



0 757691 080001

75-76-91-08

(40.16)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____ 7 _____

Выход: 19⁴⁴ - 19⁴⁶

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Князева Димитрия Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 25 » февраля 2024 года

Подпись участника

ДКса

60 (шестьдесят)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Ураш

Чистовик

[Handwritten signature]

75-76-91-08

(40.16)

$$\lg 2 = +\frac{1}{512}$$

Ответ: $+\frac{1}{512}$

N1

Всего хоккеистов - 16

лучших - 1 вратарь, 2 защитника, 3 нападающих

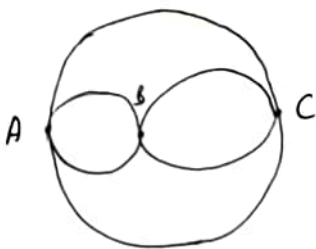
универсалы (их 3) - как защитники, так и нападающие

~~Анализ~~

$$C_{16}^6 = \frac{16!}{6! \cdot 10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{14} \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{16}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10}} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 4}{1} = 728$$

Ответ: 728

N4



$$\begin{aligned} \text{У} AC &= \text{У} AB + \text{У} BC = \\ &= 40 \text{ км} \end{aligned}$$

Маршруты:

- ✓ AB = 15 км $t_{AB} = 5$ мин
- ✓ BC = 25 км $t_{BC} = 17$ мин
- ✓ AC = ? $t_{AC} = 19$ мин.

Возможные маршруты автомобиля

~~AC → CB → BA → AB → BA → AB → BA~~
~~19 + 13 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5~~
 = AC → CB → BA → AC → CA → AB → BA →
 → AB → BA

$$\begin{aligned} &19 + 13 + 5 + 19 + 19 + 5 + 5 + 5 + 5 = \\ &= 19 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 13 = 95 \text{ минут} \end{aligned}$$

Общий маршрут в км:

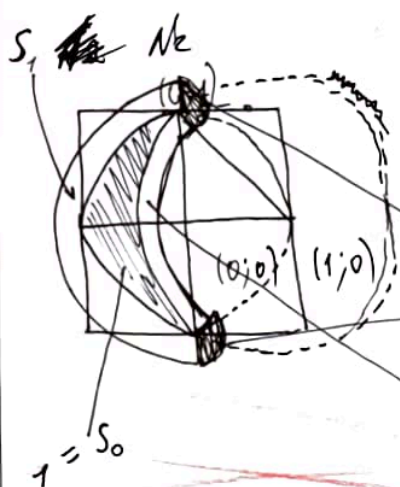
$$\begin{aligned} &40 + 25 + 15 + 40 + 40 + 15 + 15 + 15 + 15 = \\ &= 40 \cdot 3 + 15 \cdot 5 + 25 = 120 + 75 + 25 = \\ &= 220 \text{ км} \end{aligned}$$

Ответ: 220

N1

$$\begin{aligned} &2(C_5^2 \cdot C_6^3 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 + C_3^2 C_6^3 + \\ &+ C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 + C_5^2 C_3^2 C_6^1 + C_5^2 C_3^3 + \\ &+ C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^1 \cdot C_2^2 + \\ &+ C_3^2 C_6^2 C_1^1) = 2(10 \cdot 20 + 5 \cdot 3 \cdot 20 + \\ &3 \cdot 20 + 10 \cdot 3 \cdot 15 + 10 \cdot 3 \cdot 6 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 15 \cdot \\ &\cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 15 \cdot 1) = 3540 \end{aligned}$$

Ответ: 3540



Чистовик
Дано:

Контур радиуса из 2 дуг
1) центр (0;0), проходящий через (0;1)
2) центр (1;0), проходящий через (0;1)

Каждая точка радиуса преобразуется в окружность $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $S_1 = \pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \pi$
 $= \pi \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) - \pi$
 $= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Решение:

~~$S_2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$~~
 ~~$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_0$~~

$S = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \pi + 1$
~~Ответ:~~
 $1 + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \pi$

