

0 517899 420005

51-78-99-42

(40.36)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Жалобанова Никиты Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

51 - 78 - 99 - 42

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	4	12	12	12	4	0	0	56

Черновик

51-78-99-42
(40.36)

1) $\frac{2 \cdot 5 \cdot 9 = 90}{2 \cdot 3 \cdot 8 = 48}$
138

$2 \cdot 8 \cdot 9 = 144$

$y^2 - 8y - 2 = 0$
 $D = 64 + 8 = 72$
 $y_{1,2} = 8 \pm 3\sqrt{2}$

2) $(x-1)(y+3) | y-x-9 = (x-4) | xy-3+3x-y$
 $(x-4) | (x-1)(y+3)$

$\sqrt{y-x+9} = y-4$

$x > 1$ или $x < 1$
 $y > -3$ или $y < -3$

$y-x+9 > 0 \quad y > 4$

$y-x+9 = y^2 - 8y + 16$

$y^2 - 9y + 7 + x = 0$

$D = 81 - 28 - 4x > 0$

$53 > 4x$
 $x < 13,25$

1
3
11

$y > x > 9$
 $-x > 13$
 $x < -13$

$x < y+9$
 $x < 13$

$x = -y^2 + 9y + 7$

$(-y^2 + 9y - 8)(y+3) | y + y^2 - 9y + 7 - 9 = |-y^2 + 9y - 7 - 4|$
 $(-y^2 + 9y - 8)(y+3)$

$(y^2 - 9y + 8)(y+3) | y^2 - 8y - 2 = (y^2 - 9y + 11) | (y^2 + 9y - 8)(y+3)$

$y > 4: \quad 4 < y < 8 \quad 8 < y < 8 + 3\sqrt{2} \quad 8 + 3\sqrt{2} > y$

$(y^2 - 9y + 8)(y+3) (-y^2 + 8y + 2) = (y^2 - 9y + 11) (-y^2 + 9y - 8)(y+3)$

1) $-y^2 + 8y + 2 = -y^2 + 9y - 11$
 $y = 13$

2) $-y^2 - 8y - 2 = y^2 - 9y + 11$
 $2y^2 - y + 13 = 0$
у нет.к.

3) $y^2 - 8y + 2 = y^2 - 9y + 11$
 $y = 13 \quad x = -169 + 117 - 7 = -59$

1-я 35 м
4) 95 мм

CA
AC → ~~AB~~ → AC → CB → BA → AB → BA → AB → BA
19 38 57 70 75 80 85 90 95

Ркуча
AB: 15 км = 30 км $D_{AB} = \frac{30}{1}$
BC: 25 ⇒ 50 км $D_{BC} = \frac{50}{1}$

Ркуча
 $D_{AC} = D_{AB} + D_{BC} = \frac{80}{1}$ 80 мм AC=40 км
 $40 + 40 + 40 + 25 + 15 \cdot 5 = 120 + 100 = 220$ км

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$ ^{использовать} **Иерновик**

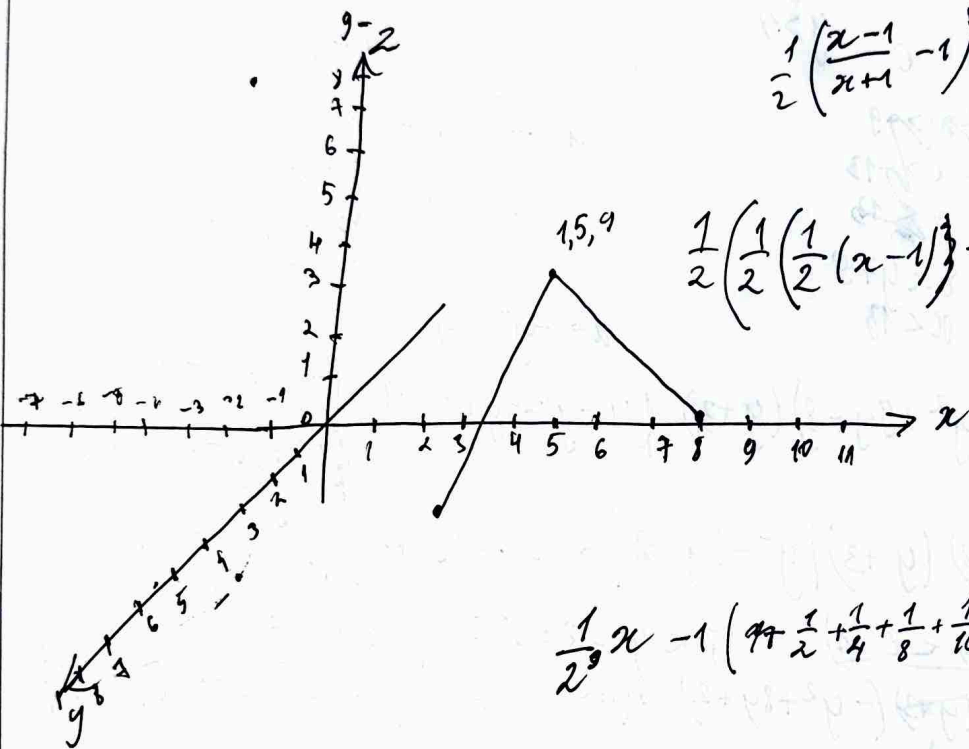
$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1}$$

