0 597580 770008

59-75-80-77
(38.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Каменевой Марии Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

59-75-80-77 (38.8)

70 семьдесят

ЧИСТОВИК 1 из 8

Галочкин Даниелевская

Задача 1

$\left(\frac{1}{m}-2\right)$ и $\left(\frac{1}{n}-2\right)$ корни x^2+ax+b

По теореме Виета: $a=-\left(\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2\right)=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$

$b=\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)$

$a+b=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)=$

$=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4=$

$=8-\frac{3}{m}-\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}=8-\left(\frac{3}{m}+\frac{3}{n}-\frac{1}{mn}\right)=$

$=8-\left(\frac{3n+3m-1}{mn}\right)=8-\frac{3(m+n)-1}{mn}$

a и b - целые числа $\Rightarrow$ $a+b$ - целое число

$4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=4-\frac{m+n}{mn}$ - целое $\Rightarrow$ $\frac{m+n}{mn}$ - целое

$\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)=\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4=4-\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{m}-\frac{1}{mn}\right)=$

$=4-\frac{2(m+n)-1}{mn}$ - целое $\Rightarrow$ $\frac{2(m+n)-1}{mn}$ - целое

$8-\frac{3(m+n)-1}{mn}$ - целое $\Rightarrow$ $\frac{3(m+n)-1}{mn}$ - целое

$\frac{2(m+n)-1}{mn}=\frac{2(m+n)}{mn}-\frac{1}{mn}$ - целое; $\frac{m+n}{mn}$ - целое $\Rightarrow$

$\frac{1}{mn}$ - целое $\Rightarrow$ $1 \vdots mn$

Т.к. $1 \vdots mn$, m и n - целые $\Rightarrow$ $mn=1$ или $mn=-1$

$\Rightarrow \left(\begin{cases}m=1\\n=1\end{cases}\right.$ или $\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}$ или $\begin{cases}m=1\\n=-1\end{cases}$ или $\left.\begin{cases}m=-1\\n=-1\end{cases}\right)$

1. $\begin{cases}m=1\\n=1\end{cases}$ $a+b=8-\frac{3(m+n)-1}{mn}=8-\frac{3(1+1)-1}{1\cdot 1}=$

$=8-5=3$

2. $\left(\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}\right.$ или $\left.\begin{cases}m=1\\n=-1\end{cases}\right)$ $\Rightarrow a+b=8-\frac{3(1-1)-1}{1\cdot(-1)}=$

$=8-\frac{-1}{-1}=8-1=7$

ЧИСТОВИК
2 из 8

3. $\begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 8 - \dfrac{3(-1-1)-1}{(-1)\cdot(-1)} =$

$= 8 - \dfrac{-6-1}{1} = 8 - (-7) = 15$

Не учтено, что $m \neq n$

Ответ: 3; 7; 15

Задача 2

Т.к. последовательность возрастающая и состоит из 3 чисел от 1 до 6, то минимальное первое число в последовательности – 4.

Значит, первым числом в последовательности могли оказаться 1, 2, 3, 4.

Заметим, что числа, идущие подряд в последовательности не могут давать в сумме 7, т.к. в сумме 7 дают только противоположные грани, а по условию кубик перекатывали на соседнюю грань.

Значит, ~~что~~ после первого перекатывания кубика могли оказаться следующие последовательности.

1 – 2	√2 – 1	√3 – 1	√4 – 1
1 – 3	2 – 3	√3 – 2	√4 – 2
1 – 4	2 – 4	3 – 5	4 – 5
1 – 5	2 – 6	3 – 6	4 – 6

Заметим, что отмеченные √ – не возрастающие. Далее не будем их рассматривать, т.к. они не подходят под условие.

