0 694026 970005

69-40-26-97
(43.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кокорева Дмитрия Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

69-40-26-97

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
0	12	8	12	0	12	12	0	56		Егоренков В.А.
										Кулешов И.А.

1. неправильно посчитано количество способов выбрать n игроков из k (C_k^n)

2. верно

Арифметическая ошибка при раскрытии квадрата

3. лишнее решение. $|y \geq 4.|$

4. верно

5. нет решения

6. верно

7. верно

8. нет решения

69-40-26-97 (43.3)

~~56 (пятьдесят шесть)~~

Черновик

13
× 7
91

(1) 0Y   4Y−3   1Y−N   2Y−17,3

2·5·4·6·5·4 + 2·3·5·6·5·4 + 2·5·4·3·6·5 + 2·3·5·2·6·5 +

2Y−33   2Y−NN   3Y−33N   3Y−3NN

+ 2·3·2·6·5·4 + 2·5·4·3·2·6 + 2·3·2·6·5·1 + 2·3·5·6·5·2 +

3Y−NNN

+ 2·5·4·3·2·1   8 ⇒ 7

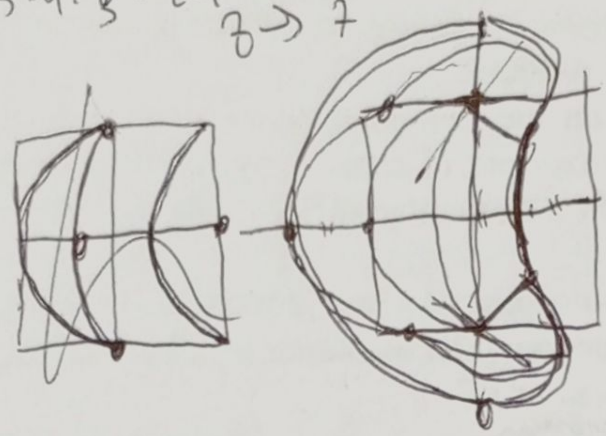
99 × 73, 297 + 693 = $\boxed{7227}$

49 × 45 11^2 100020   1111111

Ш

9

(2)



25 × 81   2000 + 2025

99 × 99 = 891 + 891 = $\boxed{9801}$

990 − 99 = 891   81

999...9891

99 × 99   998001

(3)

$xy-3+3x-y=(x-1)(y+3)$

$y>4$

$y-x+9=y^2-8y+16$

$x=-y^2+9y-7$

117 − 104 = 7   176 − 117 = 59 10^2

(9)

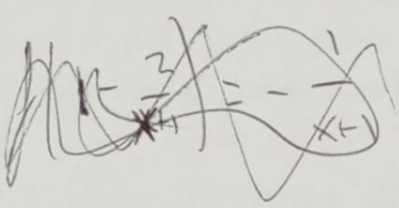
$99\cdot 2=198$

$99\cdot 3=297$

$9n \equiv n$ (9)   1440

$S(2n)=S(n)$

81   9   99



12 × 120   120 × 40 = 4800   36 × 40 = 1440

19 × 3 = 57 + 13 = 70   52 + 38 = 90

$95=a\cdot 15+b\cdot 13+c\cdot 19$

$k\cdot(9\cdot 10+9)=$

$=k\cdot 9\cdot 10$

$\boxed{9\ldots}$

2·3·5·3·6·5

$b\cdot 13+c\cdot 19 \,\vdots\, 5$

10·30·9

4800 + 7200 = 12000 + 2880 = 14880 + 2700 = 17580 + 720 = 18300 + 240 = 18540

$b=0 \Rightarrow c=5 \Rightarrow a=0$ — подходит

$b=1 \Rightarrow c=3 \Rightarrow a=5$ — подходит

$b=2 \Rightarrow c=6$

$b=3 \Rightarrow c=7$

$b=4 \Rightarrow c=2 \Rightarrow a=1$ — не подходит.

