



73-02-18-65  
(40.60)



# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Москва  
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Шванова Андрей Алексеевича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

АИ

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
12	0	12	12	12	12	0	0	60

Чистовик

73-02-18-65

(40.60)



№5.

$$y = f(x)$$

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$$

Пусть  $\frac{x-2}{x+2} = t$ . Тогда  $x-2 = t(x+2) \Rightarrow x = \frac{2t+2}{1-t}$ .

$$f(t) = -\frac{2}{\frac{2t+2}{1-t} + 2} = -\frac{2}{\frac{2t+2+2-2t}{1-t}} = -\frac{1-t}{2} = \frac{t-1}{2}$$

Получаем, что  $f(t) = \frac{t-1}{2}$ , т.е.  $f(x) = \frac{x-1}{2}$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_n = \frac{x - (2^n - 1)}{2^n}$$

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_{11} = \frac{x - (2^{11} - 1)}{2^{11}}$$

т.е.  $g(x)$  - прямая  $\Rightarrow$  касательная к графику в т.  $x=0$  - эта же прямая

$$g(x) = \frac{1}{2^{11}}x - \frac{2^{11}-1}{2^{11}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2^{11}}$$

т.е. значение угла наклона касательной к  $g(x)$  в т.  $x=0$  - значение производной  $g'(x)$  в т.  $x=0$ , т.е.  $g'(0)$

Ответ:  $\frac{1}{2^{11}}$ .



Числовик

№1.

Рассмотрим все случаи, разделив их на непересекающиеся по количеству универсалов в защите и нападении (У в 3 универсала в защите, У в 2 универсала в защите и нападении):

	У в 3	У в 2
1) 0	0	0
2) 0	1	1
3) 0	2	2
4) 0	3	3
5) 1	0	0
6) 2	1	1
7) 2	1	1
8) 1	2	2
9) 1	1	2

$$1) C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = 3 \cdot 3 \cdot 35 = 315$$

↑ защита    ↑ защита    ↑ нап.

$$2) C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2 \cdot C_3^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = 3 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 3 = 1134$$

$$3) C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 = 378$$

$$4) C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^3 = 3 \cdot 6 = 18$$

$$5) C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 35 = 1260$$

$$6) C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_9^3 = 3 \cdot 3 \cdot 84 = 756$$

$$7) C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^2 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 2 = 1512$$

$$8) C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^2 \cdot C_1^1 = 3 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 1 = 189$$

$$9) C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^1 \cdot C_2^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 = 252$$

Итого:  $315 + 1134 + 378 + 18 + 1260 + 756 + 1512 + 189 + 252 = 5688$

1134  
+1512  
-----  
2646  
+1260  
-----  
3906  
+ 630  
-----  
4536  
+ 378  
-----  
4914  
+ 315  
-----  
5229  
+ 189  
-----  
5418  
+ 252  
-----  
5670  
+ 18  
-----  
5688

Ответ: 5688 способов.



Чистовик

73-02-18-65  
(40.60)

№3.

$$\begin{cases} (xy+2x-y-2) |y-x-10| = (x-4) |xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

Отр.:  

$$\begin{cases} y-x \geq -8 \\ y \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x(y+2)-1(y+2)) |y-x-10| = (x-4) |xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+2) |y-x-10| = (x-4) |x-1| (y+2) \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

~~при y = -2 не корень~~, значит, можно сократить на (y+2):  
 (при y = -2 отр.)

$$\begin{cases} (x-1) |y-x-10| = (x-4) |x-1| & (y+2 \geq 0 \text{ и } y \geq 5 \text{ отр.}) \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

при x = 1:

$$\sqrt{y+8} = y-5$$

$$y+8 = y^2 - 10y + 25$$

$$y^2 - 11y + 17 = 0$$

при y = 2 не кор.  
 при y = 9 кор.

