6}{\underbrace{666\dots 69}_{2024}} \\ \frac{3}{\underbrace{333\dots 34}_{2024}}^{(2)} &= \frac{6}{\underbrace{666\dots 68}_{2024}} \end{aligned} \right\} \frac{2}{\underbrace{222\dots 23}_{2024}} < \frac{3}{\underbrace{333\dots 34}_{2024}} \Rightarrow C < B$$

$$3. \frac{1}{\underbrace{111\dots 1}_{2024}}^{(3)} = \frac{3}{\underbrace{333\dots 3}_{2024}} > \frac{3}{\underbrace{33\dots 34}_{2024}} \Rightarrow A < C$$

Ответ: A, C, B (A < C < B)

Задача 3.

Задача 3 (6 стр.)



Обозначим расстояние между двумя соседними вершинами за x . Тогда длина окружности равна $5x$. Имея представление о периметре и условия задачи, мы можем последовательно выяснить взаимное положение всех жуков:

Заметим, что в обоих случаях взаиморасположение жуков одинаково, меняется лишь направление.

1. Рассмотрим расстояние от 1 до 4

жука (на окружности это расстояние):

Скорость первого $= \sigma$, второго 4σ . Время t одинаково. Получаем, что $4\sigma t - \sigma t - x = 5x$. Т.к. между жуками не может быть этого жука №4 успел пройти на какое-то кол-во кругов больше чем жука №1.

2. Теперь рассмотрим расстояние от 4 до 2 жука:

Скорость четвертого $= 4\sigma$, скорость второго $= 2\sigma$. Очевидно, что жука №4 прошел больше. Условно говоря, если взять точку где сейчас стоит жук №2 за 0, то жук №4 стоит в точке $4x$. Значит $4\sigma t - 2\sigma t - 4x = 5x$ (т.к. жук не может пройти больше кол-во целых кругов).

Двигаясь дальше по часовой стрелке, все расстояние будет вводиться к н. 1 и н. 2 (пункты обведены). Значит нам надо найти такое минимально t это:

$$\begin{cases} 3\sigma t - x = 5x \\ 2\sigma t - 4x = 5x \end{cases}$$

По условию $\sigma = \frac{15x}{5} = 3x$ (т.к. первый жук может

притом ^{3 раза} скрученности за 5 минут, длина окружности у нас как раз равна $5x$).

Если $30t - x : 5x$ и $20t - 4x : 5x$, то

$$(30t - x) - (20t - 4x) : 5x$$

$$10t + 3x : 5x$$

$3x + 3x : 5x$ при этом t - минимальное возможное.

Т.к. $t > 0$, то $3x + 3x \neq 0$

Показит $3x + 3x$ может быть не меньше $5x$ ($5x$ -минимально возможное значение $3x + 3x$)

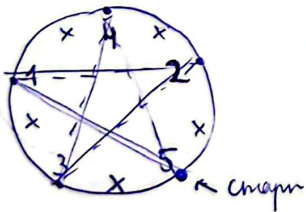
$$x(t + 3) = 5x$$

$$t + 3 = 5$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ ч} = 40 \text{ сек.}$$

Проверка:

1. Через ~~40 минут~~ ^{секунд} первый груз будет на расстоянии $2x$ от старта
2. Второй будет $2 \cdot 2x = 4x$ от старта
3. Третий пройдёт $2 \cdot 3x = 6x$, и поэтому будет на расстоянии $1x$ от старта ($6 - 5 = 1$ от 1))
4. Четвёртый пройдёт $2 \cdot 4x = 8x$, на расстоянии $3x$ от старта
5. пятый пройдёт $2 \cdot 5x = 10x$, будет на старте ($0x$).



Ответ: ~~через 2 минуты~~. через 40 секунд.

Зинченко (7 стр.)