0 020471 020000

02-04-71-02
(38.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Зотова Антона Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
02-04-71-02	80	10	15	15	15	0	10	15	

02-04-71-02
(38.1)

Чистовик стр 1/9

80 (восемьдесят)

№1 по теореме Виета

$-a = x_1 + x_2 = \frac{1}{m} - 2 + \frac{1}{n} - 2 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2$

$b = x_1 x_2 = \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4$

когда целое $-a$?

когда целое $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

нужно оно ~~быть~~ равно ~~быть не~~ 0 может, ~~тогда~~ быть когда $m=-n$

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq 1$

если ~~m~~ ~~ли m~~ ~~mod~~ одно из m или $n = 1$, то второе должно быть не дробное $\frac{1}{x}$ значит тоже равно 1 получим пару $(1;1)$ если ничего из этого $\neq 1$, то чтобы $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq 1$ нужно чтобы они оба были равны 2. так же и для $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 1$

получим пары $(n;m) = \{(1;1); (2;2); (-1;-1); (-2;-2)\}$

и все пары когда $m=-n$

b тоже целое

когда $n=-m$ слагаемое $-\frac{2}{m} - \frac{2}{n}$ обращается

$\frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - 4$ в ноль, остается лишь $\frac{1}{mn}$, которое не дробное

лишь при $(-1;1)$

так же проверим целость b для этих пар

подошли только $(1;1)$ и $(-1;-1)$

в итоге $(1;1); (-1;-1); (-1;1); (1;-1)$

подставим всё это в

$a+b = \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + 2 + 2 =$

$= \frac{1}{mn} - \frac{3}{m} - \frac{3}{n} + 8 = \frac{1-3m-3n}{mn} + 8$

получились такие суммы: $\{3; 15; 7\}$ повторилось дважды

Ответ: 3; 7; 15

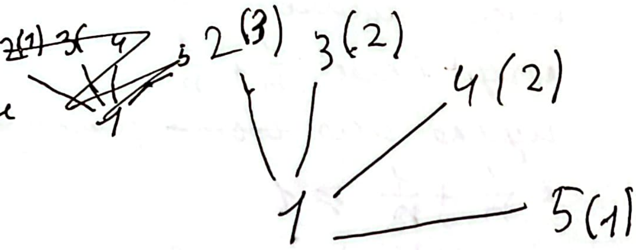
Чистовик стр 2/9

№2

запишем соседей для каждого числа на кубике и снизу запишем, сколько соседей превосходят данное число

3	3	5	1	1	~~3~~ 2
2 1 5	6 2 1	6 3 1	2 4 5	3 5 4	3 6 4
4	4	2	6	6	5
4	~~4~~ 3	2	2	1	0

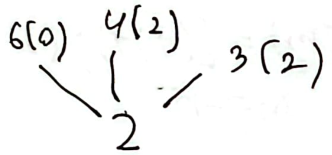
~~из ед~~ пути из единицы



В скобках записано то самое число соседей просуммируем его $3+2+2+1=\cancel{6}\ \cancel{7}\ 8$

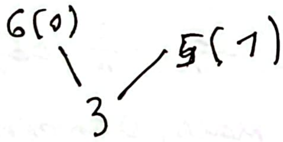
Итого 6 различных последовательностей если начинать из 1

для 2



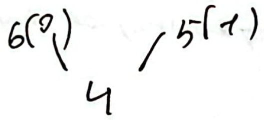
$0+2+2=4$

для 3



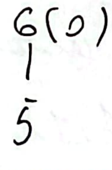
$0+1=1$

для 4



$0+1=1$

для 5



0

Суммарно:

$8\ \cancel{7}\ \cancel{6}+4+1+1=\cancel{12}\ \cancel{13}\ 14$

Ответ: ~~12~~ 14

Чистовик стр 3/9

№3

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$\cancel{=\frac{2bc}{a}-a+1+\frac{2ca}{}}$$

$$\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$$

$$=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3$$

если $a=b=c$, то $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c=0$

перепишем слагаемые как

$$x_1+x_2+x_3-x_4-x_5-x_6$$

~~если мы увеличим~~ при этом $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x$

