

09-66-05-69
(40.48)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 8

Выход: 14⁰¹ - 14⁰⁹

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

КИРИЛЛОВА ВЛАДИМИРА СЕРГЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Кириллов

Чистовик

№1

Сначала посмотрим на кол-во способов выбора защитников и нападающих. Рассмотрим 3 случая: среди выбранных защитников 0/1/2 универсала.

универс.
в защите

универс. в защите	варианты выбора защитников	варианты выбора нападающих
0	$\frac{4 \cdot 3}{2!}$	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$ (выбираем из 7 топ и 3 чифов: 10 чел)
1	3 x 4	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$
2	$\frac{3 \cdot 2}{2!}$	$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$

Итого вариантов - $\left(\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \right) + \left(3 \cdot 4 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} \right) + \left(\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \right) = 720 + 1008 + 168 = 1896$

И при этом выбираем одного из трех вратарей:
 $1896 \cdot 3 = 5688$ вариантов

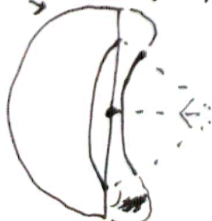
Ответ: 5688.

№2

Новую фигуру можно

представить, как:

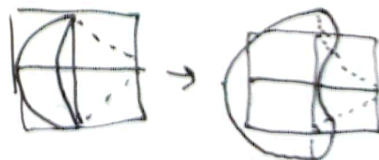
полукруг радиусом $1 + \frac{1}{3}$



← два треугольника → из которых вырезаем сектор круга радиусом $(\sqrt{2} - \frac{1}{3})$ и углом 90° .



← два сектора кругов с радиусом $\frac{1}{3}$ и углами по 135° .



Чистовик

№2 (продолжение)

Когда машина S фигура будет:

$$S = \frac{1}{2} \pi \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{16}{9} + 1 - \frac{1}{4} \cdot \pi \left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9}\right) +$$

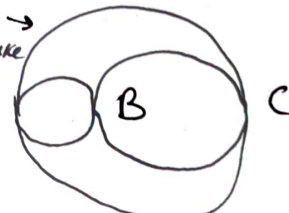
$$+ \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{9} = \pi \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36}\right) + 1 =$$

$$= \pi \left(\frac{32}{36} - \frac{18}{36} + \frac{6\sqrt{2}}{36} - \frac{1}{36} + \frac{3}{36}\right) + 1 = \frac{16 + 6\sqrt{2}}{36} \cdot \pi + 1$$

Ответ: $S = \frac{8 + 3\sqrt{2}}{18} \pi + 1.$

№4

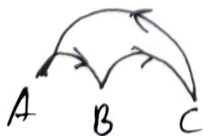
А касательно этой картинке

можно представить, что A  C
автомобиль движется по
дугам, но в любую сторону:

Вернуться автомобиль в
точку A мог, если проедет какой-то
пути и вернется обратно по пути же:
например:

Или если сдвинуть палки

круг:



В первом случае т.к. пути туда и обратно
одинаковые, то общее время будет делиться
на 2. Во втором же случае, время - 35 мин,
не делится на 2.

Чистовик

№ 4 (продолжение)

П.к. все время $t_0 = 1 \text{ ч } 25 \text{ мин} = 85 \text{ мин}$, нечетное, но как минимум один круг полны был сделан:

$$t_1 = t_0 - 35 = 85 - 35 = 50 \text{ мин} \quad \text{- время без этого круга}$$

$$S = AC + CB + BA + \dots$$

Если бы он сделал еще один круг, то времени осталось бы 15 минут, что не является четным, и еще на один круг времени бы не хватило. Поэтому полный круг был только 1.

П.к. теперь он движется только по маршруту, по которому и возвращается назад, но рассматриваем только путь туда:

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{50 \text{ мин}}{2} = 25 \text{ мин} \quad \text{- время на путь туда, без обратно}$$

Единственная возможность набрать 25 мин., это $2 \cdot 7 \text{ мин} + 11 \text{ мин}$. Значит он ~~от~~ проехал по АВ 2 раза и ВС 1 раз, и равно так же "обратно", поэтому:

$$S = (AC + CB + BA) + 2(2AB + BC)$$

$$AC = 2\pi \left(\underbrace{\frac{AB}{2\pi}}_{r_{AB}} + \underbrace{\frac{BC}{2\pi}}_{r_{BC}} \right) = AB + BC = 40 \text{ км}$$

$$S = (40 + 25 + 15) + 2(2 \cdot 15 + 25) = 80 + 2 \cdot 55 = 190 \text{ км}$$

Ответ: 190 км.

