0 493332 290001

49-33-32-29
(39.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Комина Фёдора Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
49-33-32-29	56	8	4	12	12	12	8	0	0

49-33-32-29 (39.2)

Черновик

№1

6 - всего

1 - в

2 - з

3 - н

1) в защитниках не выбир. уч.

$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_{6+3}^3 = 3 \cdot \frac{4\cdot5}{2} \cdot \frac{9\cdot8\cdot7}{3!} = 3\cdot2\cdot5\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{3!} = 5\cdot9\cdot8\cdot7$

вр. зацщ. нап.

2) в защ. выб. 1 уч.:

$C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_{6+2}^3 \cdot 3 = 3\cdot3\cdot5\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3!} = 9\cdot5\cdot8\cdot7$

выбрать уч-ка

3) в защ. выб. 2-ух уч.:

$C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_{6+1}^3 = 3\cdot3\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3!} = 9\cdot7\cdot5$

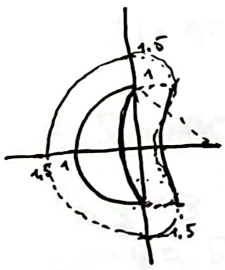
защ.

$56 \times 9 = 504$

$63 \times 5 = 315$

всего: $2\cdot9\cdot5\cdot7\cdot8 + 9\cdot7\cdot5 = 2\cdot5040 + 315 = \cancel{1080}\ 10080 + 315 = \underline{10395}$

№2



$\cancel{S = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{2} + 1}$

площадь пол-ся фигуры равна сумме пл-ди полукруга с $R = 1{,}5$, 2-ух чет-ей кругов с рад 0,5 и пр-ка со стор. 2 и 0,5

$S = \frac{\pi \cdot 2{,}25}{2} + \frac{\pi \cdot 0{,}25}{2} + 2\cdot0{,}5 = \frac{\pi\cdot2{,}5}{2} + 1 = 1{,}25\pi + 1$

№3

$|x^3+y^3-19| + |x^2y+xy^2+6| + \frac{x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0$

1) если x и y разн. зн: б.о.о: $x<0$, $y>0$: $\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}$:

2) если x и y од. зн., т.е.

б.о.о.: $x, y > 0$: $x|y| - y|x| = 0$ => дробь больше 0

$2xy$ и $xy > 0$ => дробь >0

$x|y| < 0$

$-y|x| < 0$

$2xy < 0$

$xy <$ =>

$y<0$, $x>0$

$x|y| > 0$

$-y|x| > 0$

$2xy < 0$

xy

Черновик:

№ 3

$$\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+y^2x+6=0 \\ \dfrac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0 \end{cases}$$

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=19$

$xy(x+y)=-6$

1) $xy>0$:

$x|y|-y|x|=0 \Rightarrow \dfrac{2xy}{xy}=0$

– нет реш.

1) $x<0$, $y>0$

пусть $x+y=a$, $xy=b$

$$\begin{cases} a(a^2-3b)=19 \\ ab=-6 \\ \dfrac{b-(-b)+2b}{b}=0 \end{cases}$$

– нет реш. $\left(\dfrac{4b}{b}=0\right)$

2) $x>0$, $y<0$

$$\begin{cases} a(a^2-3b)=19 \\ ab=-6 \\ \dfrac{-b-b+2b}{b}=0 \end{cases}$$

– верно при $b\neq 0$

$$\begin{cases} a(a^2-3b)=19 \\ ab=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3-3ab=19 \\ ab=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3+18=19 \\ ab=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$$

верн. к x и y

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-y \\ (1-y)\cdot y=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-y-6=0 \\ \cancel{y=1-x} \quad x=1-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3;\ -2 \\ x=1-y \end{cases}$$

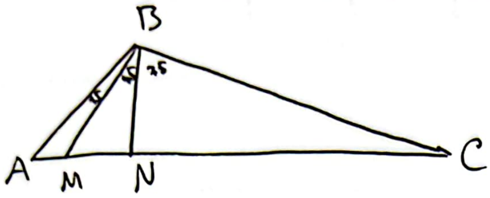
$y=3 > 0$ ✗

$$\begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

49-33-32-29
(39.2)