$b=5 \Rightarrow c=5$

$b=6 \Rightarrow c=3$

$b=7 \Rightarrow c=6$

~~$b=8 \Rightarrow c=1$~~

$-1<7\sqrt{217}$

289 − 72 = 217

$\dfrac{-17\pm\sqrt{217}}{-4}>4 \Leftrightarrow$

$-17\pm\sqrt{217}<-16$

Чистовик

Задача 1

∃ несколько случаев:

1) Универсалы не используются, тогда кол-во способов набрать команду:

$2 \cdot \underbrace{5 \cdot 4}_{} \cdot 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4}_{} = 2 \cdot 20 \cdot 120 = 4800$

кол-во способов выбрать вратаря; кол-во способов выбрать защитника; кол-во способов выбрать нападающего

2) Универсал 1 и он защитник:

$2 \cdot \underbrace{3 \cdot 5}_{} \cdot \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{} = 3600$

вратарь; защитник; нападающие

3) Универсал 1 и он нападающий

$2 \cdot \underbrace{5 \cdot 4}_{} \cdot \underbrace{3 \cdot 6 \cdot 5}_{} = 3600$

вратарь; защитник; нападающий

4) Универсала 2 и они оба защитники

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{} = 1440$

вратарь; защитники; нападающие

5) Универсала 2 и оба нападающие

$2 \cdot \underbrace{5 \cdot 4}_{} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 6}_{} = 1440$

вратарь; защитники; нападающие

6) Универсала 2 и один из них — защитник, а другой нападающий

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 = 2700$

7) Универсала 3 и один из них — нападающий, и 2 — защитника

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 360$

8) Универсала 3 и один из них — защитник, а 2 — нападающие

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 = 360$

9) Универсала 3 и ~~один~~ все — нападающие

$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$

т. обр. ответ:

$4800 + 3600 + 3600 + 1440 + 1440 + 2700 + 360 + 360 + 240 =$

$= 18540$

Ответ: 18540

69-40-26-97 (43,3)

Задача 3 Чистовик

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y| \ (1) \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \ (2) \end{cases}$$

из (2) следует, что $y \geq 4$ (иначе нет решений)

$xy-3+3x-\cancel{y} = \cancel{(x-1)(y+3)}\ (x-1)(y+3) \Rightarrow$ т.к. $y \geq 4$, то знак будет зависеть только от x

Решим (1) с условием $y \geq 4$

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3x+3x-y| \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} y \geq 4 \\ x \geq 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 1 \\ |y-x-9| = x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ |y-x-9| = 4-x \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ y-x-9 = x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ y-x-9 = 4-x \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

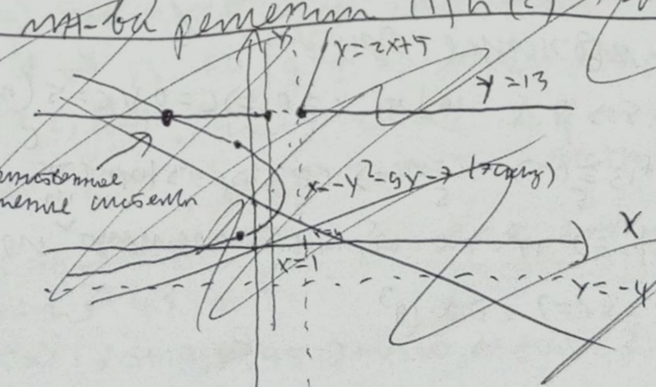
$$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} y \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2x+5 \\ y = 13 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x < 1 \\ y = 13 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} y = 13 \\ y = 2x+5 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим (2)

$$\sqrt{y-x+9} = y-4 \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+9 = y^2-8y+16 \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = y^2-9y+7 \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2+9y-7 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

~~Изобразим мн-ва решений (1) и (2) на гр-ке:~~



Чистовик

1. обр. возможные решения - это:

(*) $1=-y^2+9y-7$ ($x=1$ пересекаясь с параболой)

(-) $x=-13^2+9\cdot13-7$ ($y=13$)

(^) $x=-(2x+5)^2+9(2x+5)-7$ ($y=2x+5$)

(*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=8 \end{array}\right.$ - подходят оба корня ~~подходит~~

(-) $\Leftrightarrow x=-59$ - подходит

~~(^) $\Leftrightarrow -y^2+9y-7=\frac{y-5}{2} \Leftrightarrow -2y^2+18y-14=y-5 \Rightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow -2y^2+17y-9 \Leftrightarrow$~~

(^) не имеет решений т.к. (-) имеет решение при $x=-59 \Rightarrow$ ~~при $x(-59;$~~ при больших x парабола лежит ниже при $y=13$, а наименьшее значение $2x+5$ при $x\geq 4$ - это $13 \Rightarrow$ т.к. $2x+5\geq 13$ $\forall x\geq 4$ (для меньших x она не опр. из условия), а ~~парабола~~ перевернутая парабола лежит ниже $\Rightarrow$ нет решений

