0 936054 320002

93-60-54-32
(40.56)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

дешифр.

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Золотаревой Екатерины Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Золотарева

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	12	12	12	12	0	0	60

№1.

Рассмотрим несколько случаев.

I случай: выбрано 0 универсалов. Кол-во способов выбрать команду:

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} =$

$= 3 \cdot 6 \cdot 35$

II случай: выбран 1 универсал в качестве защ.:

$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} =$

$= 36 \cdot 35$

III случай: выбран 1 унив. в качестве нап.:

$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} =$

$= 9 \cdot 6 \cdot 21$

IV случай: выбрано 2 унив. в качестве нап.:

$C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 = 9 \cdot 42$

V случай: выбрано 2 унив. в качестве защ.:

$C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^0 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} =$

$= 9 \cdot 35$

VI случай: выбрано 2 унив., 1 в качестве защ., другой — нап.

$81b^2+81d^2+b^4+d^4-2b^2d^2=162b^2$

Пусть $p=b^2$, $q=d^2$

$81p+81q+p^2+q^2-2pq=162p$

$p^2-p(2q+81)+(q^2+81q)=0$

$D=(2q+81)^2-4(q^2+81q)=4q^2+81^2+$
$+2\cdot 2q\cdot 81-4q^2-4\cdot 81q=81^2$

$$p=\frac{2q+81\pm 81}{2}$$

$\left[\begin{array}{l} p=q \text{ - не подходит, т.к т. A и C не совпадают.} \\ p=q+81 \Rightarrow b^2=d^2+81 \end{array}\right.$

~~Пусть h - расстояние между AB и CD.~~

~~S_{ACB} (п-из ΔACB) $=\frac{1}{2}hAB=\frac{1}{2}AC\cdot BC$~~

$\cancel{h=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{\sqrt{(b-d)^2+\left(\frac{b^2-d^2}{9}\right)^2}+\sqrt{(b+d)^2+\left(\frac{b^2-d^2}{9}\right)^2}}{2b}=}$

$\cancel{=\frac{\sqrt{(b-d)^2+81}+\sqrt{(b+d)^2+81}}{2b}}$

Т.к. $CD \parallel AB \parallel Ox$, расстояние между AB и CD $=\left(9-\frac{d^2}{9}\right)-\left(9-\frac{b^2}{9}\right)=\frac{b^2-d^2}{9}=\frac{81}{9}=9$.

Ответ: 9.

№2.

После покраски (сразу же) полумесяцу принадлежали точки, находящ. на расстоянии ≤ 1 от точки $(0,0)$ и на расстоянии $>\sqrt{2}$ от точки $(1,0)$. Утром полумесяцу принадле- точки, наход. на растоянии $\leq \frac{5}{4}$ от точки $(0,0)$, и при этом на расстоянии $>\sqrt{2}-\frac{1}{4}$ от точки $(1,0)$. Картинка сим. относительно Ox, поэтому достаточно найти площадь половины полумесяца.

Найдем т. пересечения новых окр. с коорд. (x,y).

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{25}{16} \\ y^2+(x-1)^2=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{33}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$x^2-2x+1+y^2$$

$$x^2-2x+y^2=\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x=\frac{25}{16}-\left(\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

По 3 сторонам в ~~ΔABC~~ ΔXBC можно найти площадь и ~~∠~~ ∠XBC. По ~~ABC~~ ~~и~~ ∠XBC можно найти площадь ~~сег~~ сектора XBC. Аналогично из ΔDAC ищется ∠DAC, с его помощью площадь сектора DAC. Площадь ΔABC можно найти по 3 сторонам. Площадь половины полумесяца тогда равна $S_{\text{сектора } DAC} + S_{\Delta ABC} - S_{\text{сектора } XBC}$.

93-60-54-32 (40.56)

$2 \cdot C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 36 \cdot 21 \cdot 2$

VII случай: выбрано 3 унив. в качестве нап.:

$C_3^3 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^0 = 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 = 18$

VIII случай: выбрано 3 унив., 2 в качестве нап. и 1 в кач. защ.:

$\cancel{C_3^3 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C}$

$C_3^3 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^1 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 36 \cdot 7$

IX случай: выбрано 3 унив., 2 в качестве защ. и 1 в кач. нап.:

$C_3^3 C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^0 \cdot C_7^2 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 9 \cdot 21$

Прим.: в 6 случае кол-во способов умножается на 2, т.к. среди 2 унив. надо выбрать 1 защ. $C_2^1 = 2$ способов (аналогично в 8 и 9 случае домножается на C_3^1).