Черновик

№ 4



$S(\triangle ABM) + S(\triangle NBC) = 5$

$S(\triangle ABM) \cdot S(\triangle NBC) = 3$

$S(\triangle ABC) - ?$

$S(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \rho(B; AC) \cdot AM$

$S(\triangle MBC) = \frac{MB \cdot BC}{2}$

$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 135°$

$S(\triangle ABM) \cdot S(\triangle NBC) =$

$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin 15° \cdot \frac{1}{2} \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 75° =$

$= \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 135°\right) \cdot$

$\cdot \frac{1}{\sin 135°} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BN \cdot \frac{1}{4} =$

$= S(\triangle ABC) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} =$

$= S(\triangle ABC) \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot S(\triangle MBN) = S(\triangle ABC) \cdot S(\triangle MBN) = 3$

$\underset{x}{S(\triangle ABC)} \cdot \underset{y}{S(\triangle MBN)}$

$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5 - y \\ 5y - y^2 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 - 5y + 3 = 0 \\ x = 5 - y \end{cases}$

$D = 25 - 12$

$\begin{cases} y = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = 5 - \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{5 \mp \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$

$x =$

$\sin 15° \cdot \sin 75° = \frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 90°) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} xy = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 5 \\ (y + 5)y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + 5y - 3 = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$

$D = 25 + 12 = 37$

$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot MB \cdot \sin 15° \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin 75° =$

$= \frac{1}{2}(MB \cdot BN) \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot BC) \cdot$

$\cdot \sin 15° \cdot \sin 75°$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \\ \cancel{x = y + 5} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2} \\ x = y + 5 \end{cases} \end{array}\right.$ – нет реш., т.к. $y > 0$

$\begin{cases} y = -\frac{5 + \sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \end{cases}$

Ответ: $\frac{5 + \sqrt{37}}{2}$

№1

1) в защитники не выбрали ни одного универсала

C_3^1 – выбрать вратаря

C_5^2 – выбрать защитника

C_9^3 – выбрать нападающих

$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3 = 3 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

2) защитником выбрали 1 универсала

C_3^1 – выбрать вратаря

C_3^1 – выбрать универсала

C_5^1 – выбрать ~~к~~ 2-го защитника

C_8^3 – выбрать нападающих

$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_8^3 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

3) в защитники выбрали 2-ух универсалов

C_3^1 – выбрать вратаря

C_3^2 – выбрать ~~защ~~ универсалов для защиты

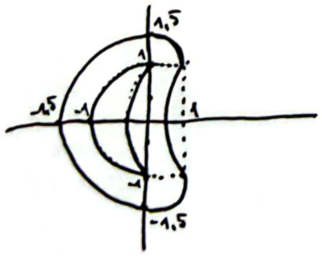
C_7^3 – выбрать нападающих

$C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 9 \cdot 7 \cdot 5$

всего: $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 9 \cdot 7 \cdot 5 = 10080 + 315 = 10395$

Ответ: 10395

№2



Площадь получившейся фигуры равна сумме площадей:

1) полукруг круга с центром в (0;0) и $R = 1,5$. $S = \frac{\pi \cdot (1,5)^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2,25}{2}$

2) четверть круга с центром в (0;1) и $R = 0,5$

четверть круга с центром в (0;-1) и $R = 0,5$

$S_{сумм.} = \frac{\pi \cdot (0,5)^2}{2} = \frac{\pi \cdot 0,25}{2}$

3) площадь прямоугольника с верш. в: (0;-1), (0;1), (0,5;1), (0,5;-1)

$S = 2 \cdot 0,5 = 1$

$S_{фигуры} = \frac{\pi \cdot 0,25}{2} + \frac{\pi \cdot 2,25}{2} + 1 = 1,25\pi + 1$

Ответ: $1,25\pi + 1$

49-33-32-29 (39.2)