при x ≠ 1

раскроем модуль и сократим на (x-1):

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ |y-x-10| = x-4 \\ x \leq 1 \\ |y-x-10| = 4-x \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ |y-x-10| = x-4 \\ x \leq 4 \\ |y-x-10| = 4-x \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2x + 6 \\ y = 14 \\ x = 4 \\ y = 2x + 6 \\ y = 14 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

~~Скученный блок записей с вычеркнутыми формулами и уравнениями.~~

① 
$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 4 \\ y \neq 14 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 9 \\ 2-x = 81 \\ x = -5 \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} x = y \\ x \leq 4 \\ y = 2x + 6 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+14} = 2x+1 \\ x+14 = 4x^2+4x+1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

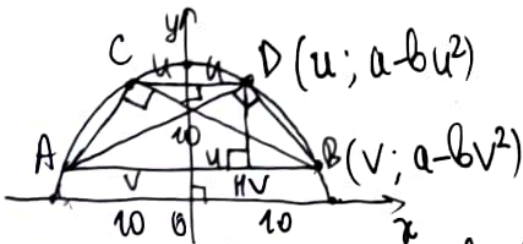
$$\begin{aligned} -3 + \sqrt{217} &\leq 4 \text{ не кор.} \\ \sqrt{217} &\leq 7 \\ 217 &\leq 361 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3x - 13 &= 0 \\ D &= 9 + 13 \cdot 16 = 217 > 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8} \\ x &= \frac{-3 - \sqrt{217}}{8} < 0 \text{ не кор.} \end{aligned}$$

Ответ: (1; 9); (-5; 14)

Чистовик

№6.



Введем ПСК с  $\text{от. } O(0;0)$  в середине пола.  
(в поперечном сечении)

Точка D имеет координаты  $(u; a-bu^2)$   
B имеет координаты  $(v; a-bv^2)$

Высота равна 10  $\Rightarrow a - b \cdot 0^2 = 10 \Rightarrow a = 10$

Ширина равна 20  $\Rightarrow a - b \cdot 10^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

Тогда расстояние между балками равно:

I. Расстояние отрезком точек B и D, т.е.  $a - bu^2 - (a - bv^2) = b(v^2 - u^2)$

II. Высоте трапеции ~~ACDB~~ ACDB и пр-ка ADB-н/уг.

III. к. картинка симметрична отн-ко Oy, то ACDB - пр-б трап.

DH - выс. н/уг  $\Delta \Rightarrow DH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{(u+v)(v-u)} = \sqrt{v^2 - u^2}$

Итого:  $b(v^2 - u^2) = \sqrt{v^2 - u^2}$   $bt = \sqrt{t}$   $t(bt - 1) = 0$   
 $v^2 - u^2 = t$   $bt^2 = t$   $\begin{cases} t = 0 & \text{не пошла на сущест} \\ t = \frac{1}{b} \end{cases}$

$v^2 - u^2 = \frac{1}{10} = 100$

$\rho = \sqrt{100} = 10$

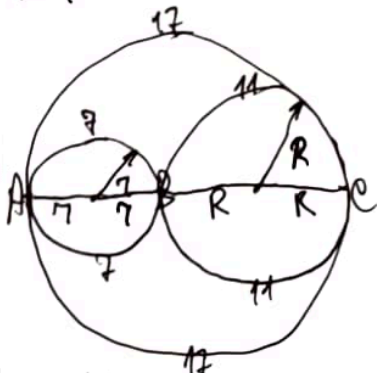
Получили, что  $\rho$  равно высоте туннеля, то невозможно.

Ответ: такое невозможно.



Числовик

№4.



$AB = 15 \text{ км} = \pi r$   
 $BC = 25 \text{ км} = \pi R$

Найдём ~~длину окружности~~ ~~длину окружности~~ ~~длину окружности~~  
 длину окруж AC: (так  $D = 2R + 2r$ )

$\pi(R+r) = \pi R + \pi r = 15 + 25 = 40 \text{ км}$

Он ~~вдвигается~~ <sup>вдвигается</sup> в ч. А ~~вдвигается~~

- 1) путь 14 км ( $AB \rightarrow AB$ )
- 2) путь 34 км ( $AC \rightarrow AC$ )
- 3) путь 25 км ( $AC \rightarrow CB \rightarrow BA$ )
- 4) путь 26 км ( $AB \rightarrow BC \rightarrow CB \rightarrow BA$ )

Рассмотрим переборки получим, что:

1) 25 км, т.е. 85 км  $85 = 36 + 14 + 35$  ← сумма  
найд. вариантов  
из перебора