Итого способов: $3 \cdot 6 \cdot 35 + 36 \cdot 35 + 54 \cdot 21 + 9 \cdot 42 + 9 \cdot 35 + 36 \cdot 42 + 18 + 36 \cdot 7 + 9 \cdot 21 = 35 \cdot (\cancel{9}\,36 + 18) + 42 \cdot (9 + 27 + 36) + 36 \cdot 7 + 9 \cdot 21 + 18 = 35 \cdot (9 + 7 + 36 + 18) + 21 (18 + 54 + 72 + 9) + \cancel{7} + 18 = 35 \cdot 70 + 21 \cdot 153 + 25 = 2100 + 350 + 3060 + 153 + 25 = 5450 + 153 + 85 = 5450 + 238 = 5688$.

Ответ: 5688.

№3.

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

ОДЗ: $y-x+10 \geq 0$

$\sqrt{y-x+10} = y-3 \Rightarrow y-3 \geq 0$ $\boxed{y \geq 3}$

л.ч. и пр. ч. $\geq 0 \Rightarrow$ можно возвести в квадрат.

$y-x+10 = y^2-6y+9$

$y^2-7y+x-1=0$

1 случай: $xy+4x-y-4=0$.

$xy+4x=y+4$

$x(y+4)=y+4$

$y+4>0$, т.к. $y \geq 3$

$x=1$

$y^2-7y+x-1=0$

$y^2-7y=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \text{ — не подх., т.к. } y \geq 3 \\ y=7 \end{array}\right.$

$(1;7)$ — решение

2 случай: $xy+4x-y-4>0$.

$|xy+4x-y-4| = xy+4x-y-4$.

$|y-x-8| = x-4$ (первое уравнение системы поделим на $xy+4x-y-4>0$).

93-60-54-32 (40.56)

Если $y-x-8 \geq 0$: $y-x-8 = x-4$

$y \geq x+8$ $y = 2x+4$

$x = \frac{y-4}{2}$

$y^2 - 7y + x - 1 = 0$

$y^2 - 7y + \frac{y-4}{2} + 1 = 0 \;|\cdot 2$

$2y^2 - 14y + y - 4 + 2 = 0$

$2y^2 - 13y - 2 = 0$

$D = 169 + 4\cdot 2\cdot 2 = 169 + 16 = 185$

$y = \frac{13 \pm \sqrt{185}}{4}$

$y = \frac{13+\sqrt{185}}{4}$ (т.к. $y \geq 3$)

$y \geq x+8$

$y \geq \frac{y-4}{2} + 8$

$2y \geq y - 4 + 16$

$y \geq 12$

$\frac{13+\sqrt{185}}{4} < \frac{13+15}{4} = \frac{28}{4} = 7 < 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{13+\sqrt{185}}{4}$ не подходит

Если $y-x-8 < 0$: $x+8-y = x-4$

$y < x+8$ $y = 12$

$12^2 - 7\cdot 12 + x - 1 = 0$

$144 - 84 + x - 1 = 0$

$x = -59$

$y < x+8$ – противоречие

12 и $-59+8 = -51$

3 случай: $xy+4x-y-4<0$:

$|xy+4x-y-4| = y+4-xy-4x$

$|y-x-8| = 4-x$

Если $y \geqslant x+8$: $y-x-8=4-x$

$\begin{cases} y-8=4 \\ y=12 \\ x=-59 \\ y \geqslant x+8 \end{cases}$

$xy+4x-y-4 = -59\cdot 12 - 4\cdot 59 - 12 - 4 < 0$

$\begin{cases} y \geqslant 3 \\ y-x+10 \geqslant 0 \end{cases}$

$(-59, 12)$ подходит

Иначе $y<x+8$: $x+8-y=4-x$

$2x+4=y$

$x=\dfrac{y-4}{2}$

$\begin{cases} y = \dfrac{13+\sqrt{185}}{4} \\ y<x+8 \text{ — верно} \end{cases}$

$x = $ [illegible] $\dfrac{\sqrt{185}-3}{8} > \dfrac{13-3}{8} = \dfrac{10}{8} > 1$

$xy+4x-y-4<0$

$x(y+4) < y+4$, $y \geqslant 3 \Rightarrow y+4>0$

$x<1$ — противоречие

Ответ: [illegible] $(1,7)$; $(-59,12)$.

№5.

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$

Пусть $y=\frac{x+2}{x-2}$.