№3

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0$$

докажем, что $\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} \geq 0$

1) x и y разных знаков: ~~без огр. общности~~

а) $x<0$, $y>0$: $x|y|<0$, $-y|x|<0$, $xy<0$ => дробь положительна

б) $x>0$, $y<0$: $x|y|>0$, $-y|x|>0$, $2xy<0$ => $x|y|-y|x|+2xy=0$

2) x и y одного знака => $x|y|-y|x|=0$ => дробь >0

$$\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0}+\underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}}_{\geq 0}=0$$

~~Значит,~~ $\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2+6=0 \\ \frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0 \end{cases}$ => $x>0$, $y<0$

$$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases}$$

Пусть $a=x+y$, $b=xy$, тогда

$$\begin{cases} a(a^2-3b)=19 \\ ab=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3+18=19 \\ ab=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$$

Вернёмся к x и y:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-y \\ y^2-y-6=0 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases}$$

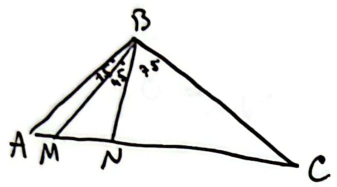
№3 (продолжение)

$$\begin{cases} y = 3; -2 \\ x = 1 - y \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(3; -2)$

№4



$S(\triangle ABM) + S(\triangle BNC) = 5$

$S(\triangle ABM) \cdot S(\triangle BNC) = 3$

$$S(\triangle ABM) \cdot S(\triangle BNC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 75^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}(BM \cdot BN) \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot BC) \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ =$$

$$= S(\triangle MBN) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot S(\triangle ABC) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 90^\circ)\right) =$$

$$= S(\triangle MBN) \cdot S(\triangle ABC) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot S(\triangle MBN) \cdot S(\triangle ABC) =$$

$= 3$

$S(\triangle MBN) \cdot S(\triangle ABC) = 6$

$S(\triangle ABC) - \cancel{S(\triangle AB} \; S(\triangle MBN) = S(\triangle ABM) + S(\triangle NBC) = 5$

Пусть $S(\triangle ABC) = x$, $S(\triangle MBN) = y$, тогда

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x - y = 5 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 5 \\ y^2 + 5y - 6 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -6; 1 \\ x = y + 5 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: 6

Подписывать

черновик

№5

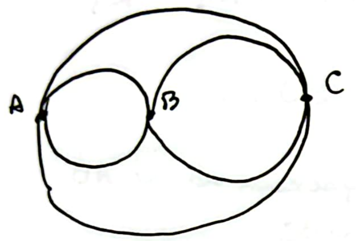
$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ac - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} = \text{min.}, \quad a, b, c > 0$$

$$\cancel{\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}} = \frac{2bc}{2a} + \frac{2ac}{2b} + \frac{2ab}{2c} - a - b - c + 3 =$$

$$= \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

$$\frac{bc}{a} - a \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot a} = 2\sqrt{bc}$$

№6



$\smile AB = 15$ км, 7 мин.

$\smile BC = 25$ км, 11 мин.

$\smile AC$: 40 км 17 мин.

