0 574252 430002

57-42-52-43
(40.57)

Дашифр

+ 10.07 ...

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносова
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Залама Никиты Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	4	12	12	12	4	12	0	68

Дешифр

57-42-52-43 (40.57)

Чистовик

68 / шестьдесят восемь

№ 5

$y = f(x)$, $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$t = \frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2} \Rightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{t-1}{2}$

$f(t) = \frac{t-1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{12}$

При подстановке лин. функц. (зав от x) в лин. функц. степень x не поменяется

$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{2^{12}} + k$ (коэф. при x равен $\frac{1}{2^{12}}$, т.к. брали лин. функц. с коэф. $\frac{1}{2}$ - 12 раз)

Тангенс угла накл. кас. это значение произв. в опр. т.

$g'(x) = \left(\frac{x}{2^{12}} + k\right)' = \frac{1}{2^{12}} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2^{12}}$

Ответ: $\frac{1}{2^{12}}$ (или $\frac{1}{4096}$)

№ 3

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

2 ур-ние:

$$\begin{cases} y \geqslant 3 \\ y-x+10 = y^2-6y+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant 3 \\ x = -y^2+7y+1 \end{cases}$$

1 ур-ние:

Заметим, что справа и слева есть $xy+4x-y-4$

$xy+4x-y-4 = 0$

$x(y+4)-(y+4) = 0 \rightarrow (x-1)(y+4) = 0$

Чистовик:

Прод. №3

① $y=-4$ ∅, т.к. есть усл $y \geq 3$

② $x=1$ => 1 ур-ние выполн

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-y^2+7y+1 \end{cases} \Rightarrow y(y-7)=0$$

$y_1=0$ ∅

$y_2=7$ подх.

решение $x=1$ $y=7$

Пусть $xy+4x-y-4 \neq 0$

$$\frac{(x-1)(y+4)}{|(x-1)(y+4)|} \cdot |y-x-8| = x-4$$

$y+4>0$ всегда

1) $x>1$

$|y-x-8| = x-4 \rightarrow x \geq 4$

$|y^2-6y-9| = -y^2+7y-3$

$y^2-6y-9=(y-(3+3\sqrt{2}))\cdot(y-(3-3\sqrt{2}))$

1.1) $y \in (-\infty; 3-3\sqrt{2}) \cup (3+3\sqrt{2}; +\infty)$

$y^2-6y-9+y^2-7y+3=0$

$2y^2-13y-6=0$

$D=169+48=217$

$y_{1,2}=\frac{13 \pm \sqrt{217}}{4}$

① $\frac{13-\sqrt{217}}{4} \vee 3-3\sqrt{2}$

$13-\sqrt{217} \vee 12-12\sqrt{2}$

$1+12\sqrt{2} \vee \sqrt{217}$ $\uparrow^2$

$1+288+24\sqrt{2} > 217$

$\Rightarrow \frac{13-\sqrt{217}}{4}$ подх

при раскр.: $2x=y-4$

$y<-4<0$, но $x \geq 4 \Rightarrow$ ∅

② $\frac{13+\sqrt{217}}{4} \vee 3+3\sqrt{2}$

$13+\sqrt{217} \vee 12+12\sqrt{2}$

$\sqrt{217} \vee 12\sqrt{2}-1$

$217 \vee 1+288-24\sqrt{2}$

$24\sqrt{2} \vee 72$

$\sqrt{2}<3$ => подх

при раскр.: $2x=y-4=\frac{\sqrt{217}-3}{4} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{217}-3}{8}$

$\frac{\sqrt{217}-3}{8} \vee 4$

$\sqrt{217}<35 \Rightarrow$ ∅

57-42-52-43 (40.57)

Чистовик:

Прод № 3

1.2) $y \in [3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2}]$

$-y + \cancel{x} + 8 = \cancel{x} - 4 \quad y = 12 \quad \varnothing$, т.к.