После второго перекатывания кубика могли оказаться следующие последовательности:

1 – 2 – 3	√1 – 4 – 1	√2 – 3 – 1	√2 – 6 – 2	√3 – 6 – 2
1 – 2 – 4	√1 – 4 – 2	√2 – 3 – 2	√2 – 6 – 3	√3 – 6 – 3
√1 – 2 – 1	1 – 4 – 5	2 – 3 – 5	√2 – 6 – 4	√3 – 6 – 4
1 – 2 – 6	1 – 4 – 6	2 – 3 – 6	√2 – 6 – 5	√3 – 6 – 5
√1 – 3 – 1	√1 – 5 – 1	√2 – 4 – 1	√3 – 5 – 1	4 – 5 – 6
√1 – 3 – 2	√1 – 5 – 3	√2 – 4 – 2	√3 – 5 – 3	√4 – 5 – 4
1 – 3 – 5	√1 – 5 – 4	2 – 4 – 5	√3 – 5 – 4	√4 – 5 – 3
1 – 3 – 6	1 – 5 – 6	2 – 4 – 6	3 – 5 – 6	√4 – 5 – 1

59-75-80-77
(38.8)

ЧИСТОВИК
3 из 8

√4 – 6 – 2
√4 – 6 – 3
√4 – 6 – 5
√4 – 6 – 4

Заметим, что отмеченные галочкой (√) последовательности не возрастающие.

В итоге получаем следующие последовательности:

1 – 2 – 3	1 – 4 – 5	2 – 3 – 6
1 – 2 – 4	1 – 4 – 6	2 – 4 – 5
1 – 2 – 6	~~1 – 5 – 4~~	2 – 4 – 6
1 – 3 – 5	1 – 5 – 6	3 – 5 – 6
1 – 3 – 6	2 – 3 – 5	4 – 5 – 6

Всего 14 последовательностей.

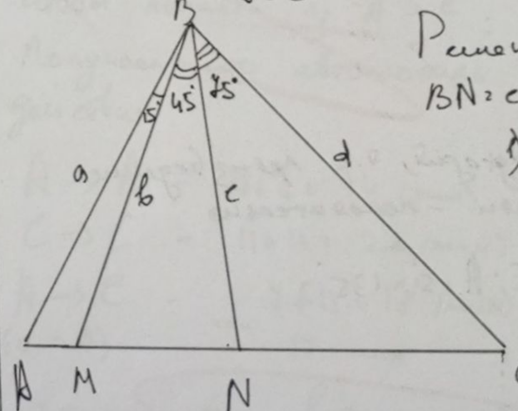
Также в решении было использовано, что при перекатывании кубика число на грани обязательно меняется (в последовательности не могут подряд идти 2 одинаковых числа)

Ответ: 14

Задача ~~4~~ 5

Дано: $\triangle ABC$, $M \in AC$, $N \in AC$, $\angle ABM = 15^\circ$, $\angle MBN = 45^\circ$, $\angle NBC = 75^\circ$, $S_{ABM} + S_{NBC} = 5$, $S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

Найти: S_{ABC}



Решение: Пусть $AB = a$, $BM = b$, $BN = c$, $BC = d$.

1) $S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 15^\circ$

$S_{BMN} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin 45^\circ$

$S_{NBC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot \sin 75^\circ$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot \sin 135^\circ$

2) $S_{ABM} + S_{NBC} = 5$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 15^\circ + \frac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot \sin 75^\circ = 5$

$a\cdot b\cdot \sin 15^\circ + c\cdot d\cdot \sin 75^\circ = 10 \quad (1)$

3) $S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2}\cdot d\cdot c\cdot \sin 75^\circ = 3$

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = 12$

ЧИСТОВИК 4 из 8

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \sin 15\cdot \cos 15 = 12 \Leftrightarrow a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot 2\cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = 24$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \sin 30^\circ = 24$; $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \frac{1}{2} = 24 \Leftrightarrow a\cdot b\cdot c\cdot d = 48 \Leftrightarrow bc = \frac{48}{ad}$ (2)

4) $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{MBN} + S_{NBC}$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 15^\circ + \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot \sin 75^\circ$

$a\cdot d\cdot \sin 135^\circ = a\cdot b\cdot \sin 15^\circ + b\cdot c\cdot \sin 45^\circ + c\cdot d\cdot \sin 75^\circ$ (*)

5) Подставим (1) и (2) в (*):

$a\cdot d\cdot \sin 135^\circ = \frac{48}{ad}\cdot \sin 45^\circ + 10$

$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $A = a\cdot d$:

$A\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{48}{A}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \Leftrightarrow \sqrt{2}A^2 - 20A - 48\sqrt{2} = 0$

Решим квадратное уравнение относительно A:

$\sqrt{2}A^2 - 20A - 48\sqrt{2} = 0$

$D_1 = 100 + \sqrt{2}\cdot 48\sqrt{2} = \cancel{97}\ 196$

$A = \frac{10+14}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$

$A = \frac{10-14}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}$ – не подходит, т.к. произведение сторон – положительно

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2}\cdot A\cdot \sin 135^\circ =$

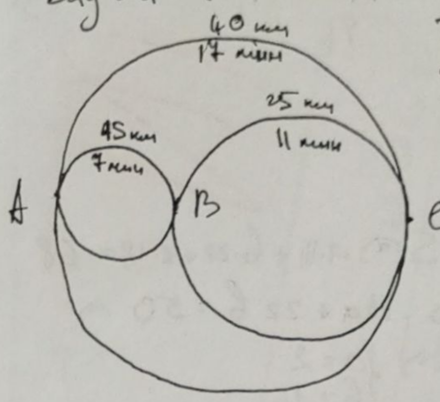
$= \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

Ответ: 6

59-75-80-77 (38.8)

Задача 7

ЧИСТОВИК 5 из 8



Т.к. 2 маленькие окружности касаются, а также касаются большую окружность внутренним образом ⇒ радиус большой окружности равен сумме радиусов маленьких окружностей.

$R_Б = r_1 + r_2$

$C_1 = 2\pi r_1 = 2\cdot \cup AB = 2\cdot 15 = 30$ (км)

$C_2 = 2\pi r_2 = 2\cdot \cup BC = 2\cdot 25 = 50$ (км)

$C_3 = 2\pi R_Б = 2\pi(r_1 + r_2) = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 =$

$= 30 + 50 = 80$ (км) $\Rightarrow \cup AC = \frac{80}{2} = 40$ (км)

Автомобиль ехал 1 ч 25 мин = 85 мин

Рассмотрим способы передвижения автомобиля по окружностям: Если автомобиль проезжал дугу AB, то после этого он обязательно либо возвращался в A, либо приезжал в точку C. Если автомобиль проезжал $\cup BC$, то он также либо возвращал в C, либо приезжал (из C к B) в A. Также автомобиль мог ехать по дуге AC чтобы попасть из A в C или из C в A.

Получаем, что автомобиль мог совершать следующие действия:

$A \to A$ – $7+7 = 14$ (мин)

$C \to C$ – $11+11 = 22$ (мин)

$A \to C$ – $7+11 = 18$ (мин) или 17 мин

$(C \to A)$

$85 = a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + d\cdot 17$, $a, b, c, d \geq 0$, целые

причем $c+d$ – четно, ~~если c и d = 0 ⇒~~ $b = 0$

(т.к. если автомобиль попал в C, то ему обязательно нужно вернуться в A)

1) если $c = 0$ и $d = 0 \Rightarrow b = 0$ $85 = a\cdot 14 \Rightarrow a$ – нецелое

2) $c = 0 \Rightarrow d$ – четно $\Rightarrow 17\cdot$ четное – четно $a\cdot 14 + b\cdot 22 + d\cdot 17$ – четно?!

3)

чистовик 6 из 8

Если c-четное $\Rightarrow$ d-четное $\Rightarrow$ $17\cdot d$ - четное $\Rightarrow$ $a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + d\cdot 17$ - четное ?!