$(xy - 3 + 3x - y) |y - x - 9| = (x - 4) |xy - 3 + 3x - y|$ (1)
 $\sqrt{y - x + 9} = y - 4$ (2)

возведем @ в квадрат
 $(y - 4)^2 = y - x + 9$

$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4) |xy - 3 + 3x - y|$
 $x > 0 \quad y > 0$

~~$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4)(xy - 3 + 3x - y)$~~
 $(y - 4)^2 = (x - 4)$
 $x > 0 \quad y = 0$

$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4)(-xy - 3 + 3x + y)$

$$x < 0 \quad y > 0$$

$$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4)(-xy - 3 - 3x - y)$$

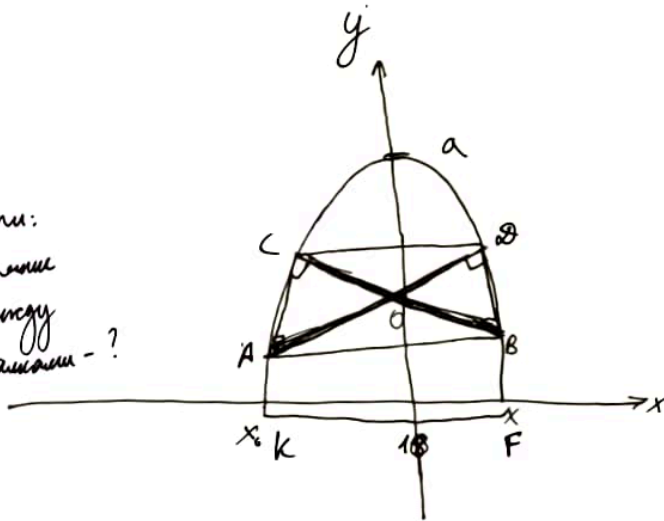
$$x < 0 \quad y < 0$$

$$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4)(xy - 3 - 3x + y)$$



№6

Найти:
расстояние
между
башнями - ?



$$x - x_0 = 18 = KF$$

$$a = 9$$

$$y = a - bx^2$$

~~AB || KF~~
~~CD || KF~~

AB || KF & ~~CD || KF~~

~~CD || KF~~ & ~~AB || KF~~

$$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$$

$$A \in \text{BC} = 0$$

Решение:

Т.к. $AB \parallel KF$ и $CD \parallel KF$ (по условию) $\Rightarrow AB \parallel CD$

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$ треугольники ACB и ADB - прямоугольные

№4

$$S_n = \sum_{k=1}^n k$$

Найти: наибольшее натуральное число n , которое для всех $m (1 \leq m \leq n)$ и справедливо $S(mn) = S(n)$

$$mn + 10n = 10n$$

$$mn = 0$$

Значит m - натуральное число

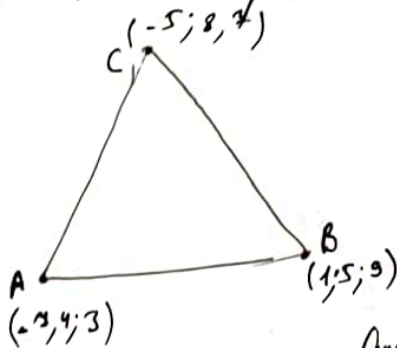
$$m \geq 1$$

$$n \geq m$$

Чистовик

№8

Прямоугольнику заданы координаты вершин (x, y, z) $A(-4; 4; 3)$, $B(1; 5; 9)$,
 $C(-5; 8; 7)$. Найдите количество точек пересечения с целочисленными
 координатами (включая точки на вершинах и сторонах)



Ответ: 49 точек

Найти ^{N7} наибольшее 100-значное натуральное число n , которое для всех $m (1 \leq m \leq n)$ и справедливо $S(mn) = S(n)$

Дано:

S_n - сумма цифр $n \in \mathbb{N}$

Пусть x - количество цифр числа $n \Rightarrow x=100$

$$S(2n) = S(n)$$

...