Ответ: $\{(1;1);(1;8);(-59;13)\}$

$\overset{\circ}{54}$

$\exists$ автомобиль a раз проехал по дуге AB, b раз - BC, c раз - AC тогда:

$5\cdot a+13\cdot b+19\cdot c=95$

$5a:5$
$95:5 \Rightarrow (3b+19c):5$

$\forall$ все возможные значения b:

1) $b=0 \Rightarrow 19c:5 \Rightarrow$ т.к. $19 \perp 5$ $c\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c=0 \vee c=5$ (при больших c $19c>95$)

2) $b=1 \Rightarrow 19c+13\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow 19c\underset{5}{\equiv}2 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}3 \Rightarrow c=3$ (при $c>5$ к 15 $19c>95$)

$19^4\underset{5}{\equiv}1$ по МТФ $\Rightarrow$ 19^3 - это обратный элемент по модулю 5

$\Rightarrow$ ур-е $19c\underset{5}{\equiv}x \Leftrightarrow c\underset{5}{\equiv}x\cdot 19^3$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

69-40-26-97
(43.3)

Чистовик

3) $b=2 \Rightarrow 19c+26\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}1 \Rightarrow c=1$

4) $b=3 \Rightarrow 19c+39\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}4 \Rightarrow c=4$

5) $b=4 \Rightarrow 19c+52\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}2 \Rightarrow c=2$

6) $b=5 \Rightarrow 19c+65\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c=0 \vee c=5$

7) $b=6 \Rightarrow 19c+78\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}3 \Rightarrow c=3$

8) $b=7 \Rightarrow 19c+91\underset{5}{\equiv}0 \Rightarrow c\underset{5}{\equiv}1 \Rightarrow c=1$

$\forall$ возможные значения a при данных b и c

1) $b=0$, $c=0 \Rightarrow a=19$ - невозможно если автомобиль ездил ~~это~~ только по дугам AB, то он сделал 9 оборотов и еще 1 и не оказался в точке a

2) $b=0$, $c=5 \Rightarrow a=0$ не возможно т.к. если автомобиль ездил только по дугам AC, то он сделал 2 оборота и еще пол оборота и не оказался в A

3) $b=1$, $c=3 \Rightarrow a=5$. возможно: $AB, BA, AB, BA, AB, BC, CA, AC, CA$ - порядок дуг

4) $b=2$, $c=1 \Rightarrow a=10$ - невозможно. $\forall$ (.) C. чтобы ~~в ней возможно~~ она появилась в пути в не нужно прийти и уйти. сделать это можно только с помощью действий c и b в ней нельзя останавливаться и начинать $\Rightarrow$ в C нужно прийти (1 действие) и уйти (1 действие) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ действий с C должно быть четно, но $1+2=3$ - нечетно $\Rightarrow$ невозможно соблюсти все условия

5) $b=3$, $c=4$ $\Rightarrow$ $13\cdot3+4\cdot19>95 \Rightarrow$ невозможно

6) $b=4$, $c=2 \Rightarrow a=1$. Аналогичные 4) рассуждения для (.) B получаем, что $4+1=5$ - нечетно $\Rightarrow$ невозможно

7) $b=5$, $c=0 \Rightarrow a=6$ - невозможно т.к. аналогичные 4) рассуждения для c

8) $b=5$, $c=5 \Rightarrow 13\cdot5+19\cdot5>95 \Rightarrow$ невозможно

Чистовик

9) $b=6, c=3$ а $6\cdot13+3\cdot19>95 \Rightarrow$ невозможно

10) $b=7, c=1$ $\quad 7\cdot13+19>95 \Rightarrow$ невозможно.