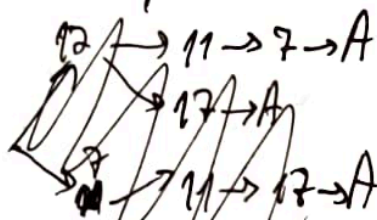
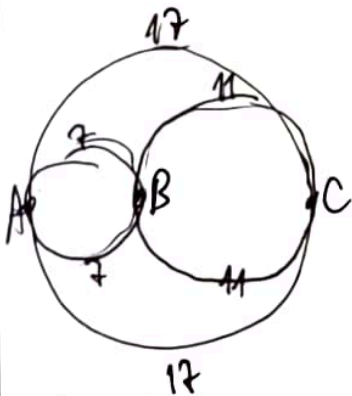
Итого, расстояние равно:

$S = 2(AB+BC) + 2AB + AC + BC + AB = 5AB + 3BC + AC =$   
 $25 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 40 = 190 \text{ км}$

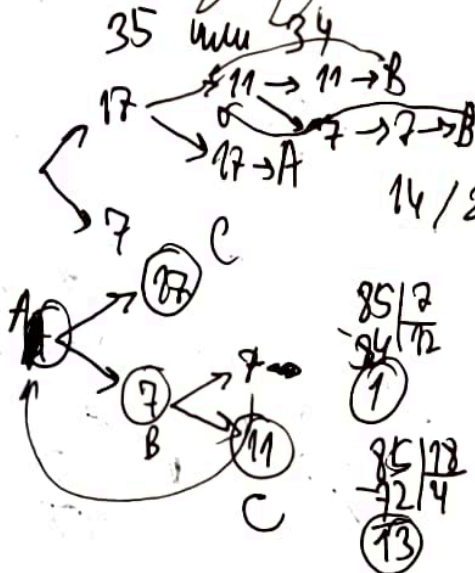
Ответ: 190 км.



Черновик



- 34
- 14
- 35
- 36



$$\begin{array}{r} 85 \overline{) 7} \\ \underline{84} \phantom{0} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \overline{) 11} \\ \underline{85} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \overline{) 12} \\ \underline{84} \phantom{0} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \overline{) 17} \\ \underline{85} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x \leq y + 8 \\ y - x \geq -8 \\ y \geq 5 \end{cases}$$

$$(x-1)(y+2) \leq y+7 \quad |y-x-10| = (x-4) \quad |x-1|(y+2) \geq 7$$

$$\geq y-x-10 \leq (y+4)(y+7) \cdot (y+2)$$

$$(x-1) |y-x-10| = (x-4) |x-1|$$

$$y-x-10 \geq -x-5$$

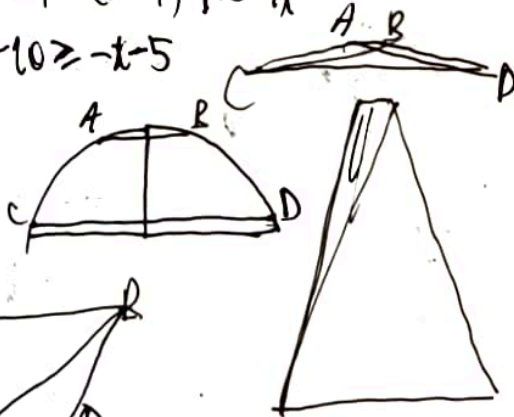
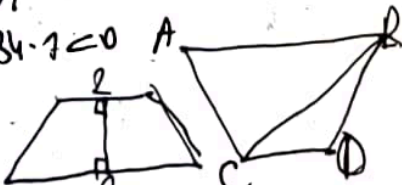
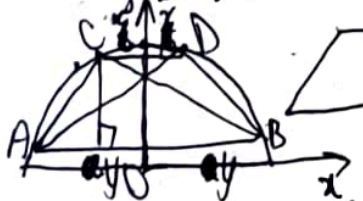
$$\sqrt{y-9} = y-5$$