Цикловик.
№5

Если $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$, то если x отрицателен
равен $z = \frac{x-2}{x+2}$, то значение функции:

$$z = \frac{x-2}{x+2} \Rightarrow$$

$$z(x+2) = x-2$$

$$zx - x = -2 - 2z$$

$$x(z-1) = -2(z+1)$$

$$x = \frac{-2(z+1)}{z-1}$$

↓

$$f(z) = -\frac{2}{\frac{-2(z+1)}{z-1} + 2} = -\frac{2}{\frac{-2z-2+2z-2}{z-1}} =$$

$$= -\frac{2(z-1)}{-2-2} = \frac{-2(z-1)}{-4} = \frac{1}{2}(z-1) = 0,5z - 0,5$$

Получа, и.к. $f(z) = 2^{-1}z - 2^{-1}$, то $f(f(z)) = 2^{-2}z - 2^{-1} \cdot 2^{-1}$,
 $f(f(f(z))) = 2^{-3}z - 2^{-1} - 2^{-2} - 2^{-3}$ и

$$g(z) = 2^{-11}z - 2^{-1} - 2^{-2} - \dots - 2^{-11}$$

Получа:

$$g'(z) = 2^{-11}$$

$$g'(0) = 2^{-11}$$

→ это и есть максимум угла
наклона касательной.

$$\text{Ответ: } 2^{-11}$$

№7

И.к. число 90-значное, то быть больше
 $\underbrace{999 \dots 99}_{90}$ оно не может. Но именно это

Числовик

Число n подходит под условие.

$$\underbrace{999 \dots 99}_{90} = 10^{90} - 1 = \underbrace{10000 \dots 00}_{90} - 1$$

Теперь, если мы берем любое число m , то

$$mn = \left(\underbrace{10000 \dots 00}_{90} - 1 \right) \cdot m = \underbrace{m000 \dots 00}_{90} - m$$

Это же число, можно представить, как

$$\underbrace{(m-1)999 \dots 99}_{90} + 1 - m = \underbrace{(m-1)999 \dots 99}_{90} - (m-1). \text{ Или есть,}$$

если посмотреть по цифрам, если цифры числа

$$m = \overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_k}, \text{ то } S(mn) = :$$

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_k \underbrace{999 \dots 9}_{90-k} \underbrace{99 \dots 9}_k}$$

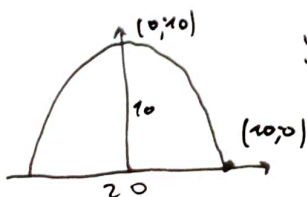
$$S(mn) = 9 \cdot (90-k) + (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) + (9-x_1) + (9-x_2) + \dots + \dots (9-x_k) \Rightarrow$$

$$S(mn) = 9 \cdot 90 - 9k + (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) + 9 \cdot k - (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) = 9 \cdot 90 = S(n).$$

Значит, число $10^{90} - 1 = \underbrace{999 \dots 99}_{90}$ подходит и

является наибольшим 90-значным подходящим.

Ответ: ~~$10^{90} - 1$~~ . $\underbrace{999 \dots 99}_{90}$.



N 6

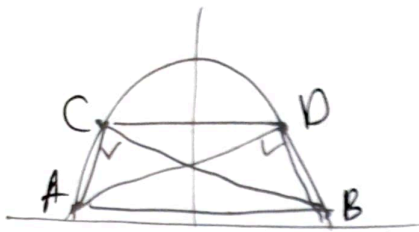
$$y = a - bx^2$$

$$10 = a - b \cdot 0^2 \Rightarrow a = 10$$

$$0 = 10 - b \cdot 10^2 \Rightarrow b = 0,1$$

$$y = 10 - 0,1x^2$$

Чистовик №6 (продолжение)

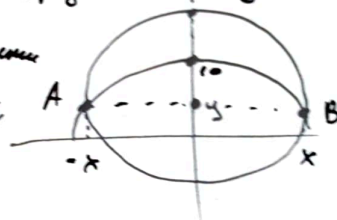


П.к. $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$,
 но если построить
 окружность на диаметре
 AB, C и D будут лежать

на окружности. Значит ACDB - вписанная
 равнобедренная трапеция.

Значит C, D - точки пересечения окружности
 на диаметре AB и параболы.

