61-22-51-78
(38.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ивановой Виталия Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
61-22-51-78	80	15	15	15	0	15	10	10	

61-22-51-78
(38.3)

Задача 1

Черновик 1

80 (восемьдесят)

По т. Виета:

$\left(\frac{1}{m}-2\right)+\left(\frac{1}{n}-2\right)=-a$

$\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)=b$

Тогда $a+b=\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)-\left(\frac{1}{m}-2\right)-\left(\frac{1}{n}-2\right)$.

При этом, $D=a^2-4b>0$, т.к. корни различны

$a+b+1=\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)-\left(\frac{1}{m}-2\right)-\left(\frac{1}{n}-2\right)+1$

$a+b+1=\left(\left(\frac{1}{m}-2\right)-1\right)\left(\left(\frac{1}{n}-2\right)-1\right)$

$a+b+1=\left(\frac{1}{m}-3\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)$

$\frac{1}{mn}-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}+9$ – целое число

$\frac{1}{mn}-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}$ – целое число

$\frac{1-3m-3n}{mn}$ – целое число

$(3m+3n-1) \vdots mn$

m и n взаимопросты, т.к. $(m+n)$ и mn взаимопросты.

$m \not\vdots 3$ и $n \not\vdots 3$

Подходят $m=2, n=5$; $m=5, n=2$. Тогда $a+b=\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{5}-3\right)-1=$

$=-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{14}{5}\right)-1=7-1=6.$

$3m+3n-1=kmn$, $k\in\mathbb{Z}$

$kmn-3m-3n+1=0$

$(km-3)\left(n-\frac{3}{k}\right)=\frac{9}{k}-1$

Чистовик

Задача 4

Между девочками 4 промежутка с местами. При этом, в одном промежутке 2 места, в остальных 1, если оба места с краёв заняты девочками. Иначе 4 промежутка по 1 месту и 1 ~~свободное~~ без девочки с одного из краёв.

В первом случае 4 варианта, какой из промежутков с двумя местами. И в каждом варианте ~~2·4=8 вариантов рассадки.~~ $\frac{5!}{3!}=20$ вариантов рассадки. Т.е. в первом случае 80 вариантов рассадки.

Во втором случае 2 варианта, какое из крайних место занято не девочкой. В каждом из них $\frac{5!}{3!}=20$ вариантов рассадки. 40 вариантов рассадки во втором случае.

Всего имеется 120 различных способов рассадки.

Ответ: 120.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

61-22-51-78
(38.3)

Задача 2

Чистовик

Если первым или вторым числом будет 6, то последовательность из трёх чисел не будет возрастающей.
Переберём все подходящие последовательности.

~~1 бросок~~ ~~2 рез.~~ ~~3 рез.~~
рез.

1 2

Если первым результатом было 1, то следующий должен быть от 2 до 5. Иначе любое число кроме 6 и не противоположное на кубике, больше 1 рез., ~~т.е. 3 варианта. В 3 результате шестёрка подойдёт. Поэтому~~ 3 результат – число, больше второго, не противоположное на кубике.

Первое число – 1:

Второе число 2: 3 вар. (3, 4, 6)
Второе число 3: 2 вар. (5, 6)
Второе число 4: 2 вар. (5, 6)
Второе число 5: 1 вар. (6)

8 вар.

Первое число 2: 2+2=4 вар.
Первое число 3: 1 вар.
Первое число 4: 1 вар.
Первое число 5: нет вар.

14 последовательностей возрастающие.

Ответ: 14.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

Задача 6

Если в кувшине 10л воды, то выливают 5л воды и доливают 5л воды. Если в кувшине $x<10$ л воды, то выливают $\frac{1}{2}x$ л воды и доливают 5 л. Становится $\frac{1}{2}x+5$ л воды. $x<10 \Rightarrow \frac{1}{2}x<5 \Rightarrow \frac{1}{2}x+5<10$, но $\frac{1}{2}x+5>x$. ~~Кол-во во~~ Объём воды в кувшине тогда бесконечно стремится к 10л, но не достигает 10л. Аналогично, если в кувшине $y>10$л воды, то после доливания станет $\frac{1}{2}y+5$ л воды. $y>10 \Rightarrow \frac{1}{2}y>5 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{2}y+5>10$. $\frac{1}{2}y+5<y$. Тоже объём воды бесконечно стремится к 10л. В нашем случае объём в кувшине меньше 10л $\Rightarrow$ он всегда меньше 10л. Минимальный объём кувшина – 10л. Пусть в какой-то момент x л воды в кувшине. После 1 доливания станет $\frac{1}{2}x+5$ л, а после второго – $\frac{1}{4}x+7,5$.