$$f(x) = x-1 \quad \frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{x-1-x-1}{x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

2

$$-\frac{x}{x+1} \quad \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right) = \frac{x-2}{x+1}$$



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) - 1\right) - 1$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \cdot 89 \\ \hline 224 \\ 4448 \\ \hline 4704 \end{array}$$

$$\frac{1}{2^9} x - 1 \left(9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} \right)$$

$$\begin{array}{r} 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ 512 \quad 256 \quad 128 \quad 64 \quad 32 \quad 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\frac{x}{512} - \frac{511}{512} f'(x) = \frac{1}{512}$$

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 56 = \\ 15 \\ \hline 280 \\ 56 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$f'(x_0) = f(x_0) - f(x_0) (x - x_0)$$

$$= \frac{511}{512} - \frac{1}{256} x$$

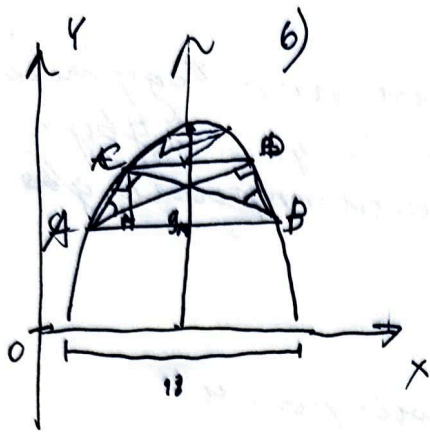
$$tg = k = \frac{1}{512}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$



51-78-99-42
(40.36)

Кертобик



1) $2 \cdot C_2^2 \cdot C_3^3$
 $2 \cdot C_3^2 \cdot C_8^3$

$y = g - bx^2$
 $y = g - 6g$
 $y \geq 0 \Rightarrow b = 1 \quad y = g - x^2$

A(x_A; y_A)
 B(x_B; y_B)

$$\begin{cases} \sqrt{x_c^2 + (y_c - y_A)^2} = x_A^2 \\ y_c = g - x_c^2 \\ y_A = g - x_A^2 \end{cases}$$

2) $\frac{H}{2} = \frac{H(\sqrt{2}+2)}{2}$
 $\frac{H(2+2\sqrt{2})}{4} = \frac{H(1+\sqrt{2})}{2}$

$$\sqrt{x_c^2 + (x_A^2 - x_c^2)^2} = x_A^2$$

$t^2 - t = 0$
 $t = 1 \quad t = 0$

$\frac{H2}{4} = \frac{H}{2} = 1$
 $\frac{H}{2} - \frac{H}{2} + 1 = 1$

$y_c - y_A = x_A^2 - x_c^2 = 1$

$8 < 17 + \sqrt{217} < 8 + 3\sqrt{2} - 17$
 $-9 < \sqrt{217} < 9 + 3\sqrt{2}$
 $217 < 81 + 54\sqrt{2} + 18$
 $118 < 54\sqrt{2}$

$8 < 17 - \sqrt{217}$
 $32 < 17 + \sqrt{217} < 32 + 12\sqrt{2}$
 $15 < \sqrt{217} < \dots$

$y_A - g$



ИИСТОВИК

Задача 1 (стр. 1)

Плак как не дан комбинаторный по поводу того может ли "Универсал" быть выбран в двух номинациях одновременно рассмотрим, два случая:

1) не может

• тогда мы однозначно выбираем вратари $C_2^1 = 2$

три
• тогда два случая если выбранной защитник "Универсал" или нет:

1 случ. (нет) $C_5^2 \cdot C_9^3$
↑ защитник ↑ напор + Унив.

