0 301972 440000

30-19-72-44
(38.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Калюшина Дмитрия Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Калюшин

85 (восемьдесят пять) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик   Вашуб   лист 4

1. $\begin{cases} \left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)=b & b=3 \\ \left(\frac{1}{m}-2\right)+\left(\frac{1}{n}-2\right)=-a \end{cases}$ $\quad -1 + -3 = -4 \quad a=4$

$-\begin{cases} \frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4=b \\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=-a \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{1-2n-2m+4mn}{mn}=b \\ \frac{n+m-4mn}{mn}=-a \end{cases}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=4-a \quad \frac{m+n}{mn}=a-4$

$a+b=\frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+4=\frac{1}{mn}-\frac{3}{m}-\frac{3}{n}+8=$

$=\frac{1-3n-3m+8mn}{mn}$

$b-a=\frac{1-n-m}{mn}=\frac{1-(m+n)}{mn}=\frac{1}{mn}-\frac{m+n}{mn}=\frac{1}{mn}+a-4$ $\quad \frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4\in\mathbb{Z}$

$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\in\mathbb{Z}$, $n\neq m$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$

$\frac{m+n}{mn} \Rightarrow m+n \vdots m \Rightarrow n \vdots m$ $\quad m+n\equiv 0 \pmod{mn}$

$m+n \vdots n \Rightarrow m \vdots n$

$27+3 \vdots 6 = 2\cdot 3$

$\Rightarrow 27+3 \vdots 2$

$27+3 \vdots 3$

$b-a=\frac{1}{mn}+a-4$

$b-2a=\frac{1}{mn}-4$ — цел.

целое целое не целое

$\frac{1}{mn}\in\mathbb{Z}$, только при $|m|=|n|=1$, т.к. если $m=n=1$.

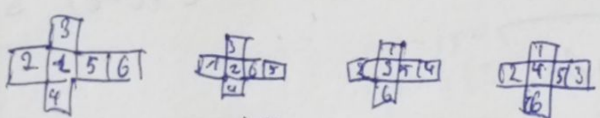
т.к. $m\neq n$.

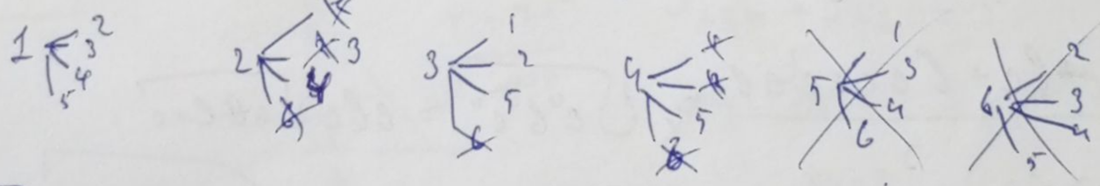
отв.: .. $\Rightarrow m=1, n=-1$ либо $m=-1, n=1$. $\quad b=1 \quad a=-2$. $\quad x^2-2x+1$

$\Rightarrow b=3$; $a=\cancel{-4}\ 4$. $\quad a+b=\cancel{-1}\ 7$

x^2+4x+3 $\quad$ отв: $a+b=7$

2.





вар: $\boxed{4}\ \boxed{\ }$

не 5

не 6

$4-5-6 \mid 1$

$3 < 4 < 5, 6$; $3 - 5 - 6 \mid 2$

$2 < 3 < 5, 6$; $2 < 4 < 5, 6 \mid 4$

$5 < 1, 3, 4, 6$ $\quad 6 < 3, 4, 5$

$1 < 2 < 3, 4, 6$; $1 < 3 < 5, 6$; $1 < 4 < 5, 6$; $1 < 5 - 6 \mid 8$

Итого: 14 вариантов.