2) $x < 1$

$|y - x - 8| = 4 - x$

$|y^2 - 6y - 9| = y^2 - 7y + 3$

2.1) $y \in (-\infty; 3-3\sqrt{2}) \cup (3+3\sqrt{2}; +\infty)$

$\cancel{y^2} - 6y - 9 - \cancel{y^2} + 7y - 3 = 0$

$y = 12 \Rightarrow$ подх. $\quad x = -y^2 + 7y + 1 = -144 + 84 + 1 = -59$ подх

$\Rightarrow$ реш $\quad x = -59 \quad y = 12$

2.2) $y \in [3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2}]$

$-y^2 + 6y + 9 = y^2 - 7y + 3$

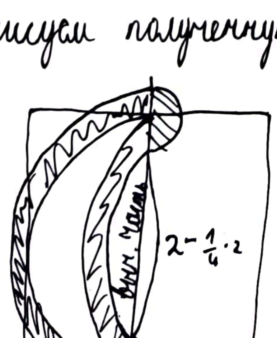
$2y^2 - 13y - 6 = 0$

$y_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{217}}{4}$ — оба корня не подх. под усл (было док-во в п. 1.1)

Ответ: $x = -59,\ y = 12$; $x = 1,\ y = 7$

№ 2

Нарисуем полученную фигуру (закр. часть — то, что расплылось)



Рассмотрим левую половину

Её можно предст. ~~[illegible]~~ в виде разности 2-ух частей ~~[illegible]~~.

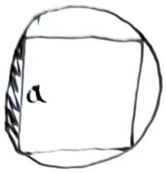
1) ~~[illegible]~~ половина окр. с радиусом $\frac{5}{4}$ (1 изн. + $\frac{1}{4}$) $S_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{25\pi}{32}$

Чистовик

Прод № 2

г) часть окр. с рад. $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$ ($\sqrt{2}$ изн (~~...~~ диаг. кв со ст. 1) $-\frac{1}{4}$)

$\frac{S_{окр}-S_{кв}}{4}$ - по рисунку



$S_{окр} = \pi r^2 = \pi\cdot\left(2+\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \pi\left(\frac{33}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(\frac{33-8\sqrt{2}}{16}\right)$

$a = \underset{изн}{2} - \underset{расст.}{2\cdot\frac{1}{4}} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_{кв} = a^2 = \frac{9}{4}$

$S_2 = \frac{S_{окр}-S_{кв}}{4} = \frac{\pi\left(\frac{33-8\sqrt{2}}{16}\right)-\frac{9}{4}}{4} = \frac{\pi(33-8\sqrt{2})}{64} - \frac{9}{16}$

В правой части два полукруга с радиусом $\frac{1}{4}$ => 1 круг

$S_3 = \pi r^2 = \frac{\pi}{16}$

Итог: $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{26\pi}{32} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi(33-8\sqrt{2})}{64} + \frac{9}{16} =$

$= \frac{54\pi}{64} - \frac{\pi(33-8\sqrt{2})}{64} + \frac{36}{64} = \frac{\pi(21+8\sqrt{2})+36}{64}$

Ответ: $\frac{\pi(21+8\sqrt{2})+36}{64}$

№ 1

Прет: 3 вр, 4 защ, 7 нап, 3 универс

В качес. луч. защ. можно выбрать:
1) 2 защ.
2) 1 защ. + 1 унив
3) 2 унив.

Из ост. унив. и нап. можно выбрать луч. нап.

1) 2 защ.

$\underset{вр}{C_3^1} \cdot \underset{защ}{C_4^2} \quad \underset{нап\,(7_н+3_у)}{C_{10}^3}$

2) 1 защ + 1 унив.

$\underset{вр}{C_3^1} \cdot \underset{защ_1}{C_4^1} \cdot \underset{защ_2}{C_3^1} \cdot \underset{нап\,(7_н+2_у)}{C_9^3}$

3) 2 унив

$\underset{вр}{C_3^1} \cdot \underset{защ}{C_3^2} \cdot \underset{нап\,(7_н+1_у)}{C_8^3}$

57-42-52-43 (40.57)

Чистовик

Прод №1

Всего: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{10}^3 + C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_9^3 \cdot C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_8^3 =$

$= \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{10!}{7!\cdot 3!} + \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{9!}{6!3!} + \frac{3!}{2!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{8!}{5!3!} =$

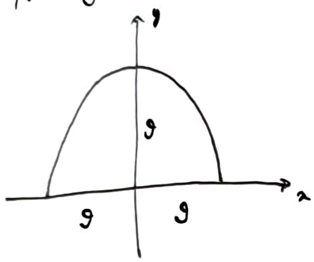
$= 3 \cdot \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}} \cdot \frac{8\cdot 9\cdot 10}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}} + 3 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{7\cdot 8\cdot 9}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}} =$

$= 3\cdot\underline{8}\cdot\underline{9}\cdot 10 + 3\cdot 2\cdot 7\cdot\underline{8}\cdot\underline{9} + \underline{3}\cdot\underline{3}\cdot 7\cdot\underline{8} =$