или универ
2 случ. (у) $C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_8^3$
↑ универ ↑ зап. ↑ напор + Унив - 1 вобр.

~~• тогда посчитаем общее число:
 $2 \cdot (C_5^2 \cdot C_9^3 + C_3^2 \cdot C_8^3) = 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + \right)$~~

два универ
2 случ. (уу) $C_3^2 \cdot C_7^3$
↑ универ ↑ напор + 1 универ

• тогда посчитаем общее кол-во

$2 \cdot (C_5^2 \cdot C_9^3 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^2 \cdot C_7^3) = 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) =$

$= 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) =$

$= 2 \cdot (840 + 840 + 105) = 1785 \cdot 2 = 3570$ Ответ: 3570

Задача 1 (стр. 2)2) лотте

тогда просто мы выбираем 1 вран

потом 2 из 3ау + Унвер $(5+3)=8$ потом 3 из Напар + Унвер $(6+3)=9$

$$C_2^1 \cdot C_8^2 \cdot C_9^3 = 2 \cdot \frac{78}{2} \cdot \frac{789}{2 \cdot 3} = 4704$$

Ответ: 4704Задача 2 (стр. 1)

• При растяжке фигурок нас интересуют только крайние точки \checkmark периметру фигурок которые каждая растягивается в длину, т.е. фигура растягивается на полосу ширины $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{т.е. } \Delta S = P_{\phi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{нов}} = S_{\text{нач}} + \Delta S$$

1) Посчитаем $S_{\text{нач}}$

$$S_{\text{нач}} = \frac{S_{\text{меньш. круга}}}{2} - S_1, \quad \text{где } S_1 \text{ это площадь большого круга}$$

$$S_{\text{м.к}} = \pi R_{\text{м.к}}^2 = \pi$$

$$S_{\text{б.к}} = \pi R_{\text{б.к}}^2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{нов}} = \frac{\pi}{2} - S_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2\pi}{4} - 1 \right) = 1$$

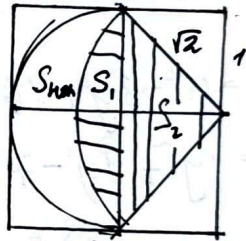
2) Посчитаем ΔS :

$$\Delta S = P_{\phi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P_{\phi} = P_{\text{б.г}} + P_{\text{м.г}} \Rightarrow P_{\text{б.г}} = \frac{P_{\text{м.к}}}{2}$$

$$P_{\phi} = \frac{2\pi}{2} + \frac{2\pi\sqrt{2}}{4} = \pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leftarrow P_{\text{м.г}} = \frac{P_{\text{б.к}}}{4}$$

$$\Delta S = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow P_{\text{б.к}} = 2\pi R_{\text{б.к}} = 2\pi\sqrt{2} \\ P_{\text{м.к}} = 2\pi R_{\text{м.к}} = 2\pi$$



Задача 2 (стр. 2)

• тогда $S_{\text{кон}}$:

$$S_{\text{кон}} = S_{\text{нач}} + S = 1 + \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$$

Ответ: $1 + \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$

Задача 3 (стр. 1)

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) |y - x - 9| = (x - 4) |xy - 3 + 3x - y| & (1) \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 & (2) \end{cases}$$

1) $(x - 1)(y + 3) |y - x - 9| = (x - 4) |(x - 1)(y + 3)|$

2) $\sqrt{y - x + 9} = y - 4 \quad (1.2)$
 $y > 4$
 $y - x + 9 > 0$

$$y - x + 9 = y^2 - 8y + 16$$

$$x = -y^2 + 9y - 7 \quad (1)$$

1) $(-y^2 + 9y - 8)(y + 3) |y + y^2 - 9y + 7 - 9| = 6$

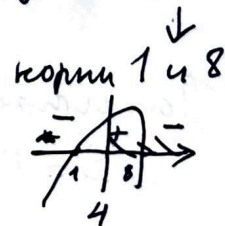
~~$(x - 4)$~~

$$= (-y^2 + 9y - 11)(y + 3) |-y^2 + 9y - 8|$$

т.к. $y > 4$

$$(y^2 - 9y + 8)(y + 3) |y^2 - 8y - 2| = (y^2 - 9y + 11)(y + 3) |-y^2 + 9y - 8|$$