Пусть абсцисса A и B - x, а ордината - y
 Но если верх окружности
 выше вершины параболы,
 то точек пересечения
 не будет. То есть:



$$10 - y \geq x \quad \text{п.к. } x - \text{радиус.}$$

$$10 - (10 - 0,1x^2) \geq x$$

$$0,1x^2 \geq x$$

$$x(0,1x - 1) \geq 0$$

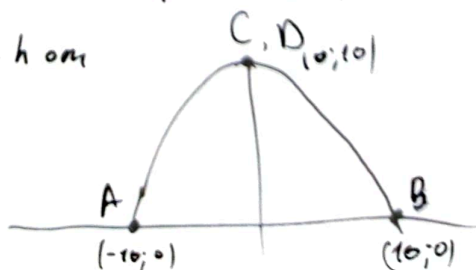
$$x \in (-\infty; 0] \cup [10; \infty)$$

То есть такое возможно либо при $x=0$,
 что не подходит, либо при $x=10$.

Тогда, расстояние h от

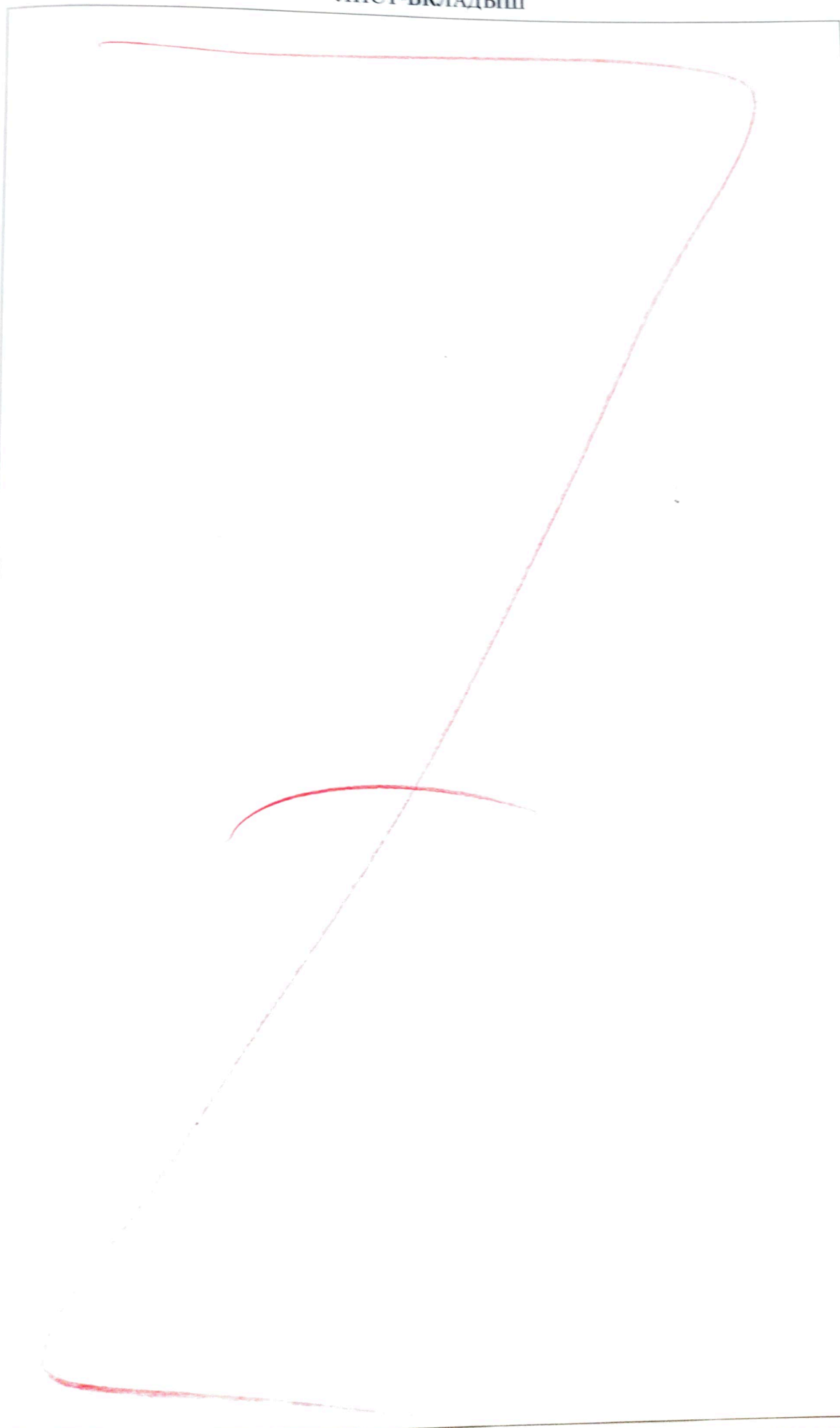
CD до AB:

$$h = 10$$



Ответ: 10.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик
№ 8.

