0 053588 870008

05-35-88-87
(40.30)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6 Выход: 14^{40} — 14^{42}

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ковылина Александра Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

05-35-88-87

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	4	4	12	8	12	0	12	64

Чистовик

Задача №1 64 (шестьдесят четыре)

~~Всевозможность~~

Будем рассматривать по кол-ву универсалов на позиции на Врат. - всегда 0 => 2 вар.

(I) В защ. - 0 универс., тогда в защ - C_4^2, а в нап. C_{10}^3

(II) В защ. - 1 универс., тогда в защ. - $C_4^1 \cdot C_3^1$, а в нап. - C_9^3

(III) В защ. - 2 универс, тогда в защ. - C_3^2, а в нап. - C_8^3

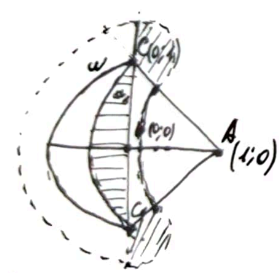
Всего - $2 \cdot \left(6 \cdot \frac{10\cdot9\cdot8}{6} + 4\cdot3\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{6} + 3\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{6}\right) =$

$= 2\cdot(10\cdot9\cdot8 + 2\cdot9\cdot8\cdot7 + 3\cdot8\cdot7) = 16(90 + 7(18+3)) = 16\cdot(90+7\cdot21) =$

$= 16\cdot(90+147) = 16\cdot237 = 3792$ способа.

$$\begin{array}{r} \times\,237 \\ 16 \\ \hline 1422 \\ 237 \\ \hline 3792 \end{array}$$

Задача №2



1) Проведем в т. B окружность рад 1,5 и рассмотрим её левую полуокружность. По пер-ву Δ любая точка отст. от точек ω на 0,5 находится на расст. ≤1,5 от B, т.к. все т. ω отстоят от B на расст. 1

т.е. все точки внутри этого полукруга лежат внутри конечной области

2) Проведем окружность с ц. в т. A и радиусом и рассмотрим её сектор огр. AC и AC_1 аналогично (1) по пер-ву Δ ограничим область справа

3) Осталось два сектора, заштрихованных диагонально, раз $\angle ACB = \angle AC_1B = 45^\circ$, то секторы - рад. 0,5 и $\angle = 135^\circ$ => всего они занимают $\frac{3}{4}$ круга радиусом 0,5

4) Чтобы посчитать площадь сложим 8 нужных секторов 1) и 2), вычтем площадь заштрихованную гор-но и добавим заштрих-ную диагонально

Чистовик Задача 2 продолж.

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(1{,}5)^2 = \frac{9\pi}{8}$

$S_2 = \frac{1}{4}\left(\pi\cdot(\sqrt2)^2 - \pi\cdot(\sqrt2-0{,}5)^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt2-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left(4\sqrt2-1\right)$

$S_{гор.} = \frac{1}{4}\left(\pi\cdot(\sqrt2)^2\right) - \frac{1\cdot2}{2} = \frac{\pi}{2}-1$

$S_{диаг.} = \frac{3}{4}\left(\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3\pi}{16}$

$S_{общ.} = S_1 + S_2 - S_{гор} + S_{диаг.} = \frac{18\pi}{16} + \frac{\pi(8\sqrt2-2)}{16} - \frac{8\pi}{16} + 1 + \frac{3\pi}{16} =$

$= \frac{\pi}{16}\left(18+8\sqrt2-2-8+3\right)+1 = \frac{(11+8\sqrt2)\pi}{16}+1$

Задача №3

$$\begin{cases}(x-2)(y+3)\,|y-x-8| = (x-5)\,|(x-2)(y+3)| \quad (1)\\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \quad (2)\end{cases}$$

(2) $\sqrt{y-x+10} = y-4$

$y-x+10 = y^2-8y+16$

$-x = y^2-9y+6$ (3)

1) из (2) $y>4 \Rightarrow y+3>0$

$$\begin{cases}(x-2)\,|y-x-8| = (x-5)\,|x-2|\\ \sqrt{y-x+10} = y-4\end{cases}$$

2) из (3) $y-x-8 = y^2-8y-2$

$-(x-5) = y^2-9y+11$

(1) $x>2 \Rightarrow |y-x-8| = x-5 \Rightarrow x>5 \Rightarrow y^2-9y+11<0$

$|y^2-8y-2| = 9y-y^2-11$ Если $|\,|<0$, то $y=13$, но $13^2-8\cdot13-2>0 \Rightarrow |\,|>0$

$$\begin{cases}2y^2-17y+9=0\\ y^2-8y-2>0 \Rightarrow y>4+3\sqrt2\end{cases}$$

$y_{1,2} = \frac{17\pm\sqrt{217}}{4}$

минус точно не подходит, т.к.