$$S(100n) = S(n)$$

⋮

$$S(n(n-2)) = S(n)$$

$$S(n(n-1)) = S(n)$$

$$S(n^2) = S(n)$$

Рассмотрим условие задачи на более простом примере: Пусть $x=4$

$$S(n^2) = S(n) \text{ для } n_{\max} = 9999$$

$$9999^2 = (10000 - 1)^2 = 10000^2 - 20000 + 1 = 99980001$$

$$S(n(n-1)) = S(n) \Rightarrow n_{\max} = 9999 \quad S(n^2) = 36$$

$$9998 \cdot 9999 = (9999 - 1)(9999) = 9999^2 - 9999 = 99970002$$

Проверяя далее, получим ту же закономерность:
Например, для $S(5n) = S(n)$

$$5n = 49995$$

$$S(5n) = 36$$

Аналогично, если проверим $x=6$, получим ту же картину:

$$S(n^2) = S(n) \text{ для } n_{\max} = 99999$$

$$S(5n) = S(n) \text{ для } n_{\max} = 99999$$

$$\Rightarrow \text{Для } x=100 \text{ получаем } n_{\max} = \underbrace{99 \dots 99}_{100 \text{ цифр}} \Rightarrow n = 10^{100} - 1$$

Ответ: $10^{100} - 1$

Чистовик

N5

$$y = f(x)$$

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$$

Пусть $\frac{x-1}{x+1} = t$

$$t(x+1) = x-1$$

$$tx+t-x+1=0$$

$$x(t-1)+t+1=0$$

$$x = -\frac{t+1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\frac{-t-1}{t-1} + 1} = \frac{1}{\frac{-t-1+t-1}{t-1}} = +\frac{t-1}{2}$$

$$\textcircled{1} f(x) = +\frac{x-1}{2}$$

$$\textcircled{2} f(f(x)) = +\frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = +\frac{x-3}{4}$$

$$\textcircled{3} f(f(f(x))) = +\frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = +\frac{x-7}{8}$$

$$\textcircled{4} f(f(f(f(x)))) = +\frac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = +\frac{x-15}{16}$$

$$\textcircled{5} f(f(f(f(f(x))))) = +\frac{\frac{x-15}{16} - 1}{2} = +\frac{x-31}{32}$$

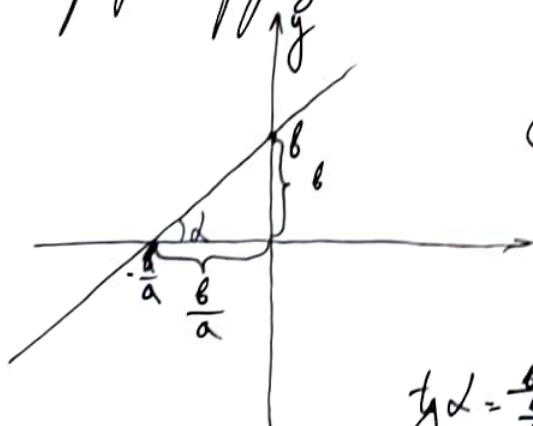
$$\textcircled{6} f(f(f(f(f(f(x))))) = +\frac{\frac{x-31}{32} - 1}{2} = +\frac{x-63}{64}$$

$$\textcircled{7} f(f(f(f(f(f(f(x))))) = +\frac{\frac{x-63}{64} - 1}{2} = +\frac{x-127}{128}$$

$$\textcircled{8} f(f(f(f(f(f(f(f(x))))) = +\frac{\frac{x-127}{128} - 1}{2} = +\frac{x-255}{256}$$

$$\textcircled{9} f(f(f(f(f(f(f(f(f(x))))) = +\frac{\frac{x-255}{256} - 1}{2} = +\frac{x-511}{512}$$

Расстояние между функциями



$$y = ax + b$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$0 - (-\frac{b}{a}) = \frac{b}{a}$$

$$tg \alpha = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = a \Rightarrow$$