корни: $8 \pm 3\sqrt{2}$
 $(8 - 3\sqrt{2}$ не коря
 коря $y > 4)$



тогда при $y > 4$

$4 < y < 8$
(1)

$8 < y < 8 + 3\sqrt{2}$
(2)

$8 + 3\sqrt{2} < y$
(3)

Задача 3 (стр. 2)

1) $4 < y \leq 8$

$$(y^2 - 9y + 8)(y + 3)(-y^2 + 8y + 2) = (y^2 - 9y + 11)(y + 3)(-y^2 + 9y - 8)$$

$$(y^2 - 9y + 8)(y + 3)(-y^2 + 8y + 2 + y^2 - 9y + 11) = 0$$

$$y = 1 \ominus$$

$$y = 8 \oplus$$

$$y = -3 \ominus$$

$$y = 13 \ominus$$

$$x = -8^2 + 9 \cdot 8 - 7 = -64 + 72 - 7 = 1$$

пара (1; 8)

$$y - x + 9 > 0$$

$$8 - 1 + 9 > \text{Верно}$$

2) $8 < y \leq 8 + 3\sqrt{2}$

$$(y^2 - 9y + 8)(y + 3)(-y^2 + 8y + 2) = (y^2 - 9y + 11)(y + 3)(y^2 - 9y + 8)$$

$$(y^2 - 9y + 8)(y + 3)(-y^2 + 8y + 2 - y^2 + 9y - 11) = 0$$

$$y = 1 \ominus$$

$$y = 8 \ominus$$

$$y = -3 \ominus$$

$$-2y^2 + 17y - 9 = 0$$

$$2y^2 - 17y + 9 = 0$$

$$D = 289 - 72 = 217$$

$$y_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{217}}{4} \text{ (не подходит)}$$

$$8 + 3\sqrt{2} < y$$

3) $(y^2 - 9y + 8)(y + 3)(y^2 - 8y - 2) = (y^2 - 9y + 11)(y + 3)(y^2 - 9y + 8)$

$$(y^2 - 9y + 8)(y + 3)(y^2 - 8y - 2 - y^2 + 9y - 11) = 0$$

$$y = 1 \ominus$$

$$y = 8 \ominus$$

$$y = -3 \ominus$$

$$y = 13 \oplus$$

$$x = -169 + 117 - 7 = -59$$

пара (-59; 13)

$$y - x + 9 > 0$$

$$13 + 59 + 9 > 0 \text{ Верно}$$

Ответ: (1; 8), (-59; 13)

Задача 4

$$1 \text{ ч } 35 \text{ мин} = 95 \text{ мин}$$

- С таким временем можно понять, что он едет по маршруту:

$$AC \rightarrow CA \rightarrow AC \rightarrow CB \rightarrow BA \rightarrow AB \rightarrow BA \rightarrow AB \rightarrow BA$$

$\begin{matrix} 19\text{м} & 38\text{м} & 57\text{м} & 70\text{м} & 75\text{м} & 80\text{м} & 85\text{м} & 90\text{м} & 95\text{м} \end{matrix}$

- тогда посчитаем длину этого маршрута, но для этого нам нужно знать длину AC:

$$AC_{\text{в}} = \frac{H \cdot D_{AC}}{2} = \frac{H(D_{AB} + D_{BC})}{2} =$$

$$\Leftrightarrow H \cdot D_{AB} = AB_{\text{в}} \cdot 2$$

$$D_{BC} = \frac{BC_{\text{в}} \cdot 2}{H}$$

$$\Rightarrow AC_{\text{в}} = AB_{\text{в}} + BC_{\text{в}} = 15 \text{ км} + 25 \text{ км} = 40 \text{ км}$$

- Посчитаем длину маршрута:

$$3 \cdot AC_{\text{в}} + 1 \cdot BC_{\text{в}} + 5 \cdot AB_{\text{в}} =$$

$$= 3 \cdot 40 \text{ км} + 1 \cdot 25 \text{ км} + 5 \cdot 15 \text{ км} = 220 \text{ км}$$