$17+\sqrt{217} < 16+12\sqrt2$

$217 < 288 - 24\sqrt2 + 1$

$24\sqrt2 < 72$

$\Rightarrow$ нет корней

05-35-88-87 (40.30)

Чистовик

(II) $x=2 \Rightarrow$ (1) выполнено

$$\begin{cases} -2=y^2-9y+6 \\ y>4 \end{cases}$$

$$y^2-9y+8=0$$
$$(y-8)(y-1)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} y=8 \\ y=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y=8 \\ x=2 \end{cases}$$

(III) $x<2$ $\quad |y-x-8| = 5-x$

$$|y^2-8y-2| = y^2-9y+11$$

Если $|\,|>0$, то $y=13$, а $x=$

$$-x = 13(13-9)+6 = 58$$
$$x=-58$$

При $|\,|<0$

$$\begin{cases} y^2-8y-2<0 \\ y>4 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y<4+3\sqrt{2} \\ y>4 \\ y=\frac{17\pm\sqrt{217}}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow y=\frac{17+\sqrt{217}}{4}$$

$$-2x = 2y^2-18y+12 = (2y^2-17y+9)-y+3$$

$$x=\frac{y-3}{2}=\frac{5+\sqrt{217}}{2}>2$$

$\Rightarrow$ нет корней

Ответ: $\{(2;8)\}$

Задача №4

Всего Автомобиль ехал 85 мин.

посмотрим на кол-во n дуг AC, кот. он проехал

$n\le 5$, т.к. $17\cdot 5=85$

$n=5$ - не подх, т.к. тогда он не вернулся

Заметим, что чётные n не подойдут, т.к. тогда у него чёт кол-во въезд/выезд на AB и получается чет. кол-во въезд/выезд на BC, т.е. всего чёт кол-во минут, а всего 85 - нечёт.

$n=3 \Rightarrow$ по AB и BC $85-51=34$ мин $\underset{11}{\equiv} 1$, $7 \underset{11}{\equiv} 7$, а

~~Кол-во въездов~~

$7\cdot 8$ - мин число: $7 \underset{\cdot}{\equiv} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по AB х/б 8 дуг, что невозможно

Значит $n=1$

По AB и AC суммарно – 68 мин Чистовик.

$68 \equiv_{11} 2$ $7\cdot 5$ – мин. число $\equiv_{11} 2$ и $\vdots\, 7$ ⇒ по AB – $\vdots\, 5$, значит

5, т.к. $68 \not\vdots\, 11$, $70 > 68$ ⇒ 5 дуг по AB и 3 дуги по BC –

Заметим, $\breve{AB}+\breve{BC} = \pi(r_{AB}+r_{BC}) = \pi(r_{AC}) = \breve{AC}$ ⇒ всего

$1\cdot 34 + 5\cdot 13 + 3\cdot 21$ мин $= 4\cdot 34 + 2\cdot 13$ мин $= \overset{102}{3\cdot 34} + \overset{60}{34+26} = 162$ км.

Пример. AB, AB, AB, AB, AB, BC, BC, BC, AC

Задача №5

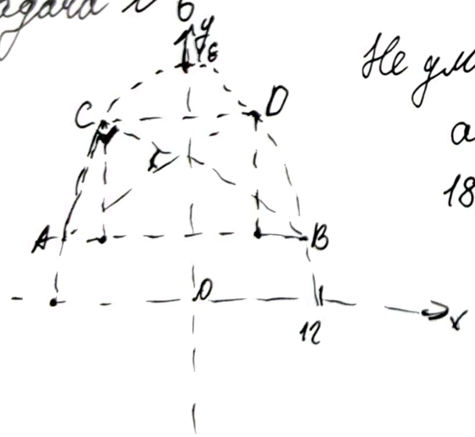
$$\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$g(x) = \frac{1}{2^{12}}x + C$, где C – const, (получим приходся) ⇒