$$\sqrt{y-9} = y-5$$

$$y-9 = y^2 - 10y + 25$$

$$y^2 - 11y + 34 = 0$$

$$D = 52 - 34 \cdot 4 < 0$$



$$(y-x)^2 + h^2 = AC^2$$

$$40^2 = 2h^2 + (y-x)^2 + (y+x)^2$$

$$a - bx^2 - (a - by^2) = b(y^2 - x^2)$$

$$a - b \cdot 0^2 = a = 10$$

$$a - b \cdot 100 = 100$$

$$10 - \frac{1}{10}x^2$$

$$b = \frac{1}{10}$$

$$1,5$$





Черновик

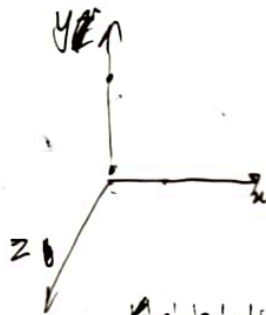
№1.

I. Нет универсальных

3. ~~C<sub>4</sub><sup>2</sup>~~ · C<sub>7</sub><sup>3</sup>

II. универсальны в защите

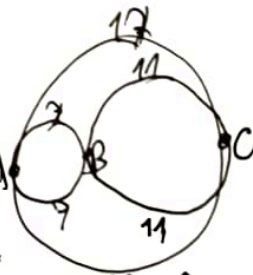
3. C<sub>4</sub><sup>1</sup> · C<sub>7</sub><sup>3</sup> + 3 · C<sub>3</sub><sup>1</sup> · C<sub>7</sub><sup>2</sup>



3333'ууу ННННННН

III. универсальны в мат.

C<sub>3</sub><sup>1</sup> · C<sub>4</sub><sup>2</sup> · C<sub>7</sub><sup>2</sup> + 3 · C<sub>4</sub><sup>2</sup> · C<sub>7</sub><sup>1</sup> · C<sub>3</sub><sup>2</sup> + 3 · C<sub>4</sub><sup>2</sup> · C<sub>3</sub><sup>3</sup>

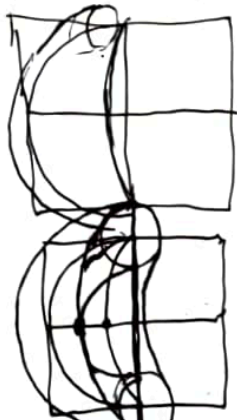


IV. универсальны в боях

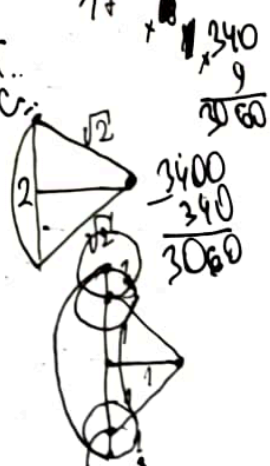
7x + 11y + 17z = 95    4y + 3z = 1

85

y = 1 (max)



-abcd...  
-abc...



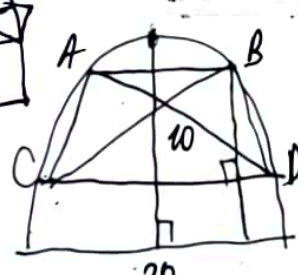
340  
9  
3060

3400  
340  
3060

$$\begin{cases} (xy + 2x - y - 2) | y - x - 10 | = (x - 4) | 2y + 2x - y - 2 | \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases}$$

$$(xy + 2x - y - 2) | y - x - 10 | - x + 4$$

$\frac{x \cdot 42}{298}$   
 $\frac{x \cdot 126}{1134}$



$\sqrt{(\sqrt{2} + \frac{1}{2})^2 - 1^2} =$

$\sqrt{0.97 - 3.74} =$   
 $2 \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{2} \sqrt{\frac{4}{3}}$

$\frac{170}{1260}$   
 $2(y+2) - 1(y+2)$

$f(f(z)) = \frac{t-1}{2} =$

$33 \sqrt{\frac{256}{9}}$   
 $20 \dots 236$

$f(t) = \frac{t-1}{2}$

$f(f(f(t))) = \frac{t-1}{8}$   
 $\frac{25}{315}$   
 $\frac{27}{168}$   
 $\frac{1512}{1512}$

$f(0) = -\frac{1}{2} \frac{t-3}{4}$

$f(f(x)) = \frac{84}{252} x - 2 = \frac{(x+2)t}{1-t}$   
 $\frac{2}{1+t}$