Ответ: 220 км

Задача 5 (итг. 1)

Несложно заметить, что если

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1), \text{ то } f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{-1}{2x+1}$$

тогда можно найти: $g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\dots \frac{1}{2}(x-1) - 1 \right) - 1 \dots - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2^9} x - 1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} \right)$$

Задача 5 (стр. 2)

шестовик

$$g(x) = \frac{1}{29}x - \frac{511}{512}$$

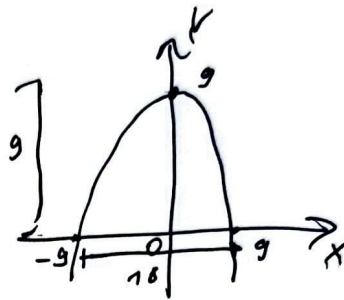
крайняя точка и угол

$$\tan \alpha = k = \frac{1}{29} = \frac{1}{512}$$

Отв ст: $\frac{1}{512}$

Задача 6 (стр. 1)

1) Проверим ОК через вершину параболы



2) тогда:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x=0 \quad y=9 \\ & y = \frac{1}{9}x^2 = 9 \\ & a=9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x=9 \quad y=0 \\ & y = 9 - \frac{1}{9}x^2 = 0 \\ & b = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$y = 9 - \frac{1}{9}x^2$$

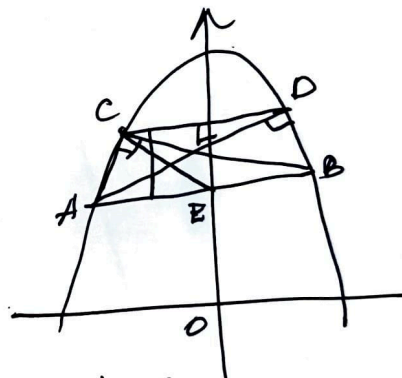
3) $A(x_A, y_A)$
 $C(x_C, y_C)$

ищем: $y_C - y_A$

т.к. ACB прямоугольный

$$CE = EA$$

$$CE = \sqrt{x_C^2 + (y_C - y_A)^2} \quad EA = -x_A$$



$$\begin{aligned} y_A &= \frac{1}{9}x_A^2 + 9 \\ y_C &= \frac{1}{9}x_C^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x_C^2 + (y_C - y_A)^2} = -x_A$$

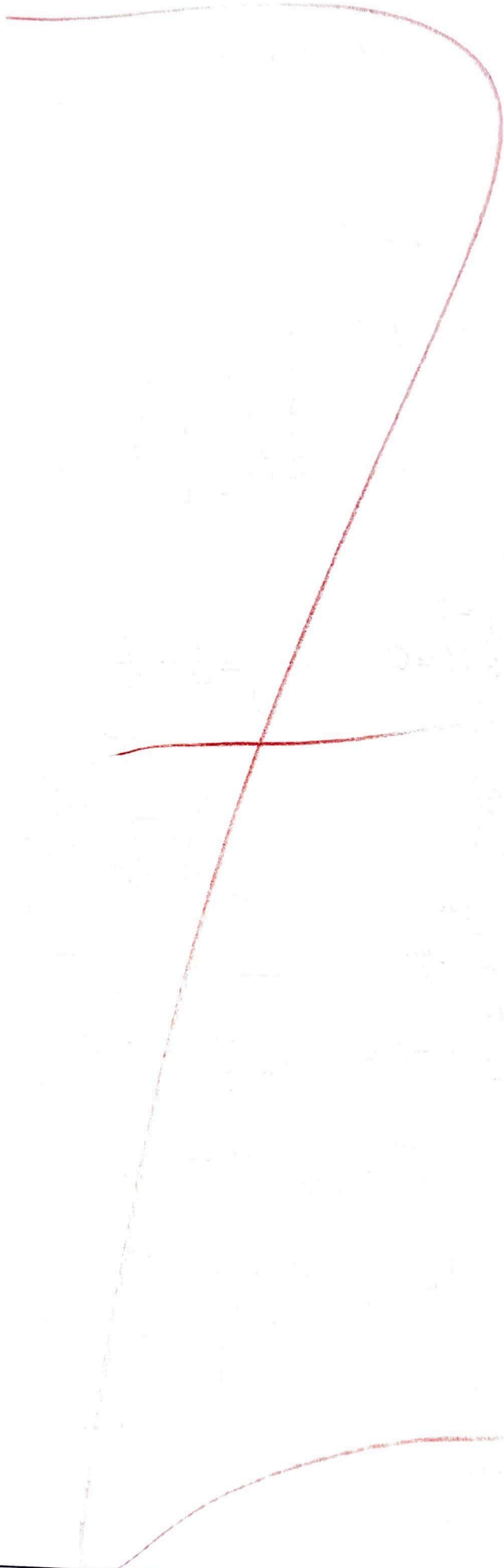
$$x_C^2 + \left(\frac{1}{9}x_A^2 - \frac{1}{9}x_C^2\right)^2 = x_A^2$$