если мы увеличим например a в несколько раз

например в k раз, то получим

$$x_1\cdot\frac{1}{k}+x_2\cdot k+x_3\cdot k-x_4\cdot k-x_5-x_6$$

это сократится, это не изменится

$$x_2\cdot k+x_1\cdot\frac{1}{k}$$

~~разумеется $k \geq 1$ по задумке~~

раньше $x_1+x_2=2x$, теперь $x\cdot k+x\cdot\frac{1}{k}=x(k+\frac{1}{k})$

$x(k+\frac{1}{k}) \geq x_1+x_2$ при любом k даже $k<1$

ведь при $k \geq 1$ это очевидно, а при $k<1$ слагаемое $\frac{1}{k}$ будет больше 1. при этом k не может быть <0 т.к $a,b,c>0$ по условию

тогда ~~$a=b=c$~~ минимум при $a=b=c=d$

$$\frac{d^2}{d}+\frac{d^2}{d}+\frac{d^2}{d}-d-d-d+3=3$$

Ответ: 3

Чистовик стр. 4/9

№4 ~~Всего на перв~~ если у нас 5 девочек и между ~~ними~~ каждыми из них есть место ~~для~~ ~~мальчи~~ это 4 места, пятое может быть между двумя из девочек, или где-то сбоку, ~~10~~ 6 вариантов, где может быть это пятое место (5+1)

● – место девочки   о – любое другое место ~~из 10~~ девочек из первого ряда

1. ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ●
2. ~~○~~ ● ○ ○ ● ○ ● ○ ● ○ ●
3. ● ○ ● ○ ○ ● ○ ● ○ ●
4. ● ○ ● ○ ● ○ ○ ● ○ ●
5. ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ○ ●
6. ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○

для каждого из таких вариантов:
для посадки первой девочки всего 5 вариантов (5 – ●)
второй 4, третьей 3... и того: 5!
для посадки первого из мальчиков или учительницы 5 вариантов (пять белых точек о), для второго 4, ... для последнего 2 и того: $5 \cdot 4 \cdot \cancel{2}\, 3 \cdot 2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$
итого: $5! \cdot 5!$ для варианта
и это для каждого из 6 вариантов
всего: $5! \cdot 5! \cdot 6 = 120 \cdot 120 \cdot 6 = 14400 \cdot 6 =$
86400

Ответ: 86400

02-04-71-02 (38.1)

Чистовик стр. 5 / 9

№ ~~5~~ 6

а) Это будет, когда выливаемая за день вода, т.е $\frac{V}{2}$ была бы равна доливаемой, то есть 5л

$\frac{V}{2} = 5л$

$V = 10л$

~~б)~~ ~~в~~ иным решением будет то, что к n дню ~~вода~~ изначальная вода в кувшине ~~в~~ станет $\frac{7}{2^n}$ та вода, которую долили в ~~то~~ первый день будет $\frac{5}{2^{n-1}}$, ту которую залили во второй $\frac{5}{2^{n-2}}$, та которую залили позавчера $\frac{5}{2^2}$, та которую залили вчера $\frac{5}{2^1}$, та которую залили сегодня $\frac{5}{2^0}$

~~итого $\frac{7}{2^n} + 5\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 10 + \frac{7}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - 10 = 5 + \frac{7}{2^n} - \frac{2}{2^n}$~~

итого ~~$\frac{7}{2^n} + 10 -$~~ $\frac{7}{2^n} + 5\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$

$= \frac{7}{2^n} + 10 - \frac{5}{2^{n-1}} = 10 + \frac{7}{2^n} - \frac{10}{2^n} = 10 - \frac{3}{2^n}$

может принимать бесконечно малые значения

мы хотим, чтобы $\frac{3}{2^n}$ составляло не ~~менее~~ более 0,1%

$10 \cdot 0{,}1\% = 0{,}001$

$\frac{3}{2^n} \le 0{,}001$

$3 \le 0{,}001 \cdot 2^n$

подбираем $n = 12$, а дальше уже нас не интересует

ведь важен первый такой день

Ответ: 10л ; на 12 день

Чистовик стр 6/9

№ 7 (начало) Сколько раз за время ~~АВ~~ 85 мин (1 час 25 мин) автомобиль мог теоретически проехать по дуге АС. От 0 до 5 раз, т.к 17·6 уже больше 85.