Черновик

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) |y - x - 9| = (x - 4) |xy - 3 + 3x - y| & \textcircled{1} \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 & \textcircled{2} \end{cases}$$

выражение $\textcircled{2}$ в квадрате

$$|y - x + 9| = (y - 4)^2$$

Подставим в $\textcircled{1}$

$$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4) |xy - 3 + 3x - y|$$

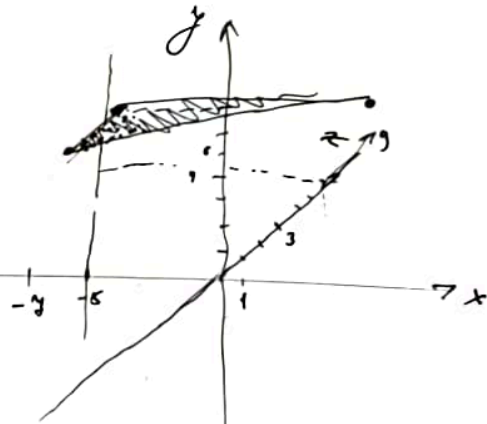
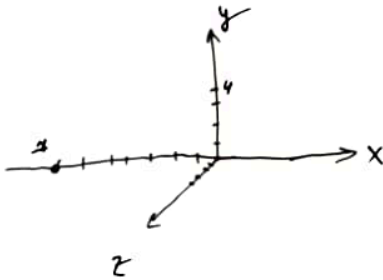
$$x > 0, y > 0$$

$$(xy - 3 + 3x - y)(y - 4)^2 = (x - 4)(xy - 3 + 3x - y)$$

$$y^2 - 8y + 16 = x - 4$$

$$\& y^2 - 8y + 20 = x$$

$\sqrt{8}$



Черновик

75-76-91-08
(40.16)

№1.

~~Всего хоккеистов~~

Всего хоккеистов - 16

лучших - 1 вратарь, 2 защитника, 3 нападающих

универсал (их 3) - или защитник, или нападающий

~~Всего хоккеистов~~

Пусть вратари - a, b

Защитники - c, d, e, f, g

Нападающие - h, i, j, k, l, m, n, p

Универсалы - 1, 2, 3

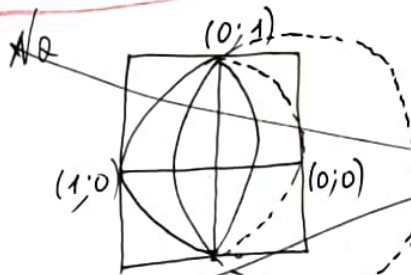
$$C_{13}^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

① a, c, d, h, i, j, n

② a, e, f, h, i, j

③ a, c, d, k, o, p

~~16!~~
~~6! \cdot 10!~~
~~1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16~~
~~1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16~~
~~1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4~~



Конструкция пописывается состоит из 2 дуг - одна от окружности с центром в (0,0), проходящей через (0,1), другая от окружности с центром в (1,0), проходящей через (0,1)

Каждая точка пописывается в виде радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x^2 + y^2 = R$$

№3
$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) | y - x - 9 | = (x - 4) | xy - 3 + 3x - y | & ① \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 & ② \end{cases}$$

①
$$\begin{aligned} x > 0 \quad y > 0 \\ (xy - 3 + 3x - y)(y - x - 9) &= (x - 4)(xy - 3 + 3x - y) \\ xy^2 - x^2y - 9xy - 3y + 3x + 27 + 5xy - 3x^2 - 27x + y^2 + xy + 9y &= \end{aligned}$$

Черныш

$$x^2y - 3x + 3x^2 - xy - 4xy + 12 - 12x + 4y$$

$$xy^2 - x^2y - 9xy - 3y + 3x + 2y + 3xy - 3x^2 - 2yx + y^2 + 4y + 9y = x^2y + 3x + 3x^2 +$$

$$+ xy + 4xy + 12 + 12x + 4y = 0$$

$$-xy - 2x^2y + 2y - 9x + xy^2 - 6x^2 + y^2 + 15 = 0$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