$\frac{1}{4}x+7,5-\frac{1}{2}x-5=\cancel{7}\,2,5-\frac{1}{4}x$. ~~а~~ $\frac{1}{2}x+5-x=5-\frac{1}{2}x$. Значит, изменения объёма воды в кувшине представляют собой ~~ари~~ геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1,5.

Пусть k раз вылили воду и k раз долили. Тогда объём воды в кувшине равен $7+1,5\cdot\frac{0,5^k-1}{-0,5}=7+3\cdot\cancel{(0,5^k-1)}(1-0,5^k)\ge 9,99$. Тогда $3\cdot(1-0,5^k)\ge 2,99$;

$0,5^k\le 1-\frac{2,99}{3}$; $0,5^k\le\frac{1}{300}$; $2^k\ge 300$. $k\ge 9$.

Получаем, что на 9 день случится так, что кувшин наполнится не менее, чем на 99,9%. За первый день я принял день первого доливания.

Ответ: а) 10л; б) 9.

61-22-51-78 (38.3)

Чистовик

Задача 3

$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-$ $-(a+b+c)+3$. Докажем, что $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-(a+b+c)\ge 0$.

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-(a+b+c)=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab}{abc}$.

$abc>0$, $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab=$

$=\frac{a^2(c^2+b^2-bc)+b^2(c^2+a^2-ca)+c^2(a^2+b^2-ab)}{2}-\frac{a^2bc+b^2ca+c^2ab}{2}$

$c^2+b^2-bc=(c-b)^2+bc\ge bc$ т.к. $(c-b)^2\ge 0$ ~~и $bc>0$~~.

$c^2+a^2-ca=(c-a)^2+ca\ge ca$, т.к. $(c-a)^2\ge 0$ ~~и $ca>0$~~

$a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab\ge ab$ т.к. $(a-b)^2\ge 0$ ~~и $ab>0$~~

~~Поэтому $\frac{a^2(c^2+b^2-bc)+b^2(c^2+a^2-ca)+c^2(a^2+b^2-ab)}{2}>0\Rightarrow$~~

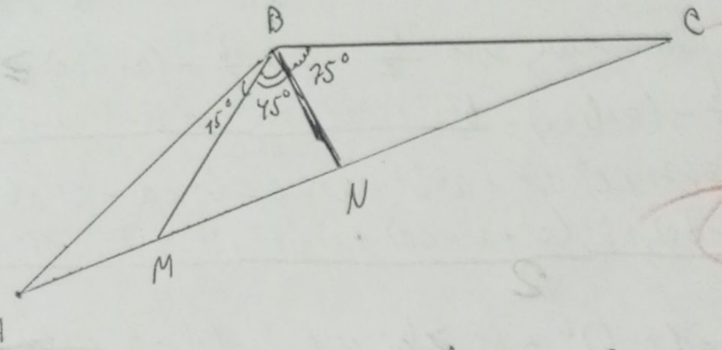
Поэтому $a^2(c^2+b^2-bc)+b^2(c^2+a^2-ca)+c^2(a^2+b^2-ab)-$ $-a^2bc-b^2ca-c^2ab\ge a^2\cdot bc+b^2\cdot ca+c^2\cdot ab-a^2bc-b^2ca-$ $-c^2ab=0\Rightarrow\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab}{2}\ge 0\Rightarrow$

$\Rightarrow b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab\ge 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-(a+b+c)\ge 0\Rightarrow\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+$ $+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}\ge 3$. $\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$ $=3$ при $a=b=c$.

Ответ: 3.

Задача 5 Чистовик



$S_{\triangle ABM}$ и $S_{\triangle NBC}$ — корни уравнения $x^2-5x+3=0$.

$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. $S_{\triangle ABM}=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ и $S_{\triangle NBC}=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, т.к. $\angle ABM < \angle NBC$.