~~Если он проех~~ 5 раз он проехать не мог т.к если он ездил только по АС, то чтобы вернуться необходимо проехать четное кол-во раз допустим он проехал 4 раза, значит ещё 17 мин он ездил по другим трассам, но никакие сочетания ВС и АВ ~~АВ~~ (11 мин и 7 мин) не дают в сумме 17. Получается, что он мог проехать от ~~К~~ 1 до 3 раз по трассе АС

$85 - 17 \cdot 3 = 34$

тогда опять запишем $34 = n \cdot 11 + m \cdot 7$ ~~$n, m \in N$~~ $n, m \in \mathbb{Z}$

сколько он ездил по другим трассам

подставив возможные значения n от 0 до 3 не находим возможных m

значит 3 раза по АС он так же проехать не мог

если он проехал 2 раза

$85 - 17 \cdot 2 = 51$

$51 = n \cdot 11 + m \cdot 7$ ~~м~~

$n = 4 \quad m = 1$

рассмотрим этот проезд по АВ если он ехал в направлении ~~АВ~~ ВА, то повернём время вспять, от чего решение не изменится но объяснение будет удобнее

Чистовик стр 7/9

№7 (продолжение) таким образом в какой-то момент автомобиль заехал в точку B по AB, вернуться исходя из $n=1$ (ведь дальше по AB он не ездил) он мог только по BC, ~~если~~ а уехать из B он должен был обязательно т.к в конце оказался в A.
В другие моменты он ещё $4-1=3$ раза ездил по BC, но если он заехал в точку B по BC, то вернуться может тоже только по BC, значит 3 должно быть чётным но это не так. Тогда вариант, что он ездил по AC 2 раза тоже не подходит, рассмотрим, ~~когда~~ он ездил 1 раз
~~но~~ всё сходится $n = \cancel{2}\ 3$; $m=5$
~~а~~ если бы он не ездил по AC, то $n=2; m=9$
~~и~~ опять же сумма $n+m$ была бы нечётные и попав в какой-то момент в B автомобиль бы не выехал.

Получается, что по AB он ездил 5 раз, по BC 3 раза, по AC один раз, ~~а~~ а пример маршрута:

ACBABCBABA

осталось найти длину дуги AC

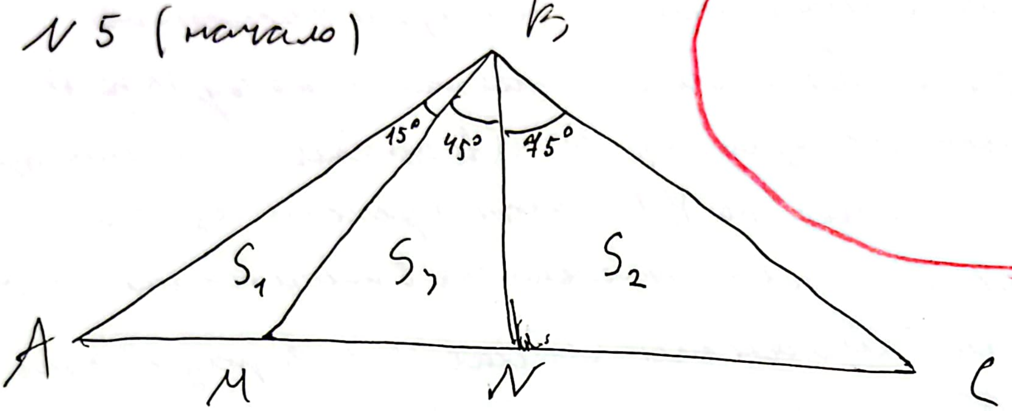
$$\left(\frac{15}{2\pi}+\frac{25}{2\pi}\right)\cdot 2\pi = 15+25=40 \text{ км}$$

$$40\cdot 1+15\cdot 5+25\cdot 3=$$
$$=40+75+75=190 \text{ км}$$

Ответ: 190 км

Чистовик стр 8 / 9

N 5 (начало)



~~высоты треугольников опущенная из B треугольников $\triangle ABM$ и $\triangle NBC$ равны значит~~ ~~$\frac{AM}{NC} = \frac{S_1}{S_2}$~~

будем выражать ~~ф~~ площади по ~~формуле~~

~~$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, где α угол между сторонами a и b.~~

$S_1 = \cancel{AB \cdot B} \; BA \cdot BM \cdot \sin 15°$ (1)

$S_2 = \cancel{AB} \; BN \cdot BC \cdot \sin 75°$ (2)

$S_{общ} = AB \cdot BC \cdot \sin 135$ (3)