$N(3+x; 4+2x; 5+2x) \in$ точка на AC
 $x \in (0; 2)$.

$NB \{ 8-x; 6-2x; 1-2x \}$ убывает ли увеличивается?

$$\frac{8-x}{2}; \frac{6-2x}{2}; \frac{1-2x}{2} \text{ - убывающие}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \alpha = 2,5 \quad -1$$

$$(xy + 2x - y - 2) |y - x - 10| = (x-4) |xy + 2x - y - 2|$$

$$\sqrt{y-x+8} = y-5$$

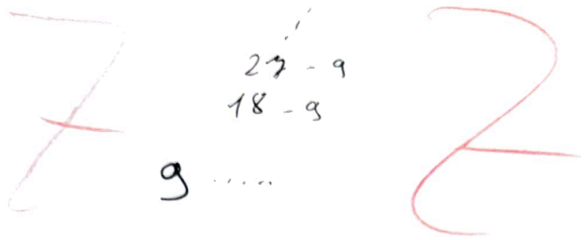
Черновик
№ 7

$S(n)$ - сумма цифр n .

$1 \leq m \leq n$

$S(mn) = S(n)$

99 - 818
90 - 9



27 - 9
18 - 9

9 ...

909090...
90

18 18 18 ... 180

90 90 90 90 90 90 90 90 0

9999
90

1999 ... 8

9999 ... 0

40999 ... 89

90

(1000000 ... 00 - 1) ...

m0000 ... 91
0 - m

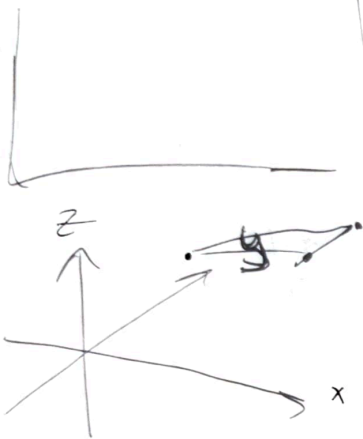
90

год. все эти цифры.

а здесь отнимается.
OM 9-значных.

✓.

№ 8



A(3; 4; 5)

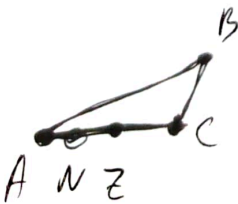
B(11; 10; 6)

C(5; 8; 9)

AB { 8; 6; 1 }

BC { -6; -2; 3 }

CA { -2; -4; -4 }



N(3+1x; 4+2x; 5+2x)

точка на AC

Черновик.

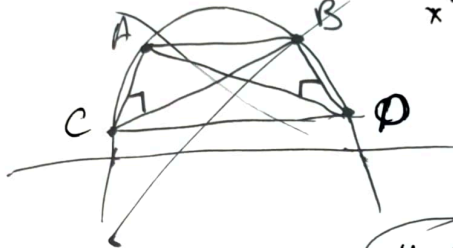
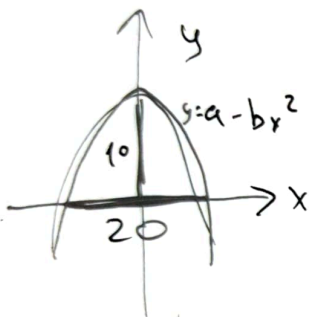
№ 5

$$g(x) = \frac{1}{2^{11}} x - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \dots - \frac{1}{2^{11}}$$

$g'(x) =$

$$g'(x) = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2^{11}}$$

№ 6



$$y = 10 - 0,1x^2$$

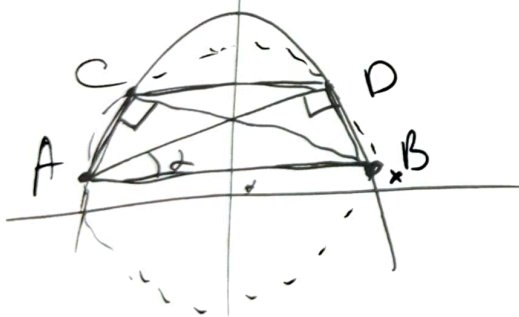
$$x_0 = \sqrt{100 - 10x}$$

$$d = 10 - 0,1x^2$$

$$x_0^2 = 100 - 10d$$

$$x^2 + (y-d)^2 = 100$$

$$x^2 + (y-d)^2 = \sqrt{100 - 10d}$$



ACDB - трапеция.