лист 5

черновик

$a, b, c > 0.$

3. $\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ac - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c},$

$\frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ac}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 =$

$= \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{abc} - (a+b+c) + 3.$

надо д-ть, что

$a+b+c \leq \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{abc}$

$a^2bc + b^2ac + c^2ab \leq b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2$

$a^2bc - b^2c^2 = bc(a^2 - bc)$

$c^2bc - a^2c^2 = a^2c(b-c)$

$b^2ac - b^2a^2 = b^2a(c-a)$

$c^2b(a-b)$

пусть $a=b=c=t$

$3t^3(t-t) = 0$

пусть $a=b=t$

$\cancel{a^2c(}\ t^2c(t-c) +$

$+ t^3(c-t) +$

$+ c^2t \cdot 0 = (c-t)(t^3 - t^2c) =$

$= t^2(c-t)(t-c) =$

$= -t^2(t-c)^2 \leq 0.$

$abc(a+b+c)$

$\cancel{(a+b+c)^3} \geq$ $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

$\frac{a^2bc + b^2ac + c^2ab}{3} \geq \sqrt[3]{a^4b^4c^4} = abc\sqrt[3]{abc}$

$\frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^4b^4c^4} = abc\sqrt[3]{a+b+c}.$ $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$

пусть $ab = x > 0$, $bc = y > 0$, $ac = z > 0$

$xz + xy + yz$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 \ | +2(xy+yz+xz)$

$3(xy + xz + yz)$ $\quad (x+y+z)^2$

$\cancel{x^2+y^2+z^2)}$ $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

$\frac{3xy + 3xz + 3yz}{3} \geq \sqrt[3]{2\cdot(x^2+y^2+z^2)} = 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$

30-19-72-44 (38.9)

лист 6

черновик

$(x+y+z)^2$

$xz + xy + yz$

$\frac{x}{z} + \frac{x}{z}\frac{y}{z} + \frac{y}{z}$

$m + mn + n$

$m + n$

$x^2 + y^2 + z^2 \ | : z^2$

$(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2$, пусть $\frac{x}{z} = m > 0$ $\frac{y}{z} = n > 0$

$m^2 + n^2$

$m^2 - mn + n^2 \ | \cdot m + n$

4 $\quad$ 5g. 3m, 9 4 $\Big|_g$ $(m+n)^2 \leq (m+n)^3$, при $m>0$, $n>0$

gygmgmgmg–

ШgШgШgШgШg 5 букв: м, м, м, у4, –

$\cancel{A_5} = 5! = 120$

C_{10}

при фикс. g 4 Ш

1) gШgШgШgШg(Ш)

2) gШgШgШgШg

. . .

6) ШgШgШgШgШg

6 вар.

при g разм. и Ш разм.

$6 \cdot 5! \cdot 5! =$

$= 120 \cdot 120 \cdot 6 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 4 \cdot 100$

392	2
196	2
98	2
49	

$5 + \frac{bc}{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2} =$

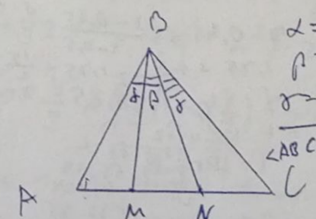
$= \frac{ad}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \ | \cdot 4$

$20 + bc\sqrt{2} = ad\sqrt{2} \ | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$10\sqrt{2} = ad - bc \ | \cdot \frac{1}{ad}$

$\frac{48}{19\ 2}$

5.



$\alpha = 15°$

$\beta = 45°$

$\gamma = 75°$

$\angle ABC = 135$

$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$ (x, y)

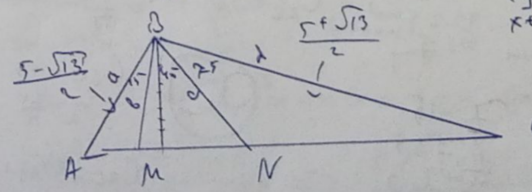
$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$\cancel{10\sqrt{2}bc} =$

$10\sqrt{2}\,ad = (ad)^2 - 48$

$ad^2 - 10\sqrt{2}ad - 48 = 0.$

$D = 200 + 192 = 392$



$xy = 3$

$x + y = 5$

$a^2 - 5a + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$xy = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\quad ad = \frac{10\sqrt{2} + \sqrt{392}}{2}$

$\sin(90 - 15) = \cos 75°$

$\frac{ad\sqrt{2}}{4} = \frac{20 + \sqrt{2^4 \cdot 7^2}}{8} = \frac{20+28}{8} = \boxed{6.}$

$\frac{ab}{2}\sin 15° = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ $\quad \frac{abcd}{4}\sin 15° \sin(90° - 15) = 3$