$S_3 = BM \cdot BN \cdot \sin 45 = S_{общ} - (S_1 + S_2)$ (4)

~~из (1) и (2):~~

~~$BA = \frac{S_1}{BM \sin 15°}$~~

~~$BC = \frac{S_2}{BN \sin 75°}$~~

$S_{общ} = BA \cdot BC \cdot \sin 135° = \frac{S_1 S_2 \sin 135°}{BM \cdot BN \cdot \sin 15° \cdot \sin 75°}$ (5)

~~Из~~ из (4): $BM \cdot BN = \frac{S_{общ} - (S_1 + S_2)}{\sin 45}$

Чистовик стр 9/9

15 (продолжение)

подставим в (5)

$$S_{общ} = \frac{S_1 S_2 \sin 135^\circ}{\frac{(S_{общ} - (S_1 + S_2))}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ} =$$

$$= \frac{S_1 S_2 \sin 135^\circ \cdot \sin 45^\circ}{(S_{общ} - (S_1 + S_2)) \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ} =$$

$$= \frac{5 \sin 135^\circ \cdot \sin 45^\circ}{(S_{общ} - 3) \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}$$

$\cancel{S_{общ}^2 \cdot S \sin 15^\circ \sin 75^\circ}$

$$S_{общ}^2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ - S_{общ} 3 \sin 15^\circ \sin 75^\circ = 5 \sin 135^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{общ}^2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ - S_{общ} \cdot 3 \sin 15^\circ \sin 75^\circ - 5 \sin 135^\circ \sin 45^\circ = 0$$

отсюда находим $S_{общ}$

Ответ: $S_{общ} = \dfrac{-9 \sin 15^\circ \sin 75^\circ \cancel{D} + \sqrt{9 \sin^2 15^\circ \sin^2 75^\circ + 20 \sin 135^\circ \sin 45^\circ \sin 15^\circ \sin 75^\circ}}{2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ}$

Черновик $\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_1}{k_2}+k_1k_2-k_1-k_2$

$\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)$ $\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_1}{k_2}+k_1k_2-k_1-k_2$

$k_1k_2+k_1k_2+k_1^2k_2^2-$

$-a=\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2$ $a=-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+4$

$b=\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4$ 2 2

$\cancel{\frac{1}{mn}}-$ $\cancel{k}$ $\cancel{x_1+x_2+x}$ $\cancel{k_1k_2}$

$\frac{k^2}{k_1}+\frac{k_1}{k_2}+k_1k_2$ k_1+k_2

$a+b=\frac{1}{mn}-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}+8=$ $(-a+b+c)\cdot$

$-$

k

$a+b+c$ $k^2+k_1^2+k_2^2k_2^2$
$a+b+c$

$=\frac{1}{mn}-\frac{3m}{mn}-\frac{3n}{mn}+8=$

$=\frac{1-3m-3n}{mn}+8$ $(a+b+c)^3=$ $k_2^2+k_1^2+k_2^2k_1^2=k_1^2k_2+k_1^2k$

$\cancel{ac+ab}+a^2(k_1+k_2)^2$ $k_1k_2(k+k)$

$\cancel{ab}+$ $+a^2-a^2$

$\frac{-2}{m+n}$ $\cancel{AD}$ $\frac{1-3m-3n}{mn}$

$\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$

$=\cancel{ac}\frac{bc}{a}-a+\frac{ac}{b}-b+\frac{ab}{c}-c+3$ $\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}$

2 2

$c\left(\frac{a}{b}-1\right)$ $a\left(\frac{c}{b}-1\right)$ $b\left(\frac{a}{c}-1\right)$

$$\begin{array}{r} 14400 \\ 6 \\ \hline 86400 \end{array}$$

$\cancel{\frac{b^2 ac^2}{abc}}$ $\cancel{\frac{b^2c^1}{abc}+\frac{a^2c^2}{abc}+\frac{a^2b^2}{abc}-\frac{abc^2}{abc}-\frac{ba^2c}{abc}-\frac{ca^2b}{abc}}+$

$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c$ $\frac{3abc}{abc}$ $\cancel{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$x\frac{k_1k_2}{k_3}+x\frac{k_1k_3}{k_2}+\frac{k_2k_3}{k_1}-k_1-k_2-k_3$ $\cancel{k}$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_7+x_6$