$= 72\cdot(30 + 42 + 7) = 72\cdot 79 = 5688$

Ответ: 5688

№ 6



$y = a - bx^2$

при $y = 0$: $x = \pm 9$

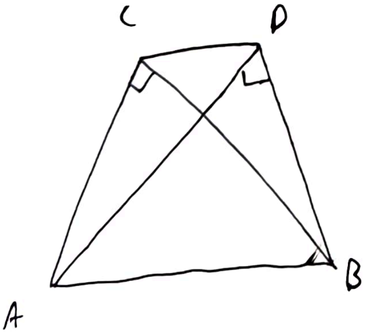
$0 = a - 81b$

при $y = 9$: $x = 0$

$9 = a$

$y = 9 - \frac{x^2}{9}$

$81b = a = 9 \Rightarrow b = \frac{1}{9}$



AB и $CD \parallel Ox \Rightarrow$ лежат на одн высоте (y равны)

$A(-x_1; 9 - \frac{x_1^2}{9})$

$B(x_1; 9 - \frac{x_1^2}{9})$

$C(-x_2; 9 - \frac{x_2^2}{9})$

$D(x_2; 9 - \frac{x_2^2}{9})$

для A и B (C и D) — разные знаки у x, т.к. фун-на пар-ла сим. Oy

нужно найти высоту трап. (разность высот прямых):

$9 - \frac{x_2^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9} = \frac{1}{9}(x_1^2 - x_2^2)$

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ по угл.

$AB^2 = (x_1 + x_1)^2 + (9 - \frac{x_1^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9})^2 = 4x_1^2$

$AC^2 = (x_1 - x_2)^2 + (-9 + \frac{x_1^2}{9} + 9 - \frac{x_2^2}{9}) = (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1^2 - x_2^2)^2 =$

$= \frac{10}{9}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1 + x_2)^2$

Чистовик.

Прод. № 6

$(B^2 = (x_1+x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1^2 - x_2^2)^2 = \frac{10}{9}(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1 - x_2)^2$

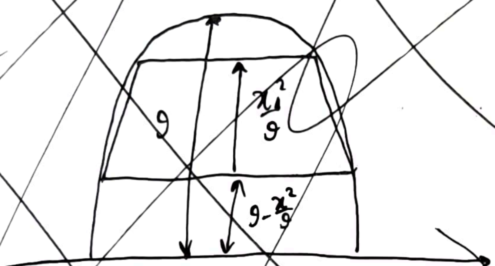
$\cancel{4x_1 = \frac{10}{9}(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1-x_2)^2 + (x_1+x_2)^2 = \frac{4}{3}(x_1-x_2)^2 + (x_1+x_2)^2}$

$$4x_1^2 = \frac{10}{9}(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1+x_2)^2 + \frac{10}{9}(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1-x_2)^2 =$$

$$= \frac{11}{9}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$3x_1^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$ $\quad \underline{x_1^2 = 2x_2^2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}x_2$

$r = \frac{1}{9}(x_1^2 - x_2^2) \Rightarrow \frac{x_1^2}{9}$, где x_1 - [illegible]



Расстояние от частн. б. до пола $= 9 - \frac{x_1^2}{9}$

Расстояние между балками $\frac{x_1^2}{9}$

$9 - \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_1^2}{9} = 9 = 9 - \frac{x_2^2}{9}$ поуч

$9 = 9 - \frac{x_2^2}{9} \Rightarrow x_2^2 = 0 \Rightarrow$ такое невозможно

Ответ: 0 (такое невозможно)

$36x_1^2 = 22x_1^2 + 22x_2^2$

$14x_1^2 = 22x_2^2 \Rightarrow \underline{x_1^2 = \frac{22}{14}x_2^2 = \frac{11}{7}x_2^2}$

Черновик

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ $\qquad \frac{x+2}{x-2} = t = 1 + \frac{4}{x-2}$