h
Если представить вписанную окружность с квадратом AB, то $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, то C и D лежат на окружности

ACDB - вписанная \Rightarrow ACDB - равнобедренная.

$$10 - y > x$$

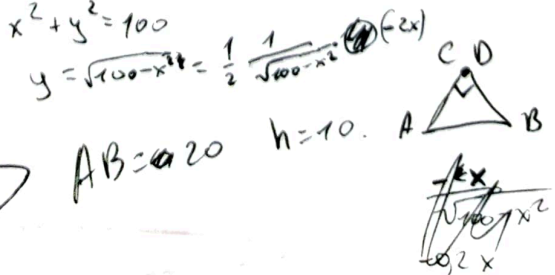
$$10 - (10 - 0,1x^2) > x$$

$$0,1x^2 > x$$

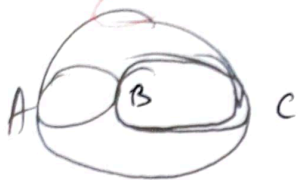
$$0,1x^2 - x > 0$$

$$x(0,1x - 1) > 0$$

$$x \in (-\infty; 0) \cup (10; \infty) \Rightarrow AB = 20 \quad h = 10.$$



Черновик
№ 4

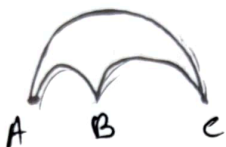


$AB = 15 \text{ км}$ $v = \frac{15}{7} \text{ км/мин}$

$AB = \frac{30}{\pi}$
 $BC = \frac{50}{\pi}$

$\Rightarrow AC = \frac{80}{\pi} \Rightarrow AC = 40$

7 17 17
85 мин



как минимум один раз.

CA =

$25 \times 2 = 50$

не подходит
17 + 0
11 + 2*7 - подходит

$AC + CB + BA + (2AB + BC) \cdot 2 =$

$= 40 + 25 + 15 + 2(2 \cdot 15 + 25) = 80 + 110 = 190 \text{ км.}$

№ 5

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$-\frac{2}{x+2}$

$g'(0) = ?$

$g(x) = f(f(\dots f(x)))$

$\frac{1}{4}S - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \quad f(0) = -\frac{2}{2+2}$

$\frac{1}{2}S - \frac{1}{2} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\frac{3}{2}+2}$

$S = \frac{x-2}{x+2}$

$\frac{1}{2}(S-1)$

$Sx + 2S = x - 2$

$Sx - x = -2S - 2$

$x(S-1) = -2S-2$

$x = \frac{-2S-2}{S-1} = \frac{-2(S+1)}{S-1}$

$f(S) = \frac{-2}{\frac{-2(S+1)}{S-1} + 2} = \frac{-2}{\frac{-2S-2+2S-2}{S-1}} = \frac{-2}{\frac{-4}{S-1}} = \frac{-2(S-1)}{-4} = \frac{S-1}{2}$

Чертовик

11

Врат.

Заш.

кан.

3 x

↓



0 утв. в заш.	$\frac{4 \times 3}{2}$	\times	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}$	если 0 утв. в заш. то кан.
1 утв. в заш.	4×3	\times	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6}$	высчитаем из 10
2 утв. в заш.	$\frac{3 \times 2}{2}$	\times	$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6}$	из 9
				из 8

$$3 \times (2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 7) = 3 \cdot (720 + 1008 + 168) = 3 \cdot 1896 = 5688$$



$$\frac{1}{2} \cdot \pi \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + 101(\Delta) -$$

$$- \frac{1}{4} \pi \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{4} \pi \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \frac{16}{9} + 1 - \frac{1}{4} \pi \left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9}\right) + \frac{3}{4} \pi \frac{1}{9}$$

$$= \pi \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{36} + \frac{3}{36}\right) + 1 = \pi \left(\frac{32}{36} - \frac{18}{36} + \frac{6\sqrt{2}}{36} - \frac{1}{36} + \frac{3}{36}\right) + 1$$

$$= \pi \left(\frac{16}{36} + \frac{6\sqrt{2}}{36}\right) + 1 = \pi \left(\frac{8}{18} + \frac{3\sqrt{2}}{18}\right) + 1 = \frac{8 + 3\sqrt{2} + \pi}{18} + 1$$

$$\begin{cases} (xy + 2x - y - 2) \parallel y - x - 10 \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases} \Rightarrow (x-4) \parallel xy + 2x - y - 2$$