0 984077 440009

98-40-77-44
(37.8)

+1 лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

дешифр

Вариант

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ильиной Евгении Михайловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
98-40-77-44	75	15	15	0	15	0	15	15	

98-40-77-44
(37.8)

Черновик.

75 (семьдесят пять)

А К У Л А

$$\begin{cases} 9a+3b=9c+3d \\ a+b=38 \\ c+d=40 \\ a+c=59 \end{cases}$$

1 буква А:

$4! = 24$

2 буквы А:

$C_4^2 \cdot 2! = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot 2! = 12$

$5! = 120$

$6! = 720$

ответ: 36.

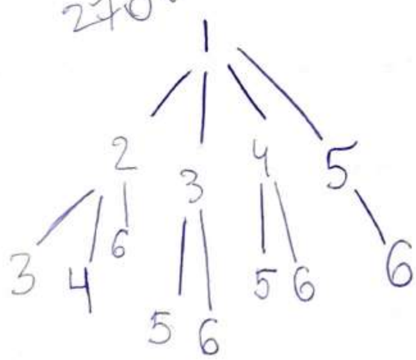
$30\cdot 9 + 8\cdot 3 = 29\cdot 9 + 11\cdot 3$

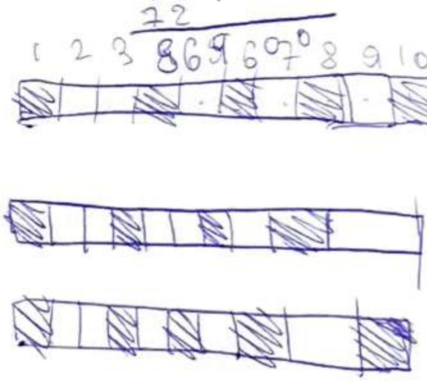
НОК $(38, 40) = 760$

$270 + 24 = 294$

$$\begin{array}{r} 720 \\ \times\ 120 \\ \hline 14400 \\ 72 \\ \hline 86400 \end{array}$$

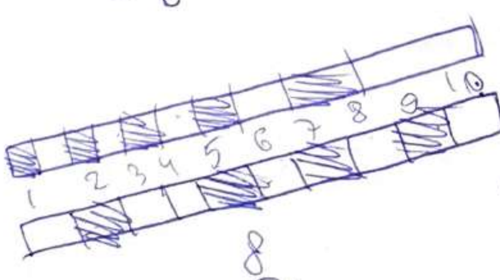
$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 9 \\ \hline 261 \end{array}$$





$38 = 2\cdot 19$

$40 = 2^3\cdot 5$



$2\cdot 20 \cdot 19 = 380\cdot 2 = 760$

$$\begin{array}{r} 59 \\ \times\ 9 \\ \hline 481 \end{array}$$

$118 + 38 =$

$= 156$

$760 : 5 = 152$

$$\begin{cases} 9a+3b=S \\ a+b=38 \end{cases}$$

$9c+3d=S$

$c+d=40$

Чистовик 1.

Задача 1.

рассмотрим 2 случая: в слове из 4 букв 1 буква А;

в слове из 4 букв 2 буквы А.

в первом случае в 4-буквенном слове все буквы будут различны. будем расставлять их начиная от начала.

Всего 4 различных буквы: А, К, У, Л.

На первое место есть 4 варианта поставить букву.

На второе уже 3, т.к. 1 букву мы уже поставили.

На третье место 2, а на ~~второе~~ четвёртое место 1.

Иными словами, мы рассматриваем перестановку из 4 различных букв. Это $4\cdot3\cdot2\cdot1=4!=24$ варианта.

во ~~втором случае, когда в слове 2 буквы А, нужно учитывать пов~~

посчитаем кол-во вариантов расставить буквы во втором случае, когда в слове 2 буквы А.

Сначала поставим буквы А, это количество сочетаний из 4 элементов по 2, т.к. буквы А одинаковые и их порядок не важен. Т.е. C_4^2. Теперь на оставшиеся 2 места нужно также разместить буквы, всего осталось 3 различных буквы: К, У, Л. На одно место есть 3 варианта, какую букву можно поставить, на оставшееся место уже 2 варианта, т.к. 1 буква из 3 уже поставлена. Т.к. все эти размещения зависят друг

Чистовик 2.

от друга, ~~(т.е. поставив 1 букву~~, ~~её уже нельзя став~~

~~[illegible]~~ для подсчёта кол-ва вариантов второго случая нужно их перемножить.

Получится

$$C_4^2 \cdot (3\cdot 2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!\cdot 3}{2} = 36$$

Получается, что для первого случая 24 варианта (т.е. 24 разл. слова), а для второго случая 36.