$S_{\triangle ABM}=\frac{AB\cdot BM\cdot \sin 15^\circ}{2}$; $S_{\triangle MBN}=\frac{MB\cdot BN\cdot \sin 45^\circ}{2}$; $S_{\triangle NBC}=\frac{NB\cdot BC\cdot \sin 75^\circ}{2}$;

$S_{\triangle ABN}=\frac{AB\cdot BN\cdot \sin 60^\circ}{2}$; $S_{\triangle MBC}=\frac{MB\cdot BC\cdot \sin 120^\circ}{2}$; $S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot \sin 135^\circ}{2}$

$S_{\triangle ABM}\cdot S_{\triangle NBC}=\frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\cdot \sin 15^\circ\cdot \sin 75^\circ}{4}=\frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\cdot \sin 30^\circ}{8}=3\Rightarrow$

$\Rightarrow AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC=\frac{24}{\sin 30^\circ}=48$.

$S_{\triangle ABN}\cdot S_{\triangle MBC}=\frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\cdot \sin 60^\circ\cdot \sin 120^\circ}{\cancel{4}}=\frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\cdot 3}{16}=$

$=\frac{3}{16}\cdot 48=\cancel{18}\,9$.

$(S_{\triangle ABM}+S_{\triangle MBN})\cdot(S_{\triangle NBC}+S_{\triangle MBN})=S_{\triangle ABM}\cdot S_{\triangle NBC}+(S_{\triangle ABM}+S_{\triangle NBC})\cdot$

$\cdot S_{\triangle MBN}+S_{\triangle MBN}^2=3+5S_{\triangle MBN}+S_{\triangle MBN}^2=9$; $S_{\triangle MBN}^2+5S_{\triangle MBN}-$

$-6=0$. $D=\cancel{85}\,49$. $S_{\triangle MBN}=\frac{-5+\sqrt{\cancel{85}}\,7}{2}$, т.к. $\frac{-5-7}{2}<0$.

~~$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle NBC}+S_{\triangle MBN}=5+\frac{-5+\sqrt{85}}{2}=\frac{5+\sqrt{85}}{2}$.~~

~~Ответ: $\frac{5+\sqrt{85}}{2}$.~~ $S_{\triangle MBN}=1$.

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle NBC}+S_{\triangle MBN}=5+1=6$.

Ответ: 6.

Задача 7 Чистовик

Автомобиль ехал 85 минут всего. 5 раз дугу AC он проехать не мог, т.к. тогда бы он оказался в т. C, ~~17 и 34~~ ~~в виде~~ 17, 34, ~~51~~, 68, 85 в виде суммы 7 и 11 нельзя представить. $51=7+11\cdot4$. Но такого быть не могло, т.к. в данном случае 4 раза он проехал по дуге AC, 1 по дуге AB и 4 раза по дуге BC. $68=7\cdot5+11\cdot3$. Такой случай вполне возможен. 1 дуга AC, 5 дуг AB, 3 дуги BC. Пример: $A\to C\to B\to A\to B\to C\to B\to A\to B\to A$. Тогда он проехал $15\cdot5+25\cdot3+\left(\frac{15}{\pi}+\frac{25}{\pi}\right)\cdot\pi\cdot 1=15\cdot5+25\cdot3+40\cdot1=190$ км. Рассмотрим случай без дуг AC. Тогда $85=7\cdot9+11\cdot2$. Такой вариант тоже не подходит, т.к. в данном случае суммарное число проездов по дугам AB и BC должно быть чётным.

Ответ: 190 км.

Чистовик

Задача 1

$x^2 + ax + b = 0$

Корни — $(\frac{1}{m} - 2)$ и $(\frac{1}{n} - 2)$

По т. Виета:

$-a = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 4$

$b = \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4$

a – целое число $\Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ — целое число

b – целое число $\Rightarrow \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n}$ – целое число $\Rightarrow \frac{1}{mn}$ – целое число

m и n – целые числа, поэтому ~~$\frac{1}{|mn|}$ – целое число~~

mn – целое число. $mn = 1$ или $mn = -1$. В первом варианте $m = n$, чего быть не может. Во втором или $m = 1$ и $n = -1$, или $m = -1$ и $n = 1$. Тогда $a + b = \frac{1}{mn} - \frac{3}{m} - \frac{3}{n} + 8 = \frac{1}{-1} - \frac{3}{1} - \frac{3}{-1} + 8 = -1 + 8 = 7$.

Ответ: 7.