Черновик

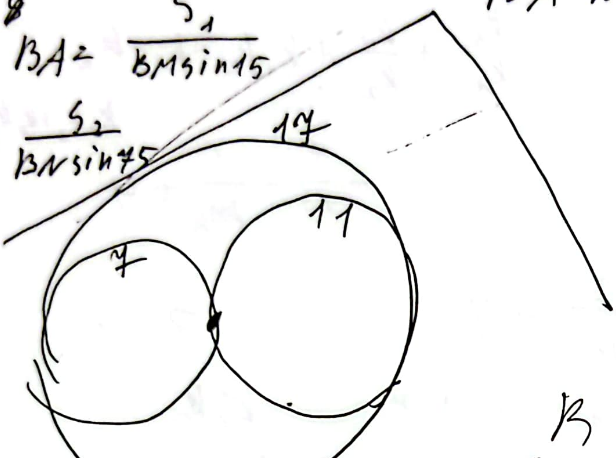
$85 \quad 17\cdot 5$ $\quad$ 85π

$BA\cdot BC=$

a	
7	8
6	19
5	30
4	41
3	52
2	63

$BA=\dfrac{S_1}{BM\sin 15}$

$BC=\dfrac{S_2}{BN\sin 75}$

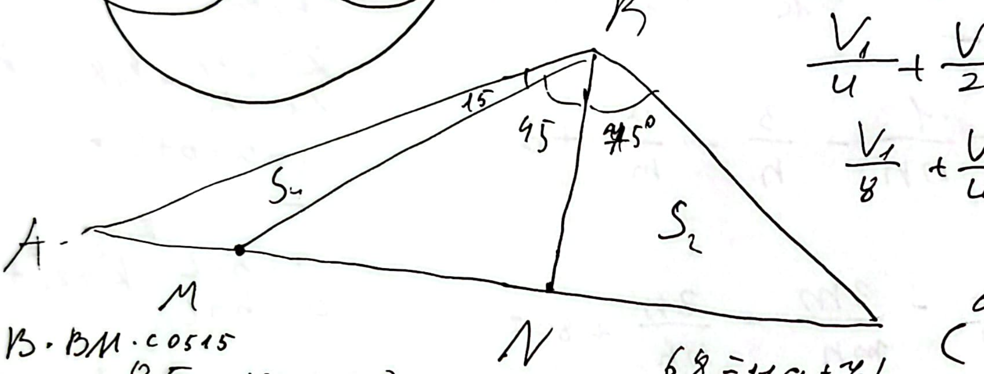


$\dfrac{\dfrac{\dfrac{V_1}{2}+V_2}{2}+V_2}{2}+V_2$ $\quad$ I 9

$\cancel{\dfrac{V_1}{4}+\dfrac{V}{2}+V+}$

$\dfrac{V_1}{4}+\dfrac{V_2}{2}+V_2$

$\dfrac{V_1}{8}+\dfrac{V_2}{4}+\dfrac{V_2}{2}+V_2$



6	2
a 5	13
4	24
3	35
3	7

$AB\cdot BM\cdot\cos 15$

$85-17=68$ $\quad$ $68=11a+7b$

$S_1=AMh$ $\quad$ $S_1+S_2=5$ $\quad$ $S_1=5-S_2$

$S_2=NCh$ $\quad$ $S_1S_2=3$

$k_1=\dfrac{15}{2M}$ $\quad$ $k_2=\dfrac{25}{2M}$

$h(AM+NC)=5$ $\quad$ $S_2(5-S_2)=3$

$5S_2-S_2^2=3$

$k_3=k_1+k_2=h^2\cdot AM\cdot NC=3$

$S_2^2-5S_2+3=0$

$\dfrac{40}{2M}\cdot 2M=40$

~~$AM=NC=$~~

$\dfrac{AM}{NC}=\dfrac{S_1}{S_2}$ $\quad$ $3{,}5+5-$ $\quad$ $85-17\cdot 2=$

$=51$

$\dfrac{V_1}{2}+V_2$

~~NC~~

$51=11n+7m$

44

$11a+7b$

$n=4 \quad m=1$

$\dfrac{V_1}{2^1}+V_2\left(2-\dfrac{1}{2^{1-1}}\right)$

$17\cdot 3$

51

$34=17a+7b$

$7+7+7+7+7$

$7+7+7+11$

$7+7+11+11$