т. обр. трассу освободил грузовиков только в случае $b=1, c=3, a=5$

$$\left.\begin{aligned}|\cup AB| = 15\pi = \pi\frac{|AB|}{2} \Rightarrow |AB| = \frac{30}{\pi}\\ |\cup BC| = 25\pi = \pi\frac{|BC|}{2} \Rightarrow |BC| = \frac{50}{\pi}\end{aligned}\right\} \Rightarrow AC = \frac{80}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cup AC| = \pi\frac{|AC|}{2} = \pi\cdot\frac{40}{\pi} = 40$$

т. обр. автомобиль проехал $5\cdot15+1\cdot25+3\cdot40 =$

$= 75+25+120 = 220$ км

Ответ: 220 км

Задача 7

Пусть $n = \underbrace{99\ldots9}_{100}$ – наибольшее 100-зн число $\Rightarrow$

если я докажу, что оно подходит под условие, то я решу задачу (т.к. 100-зн. числа больше, чем это не сущ.)

~~Докажем ММИ, что $S(mn)=S(n)$~~

~~1) База: для $m=1$ – очевидно~~

~~2)~~

~~Докажем ММИ следующее утв: $S(mn)=S(n)$ и в 100 цифрах начиная с конца нет нулей~~

~~1) База: для $m=1$ – очевидно~~

~~2) Шаг индукции:~~

~~Пусть для $k=m$ – верно, (1) для $k=m+1$~~

~~$kn+n$~~

~~$kn+n-(k+1)n$ – число для которого нужно доказать утв.~~

~~начиная с последней цифры начнем прибавлять n. После прибавления 1 девятки (последней)~~

~~Сумма цифр числа уменьшилась + не изменит т.к. последнее число не 0 $\Rightarrow$~~ Чистовик

число $mn = m\cdot(10^{100}-1) = m\cdot10^{100} - m$

$S(m\cdot10^{100}-m)$

$m < 10^{100}$

$S(m\cdot10^{100}-1-(m-1)) = S(m-1) + S(\underbrace{99\ldots9}_{100} - (m-1))$

посмотрим как изменится число $\underbrace{99\ldots9}_{100}$, если из него вычесть $m-1$

т.к. на каждом разряде числа $m-1$ стоит цифра ≤ 9, то при вычитании этого разряда из числа $\underbrace{99\ldots9}_{100}$ ($m<10^{100}$) заниматься соседние разряды не будут, будет меняться только цифра разряда т. обр.

Пусть $m-1 = \overline{a_1a_2\ldots a_k}$, тогда $\underbrace{99\ldots9}_{100} - (m-1) =$

$= \overline{99\ldots9(9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_k)} \Rightarrow$

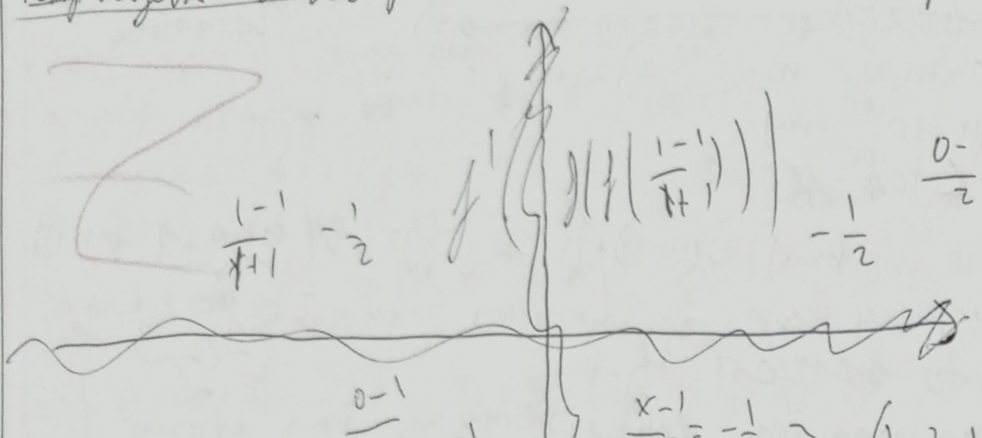
$\Rightarrow S(\underbrace{99\ldots9}_{100} - (m-1)) = S(\underbrace{99\ldots9}_{100}) - S(m-1)$

т. обр. $S(m\cdot10^{100}-m) = S(m-1) + S(\underbrace{99\ldots9}_{100}) - S(m-1) =$

$= S(\underbrace{99\ldots9}_{100}) = n$ ч.т.д.