Тогда всего различных 4х буквенных слов получится $24+36=60$.

Ответ: 60.

Задача 2.

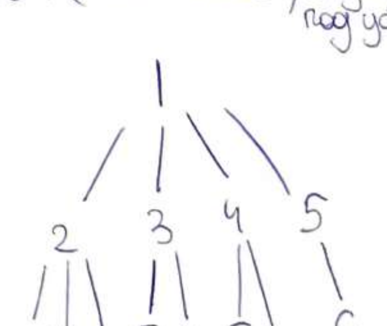
Рассмотрим 6 случаев: на первом броске выпала единица, 2, 3, 4, 5 или 6.

Если выпала единица:

у единицы соседние грани это 2, 3, 4 и 5. (все больше 1, подходят под условие)

запишем это в виде графа

третим действием будем рассматривать только те числа, которые больше числа, на которое перекатился кубик вторым действием.



заметим, что 1 нельзя перекатить на 6 (и наоборот)
2 нельзя перекатить на 5 (и наоборот)
3 на 4 (и наоборот).

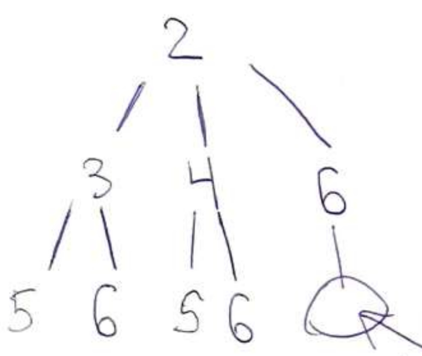
кол-во веток в графе глубины 3 (т.е. это 3, 4, 6, 5, 6, 5, 6, 6)

это и есть кол-во различных последовательностей, которые

Чистовик 3.

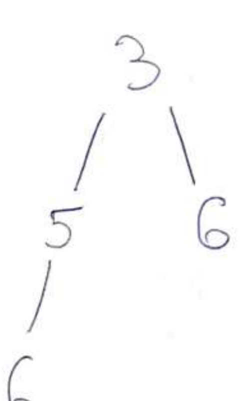
Начинаются с единицы и являются возрастающими (т.к. сразу учитывались только такие варианты).
Всего 8 последовательностей, которые начинаются с единицы.

Нарисуем графы для остальных случаев, соблюдая условие, что число, исходящее из предыдущего, больше него и не даёт с ним в сумме 7.



В данном случае из числа 6 на глубину 3 спуститься невозможно, значит для этой ветки 0 вариантов последовательностей

Всего для двойки 4 последовательности



для тройки 1 последовательность

для 4 тоже 1 послед.

для 5 и 6 нет последовательностей, т.к. иначе в последовательности должны быть числа 5+2=7 или 6+2=8, а таких чисел нет на кубике.

Чистовик 4.

Получается, общее кол-во последовательностей это сумма последовательностей для каждого числа, т.е.

$8+4+1+1=14$

Ответ: 14.

Задача 4.

Пусть длина удава равна S.
Поскольку попугай прошёл клювом вперёд R шагов, то общее расстояние, которое он прошёл клювом вперёд, равно $X \cdot R$.
Пусть попугай прошёл K шагов спиной вперёд, тогда общее расстояние, которое он прошёл спиной вперёд, равно $\frac{X}{Y} \cdot K$
Суммарное расстояние, которое прошёл попугай вдоль удава, равно $2S$, тогда $X \cdot R + \frac{X}{Y} \cdot K = 2S$

$\frac{X}{Y} = 3$ см - длина шага спиной вперёд

~~$3K+481=2S$~~ $3K+481=2S$

Заметим, что любой шаг попугая равен нечётному числу см. Поскольку от хвоста до головы удава попугай сделал 38 шагов, (чётное число), длина удава равна чётному числу см (т.к. $н \times ч = ч$). Тогда от головы до хвоста ~~уд~~ удава попугай не мог сделать 41 шаг (неч. число), иначе бы длина удава была нечётной, чего не может быть.
Значит на обратный путь попугай потратил 40 шагов.

Чистовик 5.

Пусть в направлении от хвоста до головы попугай сделал a шагов клювом вперёд и b шагов спиной вперёд. Общая сумма шагов равна 38.

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a+3b=S \\ a+b=38 \end{cases}$$

Пусть в направлении от головы до хвоста Попугай сделал c шагов клювом вперёд и d шагов спиной вперёд. Общая сумма шагов равна 40.

$$\Rightarrow \begin{cases} 9c+3d=S \\ c+d=40 \end{cases}$$

Т.к. всего шагов, которые Попугай прошёл клювом вперёд, было 59, то $a+c=59$.