⇒ $g'(x) = \frac{1}{2^{12}}$ = tg наклона

Ответ: $\frac{1}{4096}$

Задача №6



Не умал. общн. AB ближе к полу

$a = 18$

$18 - b\cdot 12^2 = 0$

$b = \frac{18}{12^2} = \frac{3}{2\cdot 12} = \frac{1}{8}$

$y = 18 - \frac{1}{8}x^2$

Пусть у D коорд $(x_0; y_0)$, у B – (x_1, y_1), тогда по св-ву п/у Δ

$(y_0 - y_1)^2 = (x_1 - x_0)\cdot(x_0 - (-x_1))$ (высота в квад. равна произв. отр-ко кот. делит основание

$\left(\frac{1}{8}(x_1^2 - x_0^2)\right)^2 = x_1^2 - x_0^2$

05-35-88-87 (40.30)

Чистовик

$x_1+x_0>0$ и $x_1 \neq x_0 \Rightarrow x_1^2-x_0^2 \neq 0$

$\frac{1}{64}(x_1^2-x_0^2)=1$

$x_1^2-x_0^2=64$

$y_0-y_1=\frac{1}{8}(x_1^2-x_0^2)=8$ Ответ: рассм между бамками -8

Задача №8

Для удобства сделаем перенос на вектор $\{5;5;5\}$, т.е. первую точку совместим с 0 нач. координат заметим, что таким образом мы не изменили кол-во целоч. точек Δ

$A(0;0;0)$ Найдем ур-ние плоскости $\alpha(ABC)$

$B(6;8;1)$ $ax+by+cz+d=0$

$C(4;2;4)$

$\begin{cases} d=0 \\ 6a+8b+c=0 \\ 4a+2b+4c=0 \end{cases}$ $-10a-15c=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}c$

$8b-8c=0 \Rightarrow b=c$

$-3x+2y+2z=0$

• Найдем точки принадл. α и леж. в пределах

$\begin{matrix} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 8 \\ 0 \le z \le 4 \end{matrix}$ т.к. ~~и другой точки~~ любая др. точка точно не лежит на Δ, т.к. x/б 1 коорд. больше или меньше чем у ~~какой-то~~ всех гранич. точек.

$3x=2y+2z$

1) $x \vdots 2$, т.к. $2y+2z \vdots 2$, также $y+z \vdots 3$

I $x=0$

$2y+2z=0 \Rightarrow z=0, y=0$ $(0;0;0)$

II $x=2$

~~как~~ $y+z=3 \Rightarrow$

(2 0 3) 1

(2 1 2) 2

(2 2 1) 3

(2 3 0) 11

III $x=4$

$y+z=6$

(4 2 4)

(4 3 3) 4

(4 4 2) 5

(4 5 1) 6

(4 6 0) 7

IV $x=6$

$y+z=9$

(6 8 1)

(6 7 2) 8

(6 6 3) 9

(6 5 4) 10

Заметим, что точка должна попасть во ~~все~~ любую ~~три~~ проекции ABC в плоскости $x=0$, $z=0$ или $y=0$. Заметим, что если попала в одну то попала и в другие

1) $x=0$

Чистовик

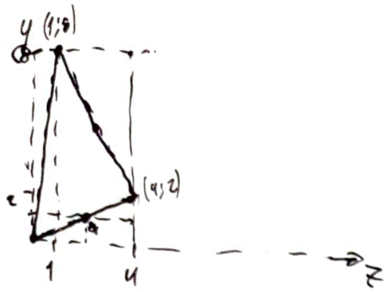
$8=k+b$

$2=4k+b$

$k=-2$

$b=10$

$y=-2z+10$



~~Не попали - 1,~~

~~Попали - 2,~~

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}z & \text{I} \\ y \leq 8z & \text{II} \\ y \leq -2z+10 & \text{III} \end{cases}$$

Из огр. 1-ти не попали

Точка	усл-е
1	I
11	II
7	II
8	III
9	III
10	III

Т.е. попали - 5 из 11 и 3 верш.

Ответ: 8 точек.