Значит, c-нечетно $\Rightarrow$ d-нечетное

$a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + d\cdot 17 = 85$

1) $d=1 \Rightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + 17 = 85 \Leftrightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 = 68$

а) $c=1$ $\quad a\cdot 14 + b\cdot 22 + 18 = 68 \Leftrightarrow 14a + 22b = 50 \Leftrightarrow 7a + 11b = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

б) $c=3$ $\quad a\cdot 14 + b\cdot 22 + 18\cdot 3 = 68 \Leftrightarrow 14a + 22b = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

При $c>3$ $(c\geq 5)$ $\quad a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 > 68$

2) $d=3 \Rightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + 3\cdot 17 = 85 \Leftrightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 = 34$

а) $c=1$ $\quad a\cdot 14 + b\cdot 22 + 18 = 34 \Leftrightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 = 16 \Leftrightarrow 7a + 11b = 8$ — никакие целые a и b не подходят

~~б) $c=3$ $a\cdot 14 + b\cdot$~~

При $c>1$ $(c\geq 3)$ $\quad a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 > 34$

3) $d=5 \Rightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + 5\cdot 17 = 85 \Leftrightarrow a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 = 0 \Rightarrow a=0, b=0, c=0$, но c-нечетное ?!

При $d>5$ $(d\geq 7)$ $\quad a\cdot 14 + b\cdot 22 + c\cdot 18 + d\cdot 17 > 85$

Значит, подошли всего 2 случая: ~~$d=1$~~

I $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$ и II $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=3 \\ d=1 \end{cases}$

I: $a=2$ — т.е. автомобиль проехал 4 раза по $\cup AB$
$b=1$ —||— 2 раза по $\cup BC$
$c=1$ —||— 1 раз по $\cup AB$ и $\cup BC$
$d=1$ —||— 1 раз по $\cup AC$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

чистовик 7 из 8

$4\cdot 15 + 2\cdot 25 + 15 + 25 + 40 = 5\cdot 15 + 3\cdot 25 + 40 = 190$ км

II: $a=1$ т.е. автомобиль проехал 2 раза по $\cup AB$
$b=0$ ~~т.е. автомоби~~ —||— 0 раз по $\cup BC$
$c=3$ —||— 3 раза по $\cup AB$ и $\cup BC$
$d=1$ —||— 1 раз по $\cup AC$

$2\cdot 15 + 3\cdot(15+25) + 40 = 30 + 120 + 40 = 190$ км

Автомобиль проехал 190 км

Ответ: 190 км

Задача 4

Рассмотрим рассадку девочек:
они ~~могут сидеть на местах одинаковой четности или четность их мест может меняться, причем ровно 1 раз, т.к. если часть девочек сидит на четных местах, а не занятые девочками~~

2 места подряд могут не встречаться, если девочки сидят на местах одинаковой четности, или могут встречаться следующим образом:

они не могут находиться сразу, т.к. тогда все девочки сидят на 8 подряд идущих сиденьях, причем девочек 5 и рядом они не сидят $\Rightarrow$ должно быть хотя бы 4 сиденья где не сидят девочки ?!

Значит, 2 свободных (от девочек) кресла могут находиться на следующих позициях: 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89

Заметим, что если кресла находятся на позициях 34, 56, 78, то с обеих сторон от кресел четное кол-во кресел $\Rightarrow$ на них могут сидеть кол-во девочек не превышающее половину кол-ва свободных кресел, т.е. всего не более $\frac{10-2}{2} = 4$ девочек ?!

Значит 2 свободных от девочек кресла могут находиться на 4 различных позициях

Значит, всего кресла, занятые девочками могут быть выбраны 6 различными способами.

чистовик
8 из 8

На этих местах (5 выбранных для девочек мест) девочки могут сесть 5! различными способами т.к девочек всего 5.

На оставшихся местах мальчики, учитель и свободное место также могут быть выбраны 5! способами. Т.к. все мальчики отличаются и имеет значение в каком порядке они сидят, а также где сидит учитель и находится свободное место

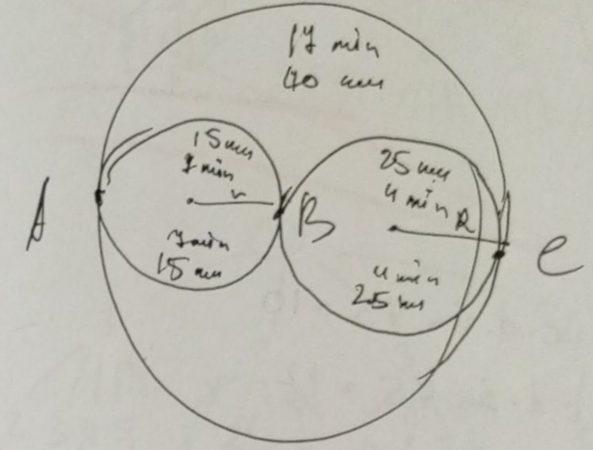
$6\cdot5!\cdot5!$

Ответ: $6\cdot5!\cdot5!$

Примечание: если мальчики и девочки не отличимы между собой, то ответ $6\cdot A_5^2$ - т.к. при рассадке учителя, мальчиков и свободного места имеет значение только выбор места для учителя и свободное место