$9a+3b=S$

$9c+3d=S$

$\Rightarrow 9a+3b=9c+3d$

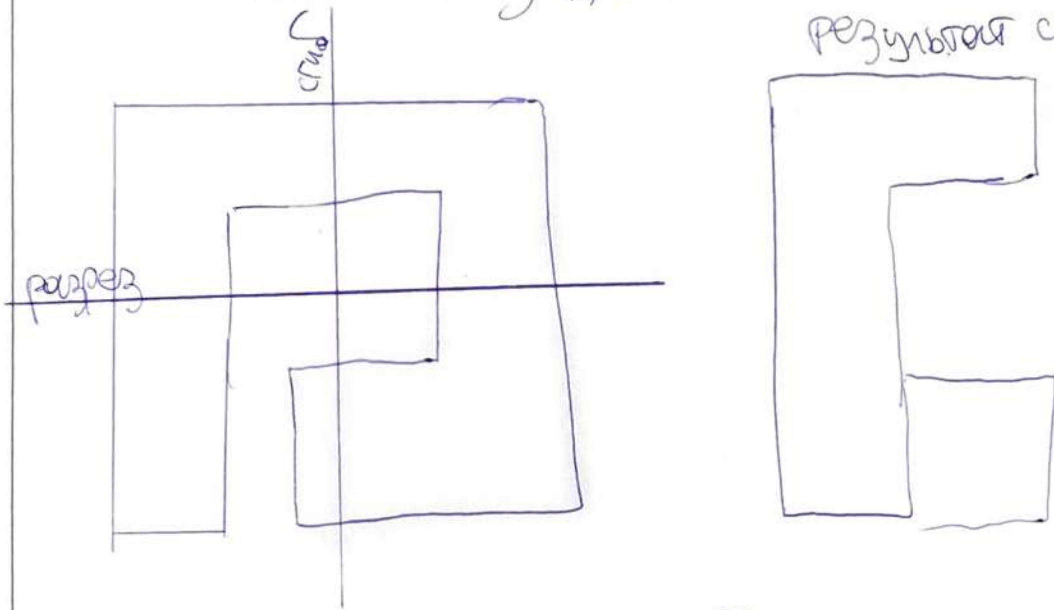
составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9a+3b=9c+3d \\ a+b=38 \\ c+d=40 \\ a+c=59 \end{cases}$$

98-40-77-44
(37.8)

Чистовик 12.

Ответ: ~~15/~~ ~~30~~ 15. ~~Проведём~~



Проведём ~~размер~~ разрез и сгиб, как показано на рисунке. Получатся след. фигуры:

Чистовик 6.

$$\begin{cases} 3a+b=3c+d \\ a+b=38 \quad | +2a \\ c+d=40 \\ a+c=59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+38=3c+d \\ a+b=38 \\ c+d=40 \\ a+c=59 \end{cases}$$

$\cancel{a+38+2a}$

$$\begin{cases} a=59-c \\ 2(59-c)+38=3c+d \\ a+b=38 \\ c+d=40 \end{cases}$$

$\cancel{c=40-d}$

$\cancel{2a+38=}$

$$\begin{cases} a=59-c \\ 156=5c+d \\ a+b=38 \\ c+d=40 \quad | +4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c+40=156 \\ a+b=38 \\ c+d=40 \\ a+c=59 \end{cases}$$

$c+10=39$

$c=29$

Чистовик 7.

$$\begin{cases} c=29 \\ a+b=38 \\ c+d=40 \\ a+c=59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=29 \\ a=30 \\ d=11 \\ b=8 \end{cases}$$

Получили, что $a=30$, $b=8$, $c=29$, $d=11$, т.е. в направлении от хвоста до головы Попугай сделал 30 шагов клювом вперёд и 8 шагов спиной вперёд, а в направлении от головы к ~~во~~ хвосту сделал 29 шагов клювом вперёд и 11 шагов спиной вперёд.

Тогда найдём длину удава:

$S = 9a + 3b = 9_{см} \cdot 30 + 3_{см} \cdot 8 = 294$ см

Ответ: 294 см.

Чистовик 8.

Задача 6. Всего 10 кресел. (кресло – место в кинотеатре)
Сначала найдём кол-во ~~спос~~ вариантов выделить 5 мест для девочек. Между 5 девочками 4 промежутка.
Рассмотрим случай, когда между любыми 2 девочками 1 кресло. Таких вариантов 2 (девочки сидят на местах (1, 3, 5, 7, 9) или (2, 4, 6, 8, 10)).

Заметим, что если между какими-то двумя девочками 2 кресла, то между остальными только 1, в противном случае всего кресел должно быть не меньше $\underbrace{(2+2}_{\text{промежутки в 2 кресла}}+1+1)+\underbrace{5}_{\text{5 девочек}}=11$, что больше 10.