Задача №7

Рассмотрим такое число n, ~~пусть A(x, y) - кол-во цифр z в числе n, что z х раз~~

Пусть a_i - кол-во цифр i в числе n, тогда

$S(n)=S(2n)=2S(n)-(a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)$ (1) $\quad S(n)=10(a_5+a_6+\dots+a_9)$

$S(n)=3S(n)-10(a_4+a_5+a_6)-20(a_7+a_8+a_9)$ (2)

$S(n)=4S(n)-10(a_3+a_4)-20(a_5+a_6+a_7)-30(a_8+a_9)$ (3)

$S(n)=5S(n)-10(a_2+a_3)-20(a_4+a_5)-30(a_6+a_7)-40(a_8+a_9)$ (4)

$S(n)=6S(n)-10(a_2+a_3)-20(a_4)-30(a_5+a_6)-40(a_7+a_8)-50a_9$

\- - - -

$S(n)=9S(n)-10a_2-20a_3-\dots-80a_9$ (9)

$a_1+2a_2+3a_3+\dots+9a_9=S(n)$ (10)

$a_0+a_1+a_2+a_3+\dots+a_9=75$ (11)

из (9) ~~8S(n)=10(...)~~

~~Черновик.~~

~~$a_0 = 3$~~

~~$a_1 = a_2 + \ldots a_8 = 8$~~

~~$S(n) = 45 \cdot 8 =$~~

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$(0,0,0)$ $(6,8,1)$

$(4;2;4)$

$ax+by+cz+d=0$

~~6x+8y+~~

$6a+8b+c=0$

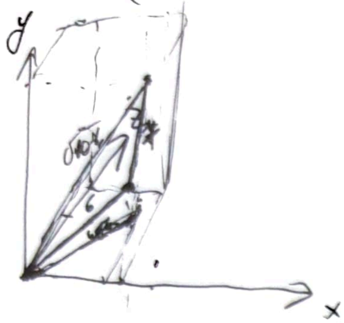
$4a+2b+4c=0$

$-10a-15c=0$

$a=-\frac{3}{2}c$

$-9c+8b+c=0$

$b=c$



$-3x+2y+2z=0$

x ox $0<x<4$

$0<y<8$

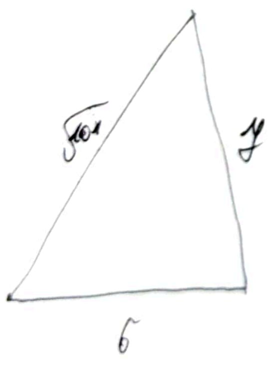
4 2 4 $0<z<4$

$16+16+4=36=6$

$36+64+1$

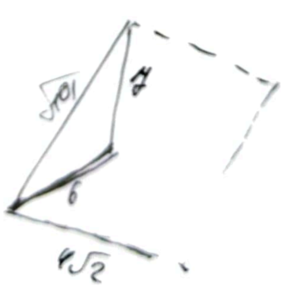
2 6 -3

$36+4+9$



4

$49+36=$



$S(n)=S(3n)=3S(n)$ − кол-во ч. ... −2·кол-во чисел)

62×23

$S(n)=S(2n)=2S(n)$ − кол-во ...

чисел >5

Черновик

3 3 3 3 | У У У | У Н Н Н Н Н Н Н Н

$\frac{4\cdot 3}{2}$

$4\cdot 3$

$4y+3x-2y-6=(x-2)(y+3)$

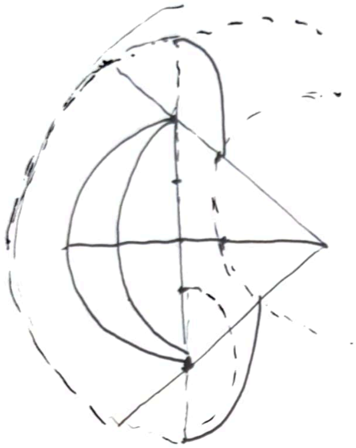
$x<y+10$

$y>4$

$y>x+8$

$f(x)=\frac{x-1}{2}$

$1+\frac{4}{x-2}$



$(x-2)|y-x-8|=|x-2|(x-5)$

$y^2-9y+11$

$\begin{array}{r} 81 \\ -44 \\ \hline 37 \end{array}$

$\begin{array}{r} 289 \\ -72 \\ \hline 217 \end{array}$

$y-x+10=y^2-8y+16$

$2-x=y^2-9y+8$

$(y-1)(y-8)$

$\cancel{5-x=y^2-9y+11}$

$\frac{17\pm\sqrt{217}}{4}$

$y>\frac{8+\sqrt{72}}{2}=\frac{8+6\sqrt{2}}{2}=4+3\sqrt{2}$

$y<\frac{9+\sqrt{37}}{2}$

$-x=y^2-9y+8$

$-x-8=y^2-9y$

$y-x-8=y^2-8y-2$

$\sqrt{23-x}=9$

$60+25=85$

7 11 17

50 35

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3$