$y(x-2)=x+2$

$xy-2y=x+2$

$xy-x=2y+2$

$x(y-1)=2y+2$

$x=\frac{2y+2}{y-1}$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=f(y)=\frac{2}{x-2}=\frac{2}{\frac{2y+2}{y-1}-2}=\frac{1}{\frac{y+1}{y-1}-1}=$

$=\frac{1}{\frac{2}{y-1}}=\frac{y-1}{2}$

То есть $f(y)=\frac{y-1}{2}$ $(y\neq 1)$.

$f(x)=\frac{x-1}{2}$

Пусть $f^k(x)=\underbrace{f(f\ldots f(x))}_{k}$

$f^1(x)=\frac{x-1}{2}$

Покажем, что $f^k(x)=\frac{x-(2^k-1)}{2^k}$

Индукция по k. База $(k=1)$: очев.

Переход $(k\to k+1)$:

$f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=\frac{f^k(x)-1}{2}=$

$=\frac{\frac{x-2^k+1}{2^k}-1}{2}$ (предположение индукции) $=$

$=\frac{x-2^k+1-2^k}{2^{k+1}}=\frac{x-(2^{k+1}-1)}{2^{k+1}}$

Значит $f^{12}(x)=\frac{x-(2^{12}-1)}{2^{12}}$

стр. с

 чистовик

$f^{12}(x) = \frac{x-2^{12}+1}{2^{12}} = \frac{x-4095}{4096} = g(x)$

$2^{12} = 2^2 \cdot 2^{10} = 4 \cdot 1024 = 4000+80+16 = 4096$

ответом будет $g'(0)$.

$\left(f^{12}(x)\right)' = \left(\frac{x-4095}{4096}\right)' = \frac{1}{4096} = g'(x)$.

Ответ: $\frac{1}{4096}$.

№4

Пусть по дугам AB автомобиль проезжал x раз, по дугам BC y раз, по дугам AC z раз. Тогда:

$7x+11y+17z=85$ $(x,y,z \geq 0)$
(приравниваем время) $(x,y,z \in \mathbb{Z})$

Отсюда $z \leq 5$. Если $z=5$, то $17z=85 \Rightarrow x,y=0$. Но тогда, очевидно, автомобиль не мог вернуться в A

Если $z=4$: $7x+11y=17$ – решений нет
$y \leq 1$ $y=1$: $7x=6$
$y=0$: $7x=17$.

Если $z=3$: $7x+11y=34$
$y \leq 3$; $y=3$: $7x=1$
$y=2$: $7x=12$
$y=1$: $7x=23$ – реш. нет
$y=0$: $7x=34$

Если $z=2$: $7x+11y=51$
$y \leq 4$; $y=4$: $7x=7 \Rightarrow x=1$
$y=3$: $7x=18$
$y=2$: $7x=29$
$y=1$: $7x=40$
$y=0$: $7x=51$ – реш. нет

Решение $x=1$, $y=4$, $z=2$.

$z=1$: $7x+11y=68$?
$y \leq 6$: $y=6$: $7x=2$
$y=5$: $7x=13$
$y=4$: $7x=24$
$y=3$: $7x=35 \Rightarrow x=5$
$y=2$: $7x=46$
$y=1$: $7x=57$
$y=0$: $7x=68$

стр. 7

 чистовик

Решение $x=5, y=3, z=1$.

$z=0: 7x+11y=85$

$y\leq 7$: $y=7: 7x=8$
$y=6: 7x=19$
$y=5: 7x=30$
$y=4: 7x=41$
$y=3: 7x=52$
$y=2: 7x=63 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=9$
$y=1: 7x=74$
$y=0: 7x=85$

Решение $x=9, y=2, z=0$.

Покажем, что $(9,2,0)$ не подходит. Приехать/уехать в С можно только по дуге ВС (т.к. $z=0$). Отсюда по дуге ВС автомобиль проехал 2 раза из В в С и из С в В (сразу после этого). Этот кусок пути можно выкинуть из рассмотрения, он не влияет ни на что. Но x-нечет, поэтому авто закончит путь в В.

Покажем, что $(1,4,2)$ не подходит приехать/уехать в В можно по дугам АВ и ВС. Т.к. в В мы приехали столько же раз, сколько и уехали оттуда, причём каждый раз, проходя по дугам АВ и ВС, мы либо приезжаем в В, либо уезжаем оттуда, всего суммарно по дугам АВ и ВС мы прошли чётное число раз. Т.е. $x+y$ - чётно - противоречие (это же рас. работает и для предыдущего примера). стр.8

Значит единственный оставшийся вариант: $x=5$, $y=3$, $z=1$.

~~Автомобиль проехал 5·13+21·3~~

7

Дуга $AB = \frac{1}{2}\pi d_1$, где d_1 - длина отр. AB (также диаметр окр. AB).