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{100}$

~~нарисуем пл. коорд. пл-ти данный~~ ○ Черновик



$\frac{1-1}{x+1}$ $-\frac{1}{2}$ $f'(\ldots f(f(\frac{1-1}{x+1})))$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{0-1}{2}$

$\frac{0-1}{x+1}$ -1

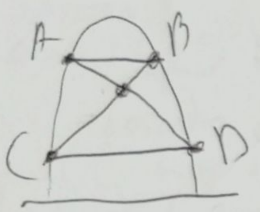
$\frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{3}$ $x_2 + \left(\frac{1}{9}x_2^2 - \frac{1}{9}x_1^2\right)^2 =$

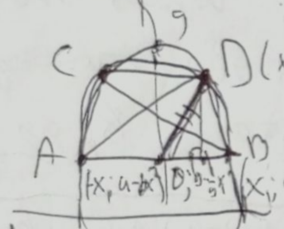
$f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = f'(x) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$

$2x-2 = x-1$ $= x_1^2$

$\Rightarrow x = 1$ $x_2^2 - x_1^2$

$x = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{81}(x_2-x_1)^3(x_2+x_1)^3$





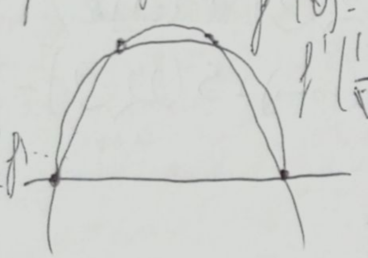
$D(x_2; a-bx_2^2)$

$(x_1; a-bx^2)$ $(x_1; a-bx^2)$

$\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{4}$

$1-\frac{2}{x+1}$ $f(0) = f'1-1$ $f'(0) = \frac{1}{3}$ 9 $2x_1$ $f'|-$

$f'\left(\frac{1-1}{x+1}\right) = (x_2-x_1)^2 + (bx_2^2 - bx_1^2)^2$



$x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 +$

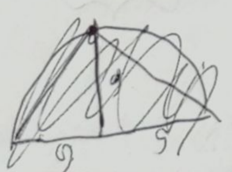
$f'(0) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$

$(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{81}(x_2^2-x_1^2)^2 +$

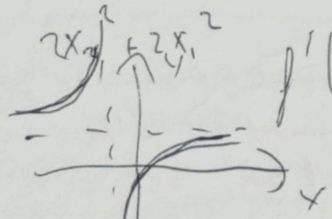
$9 - \frac{1}{9}x$

$+(x_2+x_1)^2 + \frac{1}{81}(x_2^2-x_1^2) = 2$

$9 - b\cdot 81$



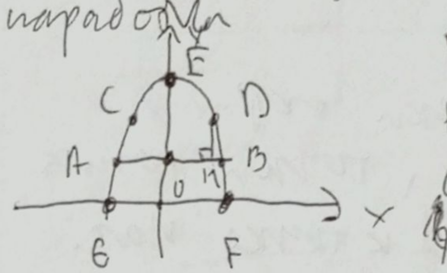
$2x_2^2 + 2x_1^2$ $f'(f(f(f\ldots f(\frac{x-1}{x+1})=$



Чистовик.

Задача 6

Введем систему координат так, чтобы Ox шел по горизонтали, а Oy проходил через вершину параболы



$E(0;9)$ из усл.

$F(9;0)$ из усл.

$G(-9;0)$ из усл.

Т. обр. $a-bx^2$ – парабола

$a=9$

$a-b\cdot 81 = 0 \Rightarrow 9 - b\cdot 81 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{9}$

т.к. точка A симметрична B отн. Oy (св-ва параболы) $\Rightarrow |AO| = |OB|$

$ABCD$ – трап. $\Rightarrow$ т.к. O – середина AB, то $OD = OB$

$\exists\, B\left(x_1; 9-\frac{x_1^2}{9}\right)$ $D\left(x_2; 9-\frac{x_2^2}{9}\right)$

тогда: $|OB|^2 = x_1^2$

$|OD|^2 = x_2^2 + \left(9 - \frac{x_2^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9}\right)^2 = x_2^2 - \frac{(x_1-x_2)^2(x_2+x_1)^2}{81}$

$|OB|^2 = |OD^2| \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = \frac{(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2}{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{81} \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 81$

$|DH| = \cancel{|BH|^2 + |DB|^2 - (x_1-x_2)^2} = 9 - \frac{x_2^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9} =$