N5 $y = f(x)$ $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

Система $t = \frac{x-1}{x+1}$

$$t(x+1) = x-1$$

$$tx + t - x + 1 = 0$$

$$x(t-1) + t+1 = 0$$

$$x = \frac{-(t+1)}{t-1}$$

$$f\left(\frac{-(t+1)}{t-1}\right) = \frac{1}{\frac{-(t+1)}{t-1} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{-t-1+t-1}{t-1}} = -\frac{t-1}{2}$$

① $f(x) = -\frac{x-1}{2}$

② $f(f(x)) = -\frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = -\frac{x-3}{4}$

③ $f(f(f(x))) = -\frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = -\frac{x-7}{8}$

④ $f(f(f(f(x)))) = -\frac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = -\frac{x-15}{16}$

⑤ $f(f(f(f(f(x))))) = -\frac{\frac{x-15}{16} - 1}{2} = -\frac{x-31}{32}$

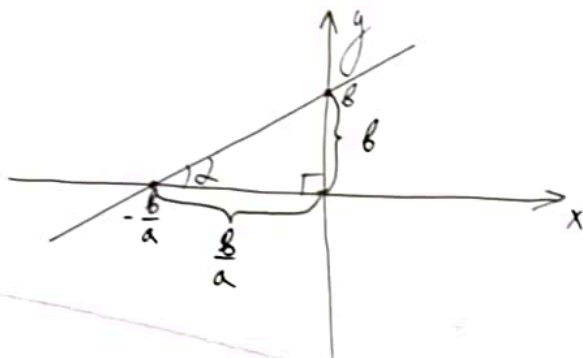
⑥ $f(f(f(f(f(f(x))))) = -\frac{\frac{x-31}{32} - 1}{2} = -\frac{x-63}{64}$

⑦ $f(f(f(f(f(f(f(x))))) = -\frac{\frac{x-63}{64} - 1}{2} = -\frac{x-127}{128}$

75-76-91-08
(40,16)

⑧ $f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))) = \frac{-x-127}{128} - 1 = \frac{-x-255}{2} = \frac{-x-255}{256}$ Чирюшкин

⑨ $f(f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))) = \frac{-x-255}{256} - 1 = \frac{-x-511}{512}$



$$y = ax + b = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$0 - (-\frac{b}{a}) = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{-\frac{b}{a}} = \frac{ab}{-b} = -a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{512}$$

$$19 + 13 + 5 = 37$$

N4

- AB = 15 км
- t_{AB} = 5 мин
- BC = 25 км
- t_{BC} = 13 мин
- t_{AC} = 19 мин
- t_{пртн} = 35 мин

S = ?

$$5 + 13 + 13 \cdot 5$$

$$AB \rightarrow BC \rightarrow CB \rightarrow BA$$

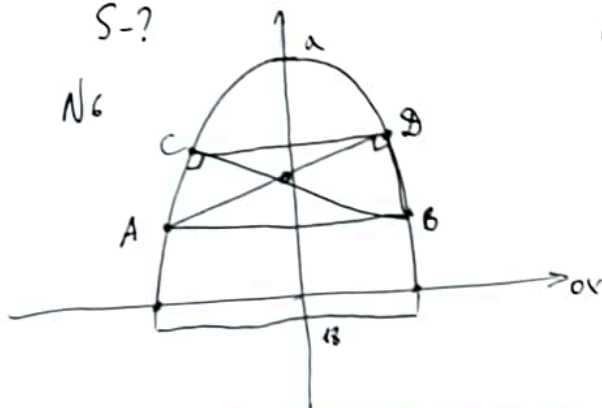
$$5 + 13 + 19 = 37$$

$$5 + 13 + 19 = 37$$

$$5 + 13 + 19 = 37$$

$$5 + 13 + 19 = 37$$

N6



a = 9

$$120 + 9 + 25 = 220$$