$f(t) = \frac{t-1}{2}$

$\frac{t-1}{2} = \frac{2}{x-2}$

$\frac{\frac{t-7}{8} - 1}{2} = \frac{t-15}{16}$

$f(f(t)) = \frac{\frac{t-1}{2} - 1}{2} = \frac{t-3}{4}$

$f(f(f(t))) = \frac{\frac{t-3}{4} - 1}{2} = \frac{t-7}{8}$

$-1: \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3}$

$0: \quad -1 \quad -1$

$1: \quad -3 \quad -2$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

$1024 \to 2^{10}$

64×64: 256, 384, 4096

$y > x+8$

$24 \times 3 = 72$

$y - x + 10 \geq 0 \qquad y \geq 3$

$x(y+4) - (y+4) = (y+4)(x-1)$

$217 : 7 = 31$, -21

$+1$

(2) $y - x + \cancel{10} = y^2 - 6y + \cancel{9}$

$y - x - 8 = x - 4$

$-y^2 + 7y + 1$

$y - 4 = 2x$

$x = -y^2 + 7y + 1$

$y^2 - 6y - 9 = 0$

$D = 36 + 36 = 6\sqrt{2}$

$y + y^2 - 7y - 1 - 8$

$y_1 = \frac{6 + 6\sqrt{2}}{2}$ $\qquad 3 \pm 3\sqrt{2}$

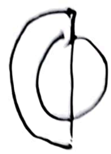
$17 \times \dots = 84$

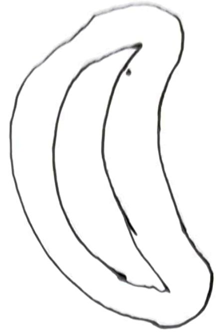
$-y^2 + 7y + 1 - 4$

$289 - 217 = 72$

$-144 + 84 + 1 = -60 + 1$

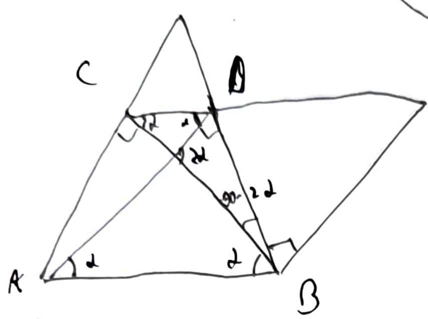
Черновик





$$\begin{array}{r} 79 \\ \times 72 \\ \hline 158 \\ 553 \\ \hline 5688 \end{array}$$

2 + 1



$\frac{27\pi}{32}$

прям

1 вр → 3 вр

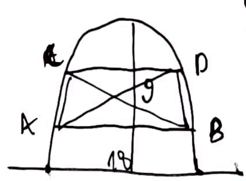
2 защ → 4 защ

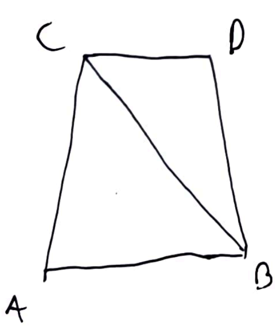
3 нап → 7 нап

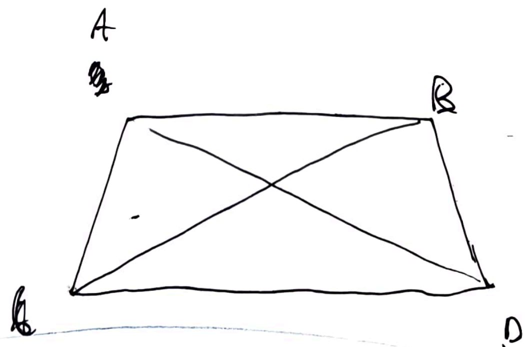
3 унивеpc (защ или нап)

$y = a - 6x^2$

$C_3^1 = \frac{3!}{1!2!}$







Черновик

$$\frac{AC^2 \cdot BC^2}{4} = \frac{AB^2 \cdot h^2}{4}$$

$$\frac{10}{9}(x_1-x_2)^2 \cdot \left((x_1+x_2)^2 + \frac{1}{9}(x_1-x_2)^2\right) = 4x_1^2 \cdot \frac{1}{9}(x_1-x_2)^2$$

$128+34$

$85 = 5 \cdot$

$34-17=17$

$(x_1-x_2)^2 = u$

$(x_1+x_2)^2 = v$

$$\frac{1}{9}(10u+v)(10v+u) = 4x_1^2 \cdot ($$

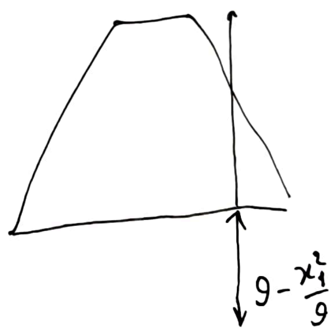
$10^{100}-1$

$n \cdot 10^{100} - n$

$\cancel{n_1 \cdot 10^{100}} + 10^1$

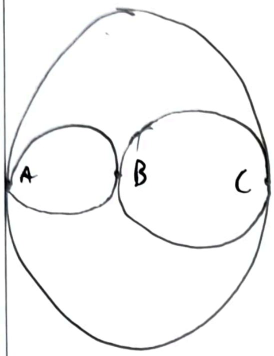
$(n-1)\cancel{^{100}}\,10^{100} + 10^{100} +$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{9}99 \\ \times \quad 2 \\ \hline 8 \end{array}$$