$d_1 = \frac{2AB}{\pi} = \frac{26}{\pi}$

d_2 - диаметр окр. BC, d_3 - AC.

$\frac{1}{2}d_2\pi =$ дуга $BC = 21$

$d_2 = \frac{42}{\pi}$.

$d_3 = d_1 + d_2$ (отр. AC = отр. AB + отр. BC)

$d_3 = \frac{26+42}{\pi} = \frac{68}{\pi}$

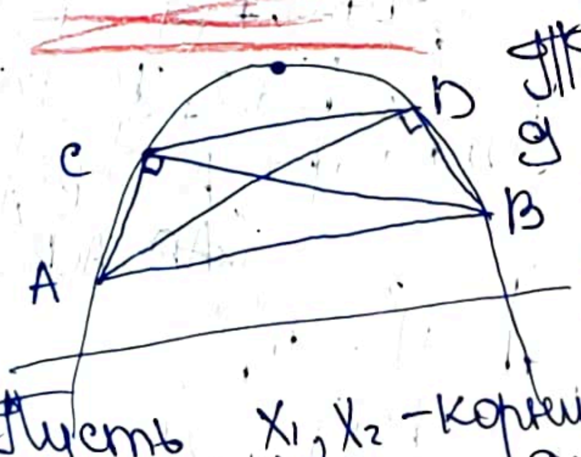
Значит $\breve{AC} = \frac{1}{2}\pi d_3 = \frac{68}{2} = 34$.

Значит автомобиль проехал:

Итого $5\cdot13+21\cdot3+34 = 65+63+34 = 128+34 = 162$ км.

Ответ: 162 км.

№6.



$y = a + bx^2$

Т.к. высота туннеля равна 9 и он сим. отн. прямой $x=0$, коорд. вершины пар. $(0,9)$, откуда $a=9$.

Пусть x_1, x_2 - корни $a + bx^2 = 0$

По т. Виета $\begin{cases} x_1+x_2 = 0 \\ x_1x_2 = -\frac{a}{b} \end{cases}$

$(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4\frac{a}{b}$

Расстояние между корнями - это ширина туннеля.

Отсюда $18^2 = (x_1 - x_2)^2 = \frac{4a}{b}$

$\frac{4a}{b} = 18^2$

$\frac{a}{b} = 81 \Rightarrow a = 81b \Rightarrow b = \frac{a}{81} = \frac{1}{9}$

уравнение параболы: $9 - \frac{x^2}{9}$

НУО, D правее т. C, B правее A.

Пусть x-коорд. точки D равна d, точки B равна b.

Тогда x-коорд. C равна $-d$, x-коорд. A равна $-b$.

Отр. AB равен $2b$, CD равен $2d$.

Коор. A $\left(-b, 9 - \frac{b^2}{9}\right)$

B $\left(b, 9 - \frac{b^2}{9}\right)$

C $\left(-d, 9 - \frac{d^2}{9}\right)$

D $\left(d, 9 - \frac{d^2}{9}\right)$

Отр. AC равен $\sqrt{(-b+d)^2 + \left(\frac{b^2}{9} - \frac{d^2}{9}\right)^2}$

Отр. BC равен $\sqrt{(b+d)^2 + \left(\frac{b^2}{9} - \frac{d^2}{9}\right)^2}$

По т. ~~Пифагоа~~ Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$

($\angle ACB = 90$)

$(b-d)^2 + 2\left(\frac{b^2}{9} - \frac{d^2}{9}\right)^2 + (b+d)^2 = 4b^2$

$2b^2 + 2d^2 + 2\cdot\left(\frac{b^4}{81} + \frac{d^4}{81} - 2\frac{b^2d^2}{81}\right) = 4b^2 \,\Big|\, \cdot\frac{81}{2}$

~~$162b^2 + 162d^2 +$~~

60 (шестьдесят) (Ко-чвер) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ черновик

93-60-54-32 (40.56)