$\sin(180 - 45°) = -\sin 45$

$\frac{cd}{2}\sin 75° = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ $\quad \frac{abcd}{8}$. $\quad 2\sin 15\cos 15 = \frac{abcd}{8} \cdot \sin 30° = 3$

$\frac{bc}{2}\sin 45° = \frac{bc\sqrt{2}}{4}$

$\frac{abcd}{16} = 3; \ abcd = 48$

$\frac{ad}{2}\sin 135° = \frac{ad}{2}\sin 45° = \frac{ad\sqrt{2}}{4}$

черновик: лист 7

6. пусть V_i – объём воды в i-й день

$V_1 = 7$

$V_2 = 7 - \frac{1}{2}\cdot 7 + 5 = 8,5$ при $V_i = 10$; $V_{i+1} = 10$

...

$V_{n+1} = 0,5V_n + 5$

V_1; $0,5V_1+5$; $0,5(0,5V_1+5)+5 = 0,5^2V_1 + 0,5\cdot5+5$; $0,5^3V_1 + 0,5^2\cdot5 + 0,5\cdot5+5$; ...

$V_1\cdot 0,5^{i} + \underbrace{5\cdot0,5^{i-1} + 5\cdot 0,5^{i-2} + \ldots + 5}$

$5 + 0,5\cdot5 + 0,5^2\cdot5 + 0,5^3\cdot5 + \ldots + 0,5^n\cdot5 = \frac{5(0,5^{n+1}-1)}{0,5-1}$

а) max: $\frac{5}{1-0,5} = 10.$

$\frac{5(0,5^{n+1}-1)}{0,5-1} = 9,99$

$5(1-0,5^{n+1}) = 0,5\cdot 9,99$

$1-0,5^{n+1} = 0,999$

$0,5^{n+1} = 0,001$

$0,5^2 = 0,25$; $0,5^3 = 0,125$; $0,5^4 = 0,0625$; $0,5^5 = 0,03125$; $0,5^6 = 0,015625$; $0,5^7 = 0,0078$

$\frac{1}{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1000}$

$2^{n+1} \geqslant 1000$

$n+1 = 10$

б) $n = 9$.

$5+0,5\cdot5 = 7,5$; $\frac{5(0,5^2-1)}{0,5-1} = 7,5$

$7; 8,5; 9,25; \ldots$

$\frac{9,625}{2} = 4,8125$; $9,8125$; $\frac{9,8125}{2}$; $9,90625$; $\frac{9,90625}{2} = 4,953\ldots$

$\frac{8,5}{2} = 4,25$; $\frac{9,25}{2} = 4,625$; $9,625$; $\frac{9,953}{2} = 4,972\ldots$

$7\cdot0,5^{n-1} + 5\cdot\frac{1-0,5^{n-1}}{1-0,5}$

при $n=2$: $7\cdot0,5 + 5\cdot\frac{1-0,5}{1-0,5} = 8,5$

$n=3$: $7\cdot0,25 + 5\cdot\frac{1-0,25}{1-0,5} = 1,75 + 7,5 = 9,25$

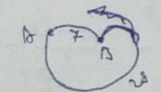
$17, 34, 51, 68, 85.$ 9.

7. 1ч 25 мин = 85 мин.

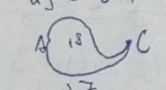
$14 \equiv -3 \pmod{17}$; $22 \equiv 5 \pmod{17}$

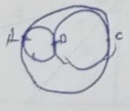
$C_{AB} = 30$; $\Rightarrow r_{AB} = \frac{15}{\pi}$

из В в А.



из С в А





$C_{BC} = 50$; $r_{BC} = \frac{25}{\pi}$

$r_{AC} = 2(r_{AB} + r_{BC}) = \frac{40}{\pi}$

$C_{AC} = 80$; Δ $d.\ AC = 40$ км.