$$\frac{1}{81}(x_A^2 - x_C^2)^2 - (x_A^2 - x_C^2) = 0$$

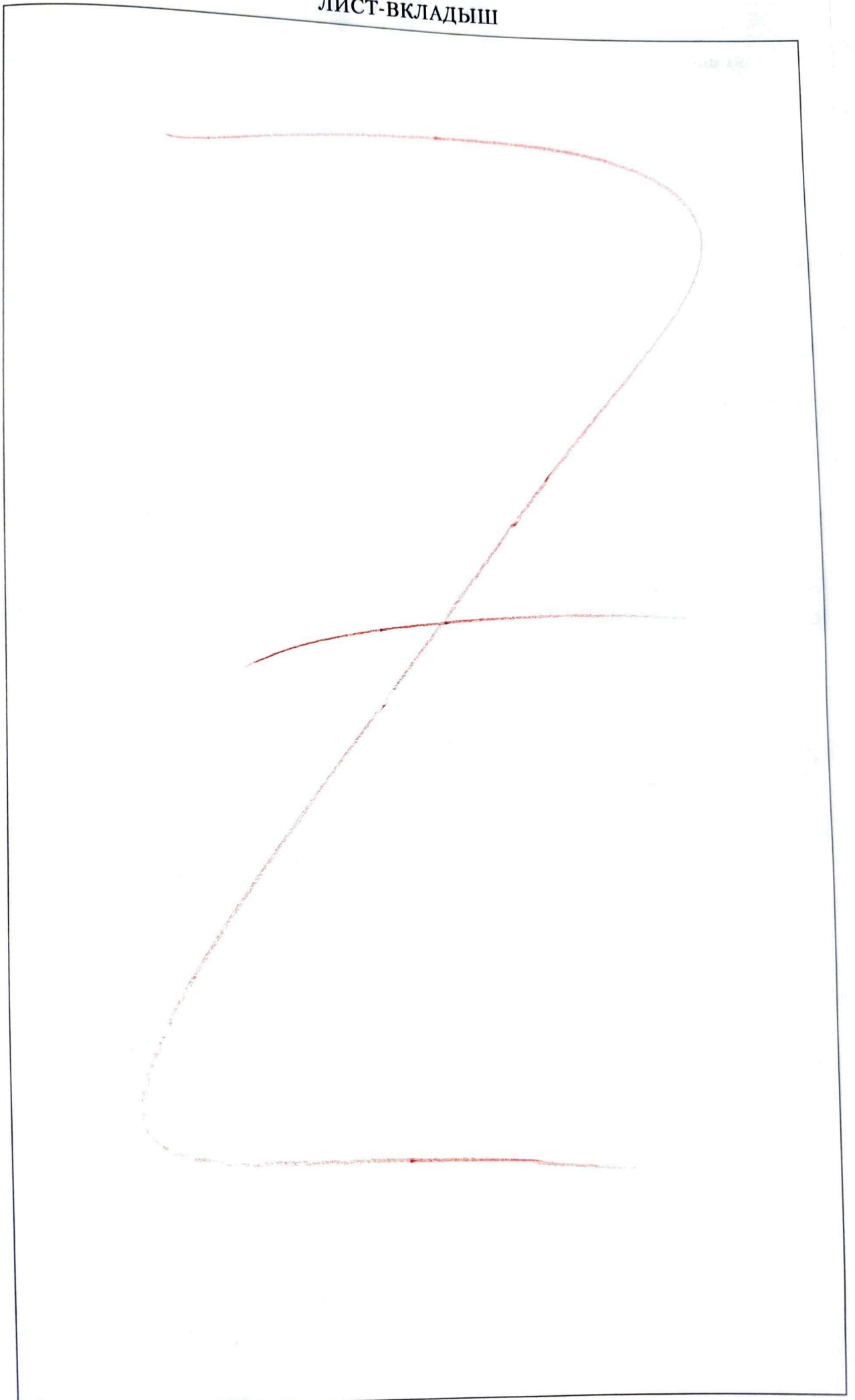
$$t = x_A^2 - x_C^2$$