Также между двумя девочками не может быть больше 2 кресел, в противном случае мест должно быть не меньше $(3+1+1+1)+5=11$, что больше 10.

Тогда остаётся рассмотреть 1 случай:
между 2 какими-то девочками 2 места, ~~но~~ а между остальными по 1.

Предположим, что в таком случае может оказаться так, что хотя бы 1 девочка <u>не</u> сидит с краю (т.е. на 1 или 10 месте).
Если никакая девочка не сидит с краю, то ~~по кр~~ с каждого края хотя бы 1 кресло не занято девочкой, значит всего мест ~~тд~~ не меньше
$1+\underbrace{(1+1+1+2)}_{\text{промежутки между девочками}}+5+1=12$, что больше 10. Пришли к противоречию

Чистовик 9.

Если с одного края сидит девочка, а с другого нет, мест должно быть не меньше $1+(2+1+1+1)+5=11$, что больше 10. Пришли к противоречию.

Предположение неверно, значит, в таком случае с каждого края (т.е. на местах 1 и 10) будет сидеть девочка.

Чтобы посчитать в этом случае * кол-во способов выбрать места для девочек, нужно посчитать кол-во способов расставить между ними промежутки. Промежутки одинаковой длины одинаковые.

Сначала посчитаем кол-во способов расставить промежутки длины 1. Т.к. с каждого края сидит девочка, промежутки не могут быть по краям, т.е. всего 4 места для промежутков. Это кол-во сочетаний из 4 по 3, т.е. C_4^3, а промежуток длины 2 встанет на оставшееся место, т.е. 1 вариант.

$C_4^3 \cdot 1 = C_4^3$.

Тогда общее кол-во способов выбрать 5 мест для девочек равно сумме 2х случаев, т.е. $2+C_4^3 = 2+\frac{4!}{3!\cdot 1!}=6$.

Теперь найдём кол-во способов разместить всех девочек на эти 5 мест, это кол-во перестановок длины 5, т.е. $5!$. Т.к. есть 6 вариантов выбрать 5 мест, всего есть $6\cdot 5!=6!$ способов разместить всех девочек.

~~Осталось~~ Чистовик 10.

Осталось разместить мальчиков и учительницу.
Их всего 4, а оставшихся мест 5.
1 место останется пустым.
Кол-во способов выбрать пустое место это кол-во сочетаний из 5 по 1, т.е. $C_5^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$.

Кол-во способов разместить остальных (мальчиков и учит.) это кол-во перестановок длины 4 умножить на кол-во способов выбрать пустое место, т.е. $4! \cdot C_5^1 = 4! \cdot 5 = 5!$

Тогда общее число ~~перестан~~ различных рассадок это произведение кол-ва способов разместить всех девочек и кол-ва способов разместить остальных, т.е. $5! \cdot 6! = 86400$.

Ответ: 86400 способов рассадки.

Задача 7. Вычтем каждое число из единицы:

$$1 - A = 1 - \frac{\overbrace{1111\ldots1110}^{2024}}{\underbrace{111111\ldots1111}_{2024}} = \frac{1}{\underbrace{111111\ldots11111}_{2024}} = \frac{6}{\underbrace{666\ldots66}_{2024}}$$

$$1 - B = \frac{2}{\underbrace{2222\ldots223}_{2024}} = \frac{6}{\underbrace{666\ldots669}_{2024}}$$

$$1 - C = \frac{3}{\underbrace{333\ldots334}_{2024}} = \frac{6}{\underbrace{666\ldots668}_{2024}}$$

Чистовик 11.

Заметим, что:

$$\frac{6}{\underbrace{666\ldots666}_{2024}} > \frac{6}{\underbrace{666\ldots668}_{2024}} > \frac{6}{\underbrace{666\ldots669}_{2024}}$$

т.к. $\underbrace{666\ldots666}_{2024} < \underbrace{666\ldots668}_{2024} < \underbrace{666\ldots669}_{2024}$

а они стоят в знаменателях, а числители у разностей одинаковые и равны 6.

Получили, что

$$1-A > 1-C > 1-B$$

$$\begin{cases} 1-A > 1-C \\ 1-C > 1-B \end{cases}$$

$$\begin{cases} C > A \\ B > C \end{cases}$$

$A < C < B$

A - наим. число, B - наиб. число

В порядке возрастания:

Ответ: A, C, B или $\frac{\overbrace{111\ldots110}^{2024}}{\underbrace{1111\ldots111}_{2024}}$, $\frac{\overbrace{333\ldots331}^{2024}}{\underbrace{33\ldots34}_{2024}}$, $\frac{\overbrace{222\ldots221}^{2024}}{\underbrace{222\ldots223}_{2024}}$