Чистовик

№ 4



$\breve{AB} = 13$ км : 7 мин

$\breve{BC} = 21$ км : 11 мин

$\breve{AB} = 2\pi r_1 \quad \breve{BC} = 2\pi r_2$

$\breve{AC} = 2\pi(r_1 + r_2) = \breve{AB} + \breve{BC} = 34$ км : 17 мин

Всего ехал: 1ч. 25 мин = 85 мин

Пусть по AB проехал a раз, по BC b раз, по AC c раз:

$7a + 11b + 17c = 85$

1) $c = 0$: $7a + 11b = 85$ $\qquad a = 9 \quad b = 2 \quad c = 0$

$b = 0$: $7a = 85$ $\varnothing$

$b = 1$: $7a = 74$ $\varnothing$

$b = 2$: $7a = 63 \Rightarrow a = 9$

очевидно больше нет реш. для $c = 0$

2) $c = 1$: $7a + 11b = 68$ $\qquad a = 5 \quad b = 3 \quad c = 1$

$b = 0$: $7a = 68$ $\varnothing$

$b = 1$: $7a = 57$ $\varnothing$

$b = 2$: $7a = 46$ $\varnothing$

$b = 3$: $7a = 35 \Rightarrow a = 5$

больше нет

3) $c = 2$ $\quad 7a + 11b = 51$ $\qquad a = 1 \quad b = 4 \quad c = 2$

$b = 0$: $7a = 51$ $\varnothing$

$b = 1$: $7a = 40$ $\varnothing$

$b = 2$: $7a = 29$ $\varnothing$

$b = 3$: $7a = 18$ $\varnothing$

$b = 4$: $7a = 7 \Rightarrow a = 1$

4) $c = 3$ $\quad 7a + 11b = 34$

$b = 0$: $7a = 34$ $\varnothing$

$b = 1$: $7a = 23$ $\varnothing$

$b = 2$: $7a = 12$ $\varnothing$

$b = 3$: $7a = 5$ $\varnothing$

5) $c = 4$ $\quad 7a + 11b = 17$

$b = 0$: $7a = 17$ $\varnothing$

$b = 1$: $7a = 6$ $\varnothing$

6) $c = 5$ $\quad 7a + 11b = 0$

$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 5$

Чистовик

① $a=9 \quad b=2 \quad c=0$ — должен проехать четное кол-раз по обеим дугам, т.к. 1 дуга – половина окр (нужно верн)

из A в A

Чистовик

$a = 9 \not\vdots\, 2 \Rightarrow \varnothing$

② $a=5 \quad b=3 \quad c=1$ — т.к. $c \not\vdots\, 2$, то можно сказать, что нужно проехать из C в A $\Rightarrow$ a и b должны быть неч. (если что-то неч., то будет полн. круг.)

$\Rightarrow$ подходит (другие вар. не подх. аналог. проверкой)

$\Rightarrow$ всего проехал: $13 \cdot 5 + 21 \cdot 3 + 34 \cdot 1 = 65 + 63 + 34 =$

$= 162$ км

Ответ: 162 км.

№ 7

Возьмем число $\underbrace{99\ldots99}_{100} = 10^{100} - 1 = n$ (наибольшее 100знач. число)

$1 \le m \le (10^{100} - 1) \Rightarrow n \cdot m = m \cdot 10^{100} - m =$

$= (m-1)\,10^{100} + 10^{100} - 1 - (m-1)$

$S\big((m-1)\cdot 10^{100}\big) = S(m-1)$ очевидно (просто добав. 0 в конце

$10^{100} - 1$ – число, сост. из 9 $\Big(\underbrace{99\ldots99}_{100}\Big)$

$m - 1 < 10^{100} - 1$, причем $10^{100} - 1$ из макс. цифры (9 – наиб. цифра)

$\Rightarrow$ при $10^{100} - 1 - (m-1)$ не будет перехода разрядов

$\Rightarrow$ можно записать: $S(mn) =$

$= S(m-1) + S\big(10^{100} - 1 - (m-1)\big) = S\big(\cancel{(m-1)} + 10^{100} - 1 - \cancel{(m-1)}\big) = S(10^{100} - 1)$

в силу не переходимости разрядов $\Rightarrow S(10^{100} - 1) = S\big(m(10^{100} - 1)\big)$

Ответ: $10^{100} - 1$ или $\underbrace{99\ldots99}_{100}$