$6\cdot A_5^2 = 6\cdot\frac{5!}{3!} = 6\cdot5\cdot4 = 120$ способов

ЧЕРНОВИК 1 из 6



$17 \times 5 = 85 = 60+25$

$7 \times 5 = 35$, $35 + 50 = 85$

$7+17 = 24$

$2\pi r = 30$

$\pi r = \cancel{60}\ 15$

$\pi R = 25$

$\pi(r+R) = 40$ км

$18 \times 2 = 36$

$17 = 85$

$18 \times 3 = 54$

$68 - 54 = 14$

7 − 5 раз

7 − 1

11 − 5 раз

7 − 1   11 − 4, 14

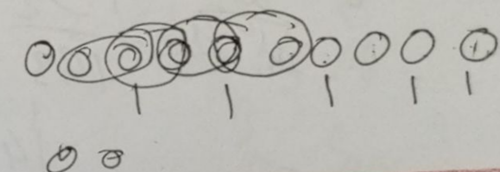
7 − 2   11 − 1, 11

7 − 3 − 11 − 4, 14

$34 - 18 = 16$

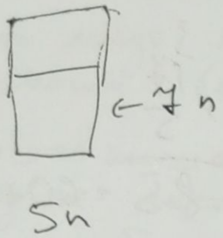
$85 - 51 = 34$

$17 \times 3 = 51$



2 3 45 67

ЧЕРНОВИК 2 из 64



$a \cdot b \cdot \sin 15 + c \cdot d \cdot \sin 75 = 10$

$a \cdot b \cdot \sin 15 \cdot c \cdot d \cdot \sin 75 = 12$

$a \cdot d \cdot \sin 135 = a \cdot b \cdot \sin 15 + b \cdot c \sin 45 + c \cdot d \cdot \sin 75$

$a \cdot d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 + \frac{48}{a \cdot d} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 a \cdot b \cdot \sin 15 \cdot c \cdot d \cdot \cos 15 = 24$

$c \cdot d\, a \cdot b \cdot \sin 30^{\circ} = 24$

$a \cdot b \cdot \frac{1}{2} = 24$

$a \cdot b \cdot c \cdot d = 48$

$b \cdot c = \frac{48}{ad}$

$ad = A$

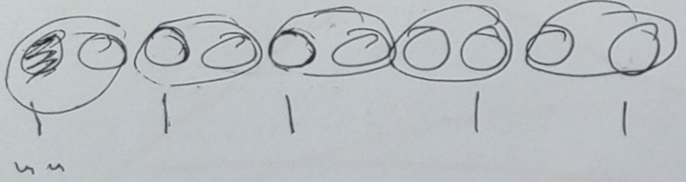
$A^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10A + \frac{48 \cdot \sqrt{2}}{2}$

$A^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 10A - 24\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}$

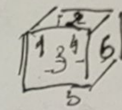
C_6^1 $\quad \frac{6!}{4! \cdot 2!}$

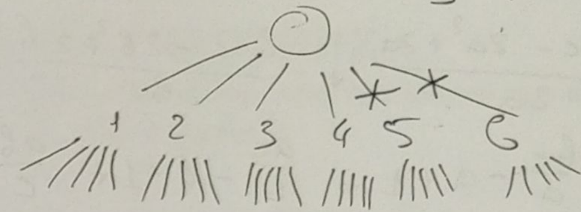
$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ +13 \\ \hline 169 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$