1 б 2 з 3 н $(64)^2=(60+4)^2=3600+480+16=$
$=4096$

3 б 43 з 7 н +3 у

$153+85=100+100+53-15=238$

$43-5=38$

0: $1\cdot C_4^2\cdot C_7^3$

1: $C_3^1\cdot C_5^2\cdot C_7^3$

$C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_7^3$

$C_3^1\cdot C_4^2\cdot C_8^3$

2: 1) $(xy+4x-y-4)\,|y-x-8|=$

$=(x-4)\,|xy+4x-y-4|$

$\sqrt{y-x+10}=y-3$

$f\left(1+\frac{4}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$

$f(f(x))=$

$y-x+10\geq 0$

$g(x)=f(f(\dots f(x)))$

$y\geq 3$

$y=\frac{x+2}{x-2}$

$xy-2y=x+2$

$y-x+10=y^2-6y+9$

$1+\frac{4}{x-2}=y$

$x+2=y(x-2)$

$y^2-7y+x-1=0$

$xy-2y=x+2$

$xy-2y-x-2=0$

1) $xy+4x=y+4$

$xy+4x-y-4>0$

$x(y+4)=y+4$

$|y-x-8|=x-4$

$x-4\geq 0$

$x=1$ $y\geq 3$

$f(0)=\frac{-1}{2}$

$\frac{2(y-1)}{}$ $\frac{2y+2-2y+2}{y-1}=$

$10^{100}-1$ $y=7$

$S(2n)=S(n)$ $y-x-8=x-4$

$S(3n)=S(n)$

$S(n^2)=S(n)$

100-значное $S(n)$ — сумма цифр

$y=2x+4$

$f(y)=\frac{y-1}{2}$

$\forall\, m\in n$ $S(mn)=S(n)$

10^{99} $S(9n)=S(n)$ $S(n)\,\vdots\,9\Rightarrow n\,\vdots\,9$ $y\neq 1$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$7x+11y+17z=85$

$z=5$ – не ок

$z\le 4$:

$z=4$ – не ок

$z=3$: $7x+11y=3\cdot 17$

$11 \vdots 17$ – 6

$7x+11y \vdots 17$

$7x+11y=34$ – не ок

$7x+11y=51$

$7+44=51$

$x=1,\ y=4,\ z=2$

$z=1$: $7x+11y=68$

$y=3 \quad z=1$

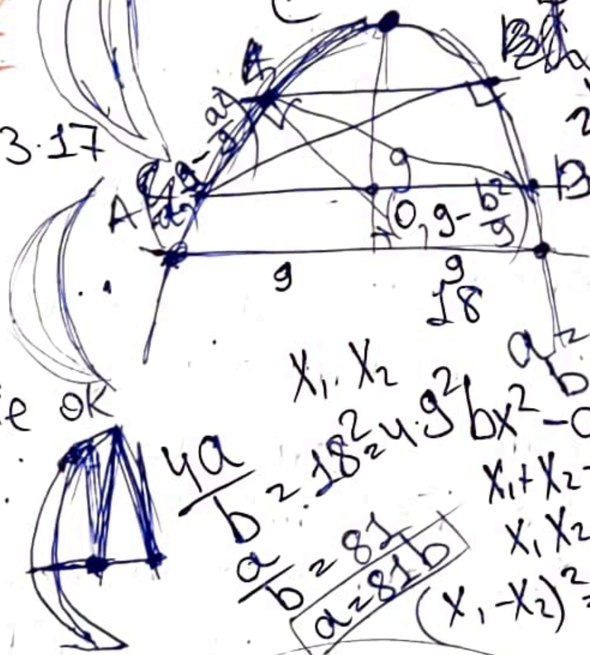
$x=5$

$35+33=68$

$z=0$: $7x+11y=85$

$x=9 \quad y=2 \quad z=0$

$63+22=85$



$g-\frac{x^2}{g}$

$\left(d, g-\frac{d^2}{g}\right)$

$2d$

$2b$

$\left(0, g-\frac{b^2}{g}\right)$

g

$\frac{g}{18}$

$a=g$, $b=\frac{1}{g}$

x_1, x_2

$bx^2-a=0$

$x_1+x_2=0$

$x_1x_2=\frac{-a}{b}$

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4a}{b}$

$\frac{4a}{b}=18^2=4\cdot 9^2$

$\frac{a}{b}=81$

$\boxed{a=81b}$

$\sqrt{d^2+\left(\frac{b^2-d^2}{g}\right)^2}=b$

$1\le m\le n$

$S(mn)=S(n)$

100-значное

$10^{99}\le n\le 10^{100}-1$

$S(2n)=S(n)$

$S(3n)=S(n)$

$S(n^2)=S(n)$

$\sqrt{(b-d)^2+\left(\frac{b^2-d^2}{g}\right)^2}+\sqrt{(b+d)^2+\left(\frac{b^2-d^2}{g}\right)^2}=4b^2$

$S(mn)=S(n)$

$S(9n)=S(n)$

$b-d=t$

$b+d=s$

$st=81$

$\frac{\sqrt{81+s}+\sqrt{81+t}}{2s}$

$=\frac{s-t}{2s\left(\sqrt{81+s}-\sqrt{81+t}\right)}$