$$\frac{1}{81}t^2 - t = 0$$

$$t = 0 \quad t = 81$$

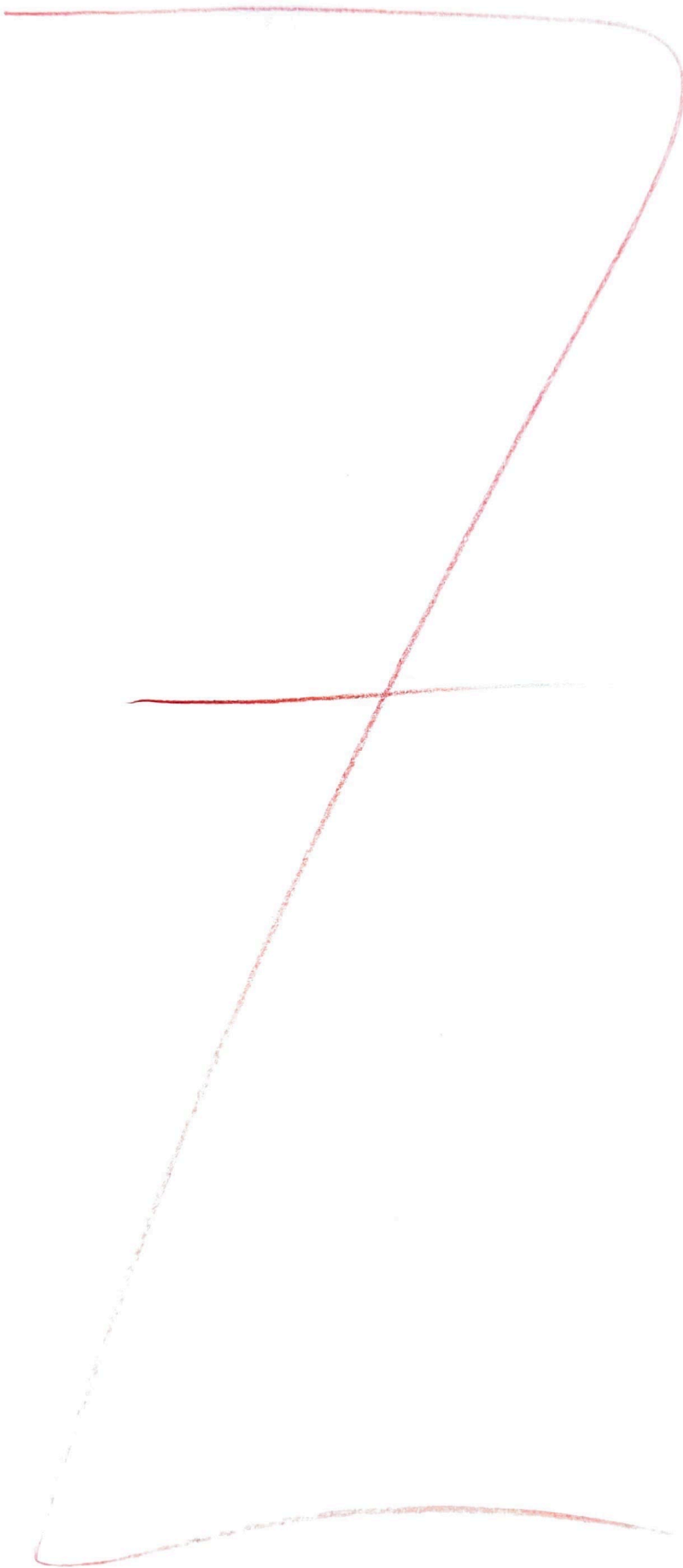


ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!