$6 \cdot 5! \cdot 5!$

ЧЕРНОВИК 3 из 64



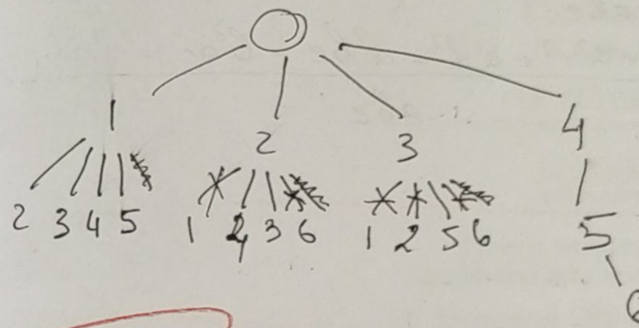


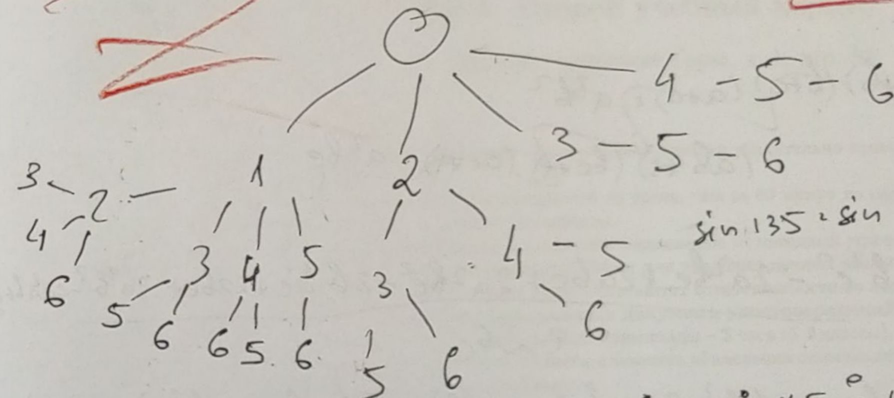
$60 + 50 + 80$

$110 + 80 = 190$

$75 + 75 + 40$

$150 + 40$

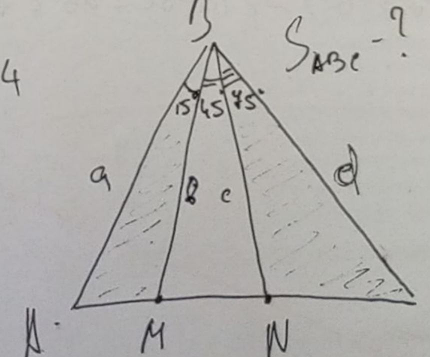




$\sin 135 = \sin 45$

$15^{\circ} + 45^{\circ} + 75^{\circ} = 135^{\circ}$

14



S_{ABC} – ?

$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$

$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$\frac{1}{2}(a \cdot b \cdot \sin 15 + c \cdot d \cdot \sin 75) = 5$

$a \cdot b \cdot \sin 15 + c \cdot d \cdot \sin 75 = 10$

$a \cdot b \cdot \sin 15 \cdot c \cdot d \cdot \sin 75 = 12$

$ad = \frac{12}{b \cdot c \cdot \sin 15 \cdot \sin 75}$

$AB \cdot BC$ ~~$\sin 135 = AB \cdot B$~~

$a \cdot d \sin 135 = a \cdot b \cdot \sin 15 + b \cdot c \cdot \sin 45 + c \cdot d \cdot \sin 75$

$(a \cdot d - b \cdot c) \cdot \sin 45^{\circ} = 10$

$6 \cdot C_5^2 = 6 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$

$= 6 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 6 \cdot 2 \cdot 5$

ЧЕРНОВИК 4 из 4

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ac-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$$

$$=3+\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}-(a+b+c)=$$

$$=3+\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab}{abc}=$$

$=$

$$abc(a+b)(b+c)(a+c)=a^3b^2$$

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1)=a^2bc$$

$$\frac{2b^2c^2-2a^2bc+2abc+2a^2c^2-2b^2ac+2abc+2a^2b^2-2c^2ab+2abc}{2abc}$$

$$6abc+2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)-2(a^2bc+ab^2c^2+abc^2)$$