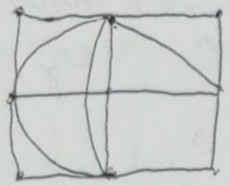
$= \frac{x_1^2 - x_2^2}{9} = 9$

Ответ: 9

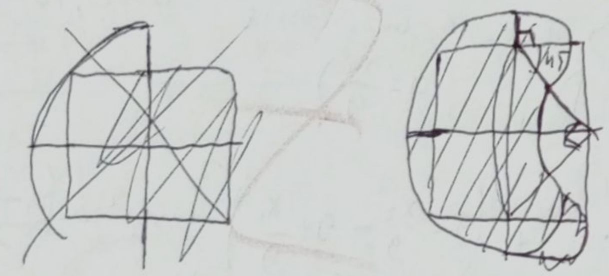
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача 2 Чистовик



γ кас. к какой либо точки окр. вся окружность кроме 1 точки лежит по 1 сторону от кас. γ ⊥ к точке кас. длиной $2\sqrt2$ ~~т.к. это~~ ⇒ точка кас. растечется до этой точки ~~если проделать~~ это равносильно тому, что радиус окр изменится на $2\sqrt2$. т. обр. получаем такие фигуры:



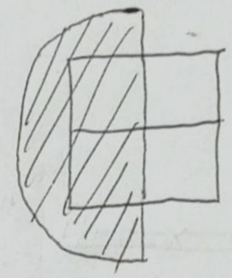
Она состоит из полуокр. с радиусом $1+\frac{\sqrt2}{2}$, прямоугольного △ со сторонами $\sqrt2$ и $\sqrt2$ ~~сектора на дуге 90 с радиусом √2~~ с вырезанным сектором на дуге $90°$ с радиусом $\frac{\sqrt2}{2}$ и 2 сектора на дугах по $135°$ с радиусом $\sqrt2$. т. обр. на

$\cancel{S_{иск} = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(2-\frac12\right) + 2\cdot\frac{135°}{360°}\pi\cdot\frac{1}{2} =}$

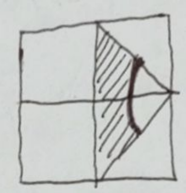
$\cancel{= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} + \sqrt2\pi + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} - \frac{3\pi}{2}+\sqrt2\pi}$

$S_{иск} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt2\cdot\sqrt2}{2} - \frac{\pi}{8} + 2\cdot\frac{135°}{360°}\pi\cdot\frac12 =$

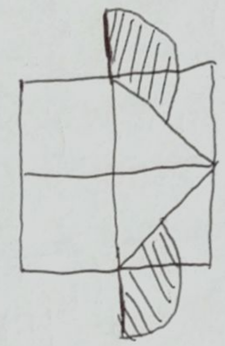
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\sqrt2\pi+1-\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8} = \pi+\sqrt2\pi+1$ Чистовик



– полуокружность длины $1+\frac{\sqrt2}{2}$



– прямоугольный △ с вырезанным сектором.



– 2 сектора окружности.

Ответ: $\pi+\sqrt2\pi+1$

Задача 5

$g'(0) = (f(f(\dots f(0))\dots))' = \underbrace{f'(f(f\dots f(0))\dots)}_{9}\cdot$

$\underbrace{f'(f(f\dots f(0))\dots)}_{8}\cdot\dots f'(0)$

$\cancel{f(0)=f\left(\frac{1-1}{1+1}\right) = -\frac{1}{1+1} = -\frac12}$

$\cancel{f(f(0)) = f\left(-\frac12\right)}$

(!) по ММИ, что $\underbrace{f(f\dots f(0))\dots)}_{n} = \cancel{\frac{n}{n+1}} - \frac{2^n-1}{2^n}$

Для $n=1$

$f(0)=f\left(\frac{1-1}{1+1}\right)=-\frac{1}{2}$

Пн] верно для $n=k$ (!) для $n=k+1$

$f(\ldots f(0)\ldots)=f\left(-\frac{2^{n}-1}{n}\right)$

$\frac{x-1}{x+1}=-\frac{2^{n}-1}{n}$ (=) ~~$nx-n+x-1=nx+n$ (=) $x=2n+1$~~

$2^{n}x-2^{n}=$

$=2^{n}x+2^{n}-1$

(=) $x=2^{n}-1$

$f\left(\frac{2n+1-1}{2n+1+1}\right)=-\frac{1}{2n}$

$f\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-1+1}\right)=-\frac{1}{2^{n+1}-1+1}=$