$11+11+11+11+7+17+17 = 85$

$11+11+11+11+7 = 51 = 17\cdot3$

$(11+11) + (11+7) + (7+7) + (7+7) + 17 = 85$

$25\cdot3 + 15\cdot5 + 40 = 190$ км

30-19-72-44 (38.9)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Беловик: лист 1

1) по т. Виета верна система: $\begin{cases} (\frac{1}{m}-2)(\frac{1}{n}-2) = b \\ (\frac{1}{m}-2)+(\frac{1}{n}-2) = -a \end{cases}$, сложив ур-ия получим $b - a = \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 4 = \frac{1}{mn} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{mn} - (\frac{m+n}{mn})$

т.к. $-a = \frac{1}{m} - 2 + \frac{1}{n} - 2$, то $\frac{m+n}{mn} = 4 - a \Rightarrow b - a = \frac{1}{mn} - 4 + a$;

$b - 2a = \frac{1}{mn} - 4$, по условию $b, a, m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{mn}$ должно быть целым ($\frac{1}{mn} = b - 2a + 4$, где $b\in\mathbb{Z}, -2a\in\mathbb{Z}, 4\in\mathbb{Z}$), при целых m и n, $\frac{1}{mn}$ целое, если $|mn| = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$ либо $\begin{cases} n = -1 \\ m = 1 \end{cases}$ ($m \neq n$ по усл.), подставляя в систему, получаем в обоих случаях $a + b = 7$. Ответ: 7.

2) Чтобы получить возрастающую последовательность, первым числом очков не может быть ни 6, ни 5, а вторым – не 6. ~~если~~ Т.к. сумма очков противоположных сторон равна 7, то при записи результатов соседние числа в сумме не будут давать 7. Из таких условий вытекают все возможные комбинации:
4–5–6; 3–5–6; 2–3–5; 2–3–6; 2–4–5; 2–4–6; 1–2–3; 1–2–4; 1–2–6; 1–3–5; 1–3–6; 1–4–5; 1–4–6; 1–5–6. Всего: 14 вариантов. Ответ: 14.

3) Сократим дроби: $\frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ac}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 =$

$= \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{abc} - (a+b+c) + 3$. Докажем, что $a+b+c \leq \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}$

$a+b+c \wedge \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc} \mid \cdot abc$

$a^2bc + ab^2c + abc^2 \wedge b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2$; пусть $ab = x$; $ac = y$; $bc = z$; $x, y, z > 0$

$xy + xz + yz \wedge x^2 + y^2 + z^2 \mid : z^2$

$\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \wedge (\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2$; пусть $\frac{x}{z} = m$; $\frac{y}{z} = n$; $m, n > 0$

$m + mn + n \wedge m^2 + n^2 \mid -mn$

$m + n \wedge m^2 - mn + n^2 \mid \cdot(m+n)$

$(m+n)^2 \wedge (m+n)(m^2 - mn + n^2)$

$(m+n)^2 \wedge (m+n)^3$; т.к. $m+n > 0$, то $(m+n)^2 \leq (m+n)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+c \leq \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc} \Rightarrow \frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc} - (a+b+c) + 3 \geqslant 0 + 3 = 3$

$\Rightarrow$ минимальное значение в-ия – 3.

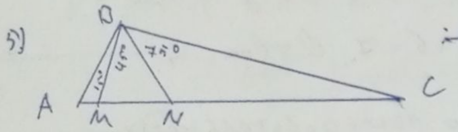
Ответ: 3.

нет док-ва достижимости

Беловик! лист ②

4). пусть пока все девочки одинаковы, и места ~~между~~, занятые мальчиками или учительницей, или незанятые тоже одинаковы (таких 5) (примем девочек за д, ост. – □). Тогда возможно 6 комбинаций расстановки д. и □: д□д□д□д□д□; д□д□д□д□□д; ... ; д□□д□д□д□д; □д□д□д□д□д. Но т.к. девочки и □ не одинаковы, то в каждом случае девочек можно переставить между собой 5! способами ~~случаями~~, и □ тоже 5!. => Всего способов $6 \cdot 5! \cdot 5!$.

5)



~~пусть AB~~ Дано:
$\angle ABM = 15°$; $\angle MBN = 45°$; $\angle NBC = 75°$;
$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$; $S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$.
Найти: S_{ABC}.

пусть $AB = a$; $BM = b$; $BN = c$; $BC = d$, тогда $S_{ABM} = \frac{ab}{2}\sin 15°$; $S_{NBC} = \frac{cd}{2}\sin 75°$
($\sin 75° = \cos 15°$)

$\frac{ab}{2}\sin 15° + \frac{cd}{2}\sin 75° = 5$; $\frac{abcd}{4}\sin 15° \cdot \sin 75° = 3$. =>

=> $abcd \cdot 2\sin 15° \cdot \cos 15° = 24$, по формуле синуса двойного угла
$2\sin 15° \cdot \cos 15° = \sin(2 \cdot 15°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

=> $abcd = 48$.

т.к. $S_{ABC} = \underbrace{S_{ABM} + S_{NBC}}_{5} + S_{MBN}$, то $\frac{ad}{2}\underbrace{\sin(15° + 45° + 75°)}_{\sin 135° = \sin 45°} = 5 + \frac{bc}{2}\sin 45°$; $| \cdot 2$

$ad \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 + bc\frac{\sqrt{2}}{2} \; | \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$; $ad = 10\sqrt{2} + bc \; | \cdot ad$; $(ad)^2 = 10\sqrt{2}ad + abcd = 10\sqrt{2}ad + 48$.

~~ad~~ $(ad)^2 - 10\sqrt{2}ad - 48 = 0$.

$\Rightarrow ad = \frac{10\sqrt{2} \pm \sqrt{200 + 48 \cdot 4}}{2} = \frac{10\sqrt{2} \pm \sqrt{2^2 \cdot 7^2}}{2} = 5\sqrt{2} \pm 7\sqrt{2}$, т.к. a и d – стороны, то $ad > 0 \Rightarrow ad = 12\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{ad}{2}\sin 135° = \frac{ad\sqrt{2}}{4} = \frac{12 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = 6$

Ответ: $S_{ABC} = 6$.

6) пусть V_i – объём воды в кувшине в i-й день, тогда
$V_1 = 7$ (л); $V_2 = 0{,}5 \cdot 7 + 5 = 8{,}5$; ... $V_{n+1} = V_n \cdot 0{,}5 + 5$.
$V_3 = 0{,}5^2 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 5 + 5$; $V_4 = 0{,}5^3 \cdot 7 + 0{,}5^2 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 5 + 5$, ... =>
$\Rightarrow V_n = 0{,}5^{n-1} \cdot 7 + 0{,}5^{n-2} \cdot 5 + 0{,}5^{n-3} \cdot 5 + ... + 0{,}5^{2} \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 5 + 5 =$
$= 7 \cdot 0{,}5^{n-1} + 5(1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + ... + 0{,}5^{n-2}) = 7 \cdot 0{,}5^{n-1} + 5 \cdot \frac{1 - 0{,}5^{n-1}}{1 - 0{,}5}$
(по ф. конечн. геом. прогр.)

при $V_n < 10$: $V_{n+1} > V_n$,
при $V_n = 10$: $V_{n+1} = V_n = 10$; => т.к. $V_1 = 7 < 10$, $V_i < 10$.
при $V_n > 10$: $V_{n+1} < V_n$ $\left(\lim_{n \to \infty}\left(7 \cdot 0{,}5^{n-1} + 5 \cdot \frac{1 - 0{,}5^{n-1}}{1 - 0{,}5}\right) = 0 + \frac{5}{1 - 0{,}5} = 10.\right)$

=> Кувшин должен быть как минимум 10 л.

Беловик лист ③

~~$\frac{7}{2^{n-1}} + \frac{5(1 - 0{,}5^{n-1})}{1 - 0{,}5} \geq 10 \cdot 99{,}9\% = 9{,}99$ $| \cdot 2$~~

~~$\frac{7}{2^{n-2}} + 5 - \frac{5}{2^{n-2}} = \frac{3{,}5 - 5}{2^{n-1}} + 5$~~

6 (прод-ие)

~~при~~ $V_9 = 9{,}982...$; $V_{10} = 9{,}99...$

Ответ: а) 10 л; в) на 10 день. нет доказательства

7) $r_{AB} = \frac{15}{\pi}$; $r_{BC} = \frac{25}{\pi}$, => r_{AC} $\frac{40}{\pi}$ => дугах. $AC = 40$ км

~~85~~ 1 ч 25 мин = 85 мин = $11 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 17$.

($A \overset{40}{\underset{\cancel{17}}{-}} C \overset{25}{-} B \overset{25}{-} C \overset{25}{-} B \overset{15}{-} A \overset{15}{-} B \overset{15}{-} A \overset{15}{-} B \overset{15}{-} A$) итого $25 \cdot 3 + 15 \cdot 5 + 40 = 190$ км

Ответ: 190 км