AB, BC и AC — диам. => $B \in AC$

$\pi R_1 = 15$

$\pi R_2 = 25$

$\pi R_3 = 2(\pi R_1 + \pi R_2) = 40$ км

$\pi(2R_1 + 2R_2) = 30 + 50 = 80$ км

$t = 85$

$85 = 5 \cdot 17$

$85 = 7 \cdot x + 11 \cdot y + 17 \cdot z$

1) $85 = 5 \cdot 17$ $\quad S = 5 \cdot 80_{км} = 400$ км

~~2) $7x + 11y = 17$~~

~~3) $7x + 11y = 34$~~

~~$7x + 11y = 17$~~

2) ~~1 раз~~ 4 раза по 17

$17 \neq 7x + 11y$

2) 3 раза по 17

$34 \neq 7x + 11y$

$7 + 2 \cdot 11 \neq 34$

$14 + 22 \neq 34$

$21 + 11 \neq 34$

3) 51 $\quad 7x + 11y$

$44 + 7 = 51$

$4 \cdot 11 + 7$

$4 \cdot 11 + 7 \cdot 1 = 51 = 7x + 11y$

$4 \cdot 25 + 15 = 115$ км $\quad + 2 \cdot 80$

$7(x - 1) = 11(4 - y)$

4) $68 = 7x + 11y$

$33 + 35$

$3 \cdot 11 + 5 \cdot 7$

$3 \cdot 25 + 5 \cdot 17 = 75 + 85 =$

$= 160$ км $\quad + 80$

5) $85 = 7x + 11y$

$9 \cdot 7 + 22$

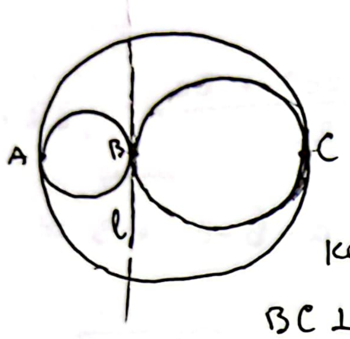
63

$9 \cdot 7 + 2 \cdot 11$

$9 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 50 + 135 =$

$= 185$

№6



Из равенства дуг получаем, что AB, BC, AC – диаметры соответствующих окружностей. Проведём общую касательную l через т. B, тогда $AB \perp l$, $BC \perp l$ по св-ву радиуса, проведенного в т. касания. Значит, $B \in AC$. Пусть меньшая окружность имеет R_1, средняя – R_2, большая – R_3. тогда $2R_1 + 2R_2 = R_3$

$\pi R_1 = 15$ км
$\pi R_2 = 25$ км $\Rightarrow$ $\pi R_3 = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 80$ км

1час 25 мин = 85 минут

Пусть x раз проехал по $\smile AB$
y – по $\smile BC$

$85 = 5 \cdot 17$

$x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1) пять раз по AC: $5 \cdot 80$км $= \underline{400 \text{ км}}$

2) 4 раза по AC, тогда $85 - 4 \cdot 17 = 17 = 7x + 11y$ – нет реш. при $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

3) 3 раза по AC, тогда $85 - 3 \cdot 17 = 34 = 7x + 11y$ – нет реш.

4) 2 раза по AC, тогда $85 - 2 \cdot 17 = 51 = 7x + 11y$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ $(7 + 44 = 51)$

~~Тогда~~ $S = 2 \cdot 80 + 1 \cdot 15 + 4 \cdot 25 = \underline{275 \text{ км}}$

5) 1 раз по AC, тогда $85 - 17 = 68 = 7x + 11y$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ $(35 + 33 = 68)$

$S = 80 + 5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 = 80 + 160 = \underline{240 \text{ км}}$

6) 0 раз по AC: $85 = 7x + 11y$

$9 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 63 + 22 = 85$

$\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$

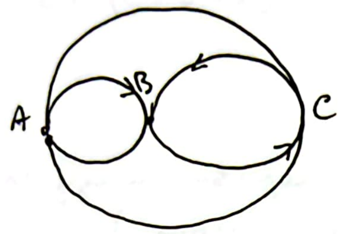
$S = 9 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 135 + 50 = \underline{185 \text{ км}}$

Заметим, что каждый из вариантов 1), 4), 5), 6) осуществим

~~Ответ:~~

1) двигаясь 5 раз по $\cup AC$ нельзя вернуться в ту же точку, т.к. 5 - нечётное число

4) 2 раза по AC, 1 раз по AB и 4 раза по BC



~~Стартуем из A~~, нельзя вернуться, т.к. чётное число ~~оборотов~~ проездов по $\cup BC$ и $\cup AC$, но нечётное по $\cup AB$

5) 1 раз по $\cup AC$, 5 раз по AB, 3 раза по BC

стартуем из C: $C \to A \to B \to A \to B \to A \to B \to C \to B \to C$

- можно

6) 9 раз по $\cup AB$ и 2 раза по $\cup BC$ - нельзя, т.к. разные по чётности количества проездов.

Ответ: 240 км

№5 (черновик) $a, b, c > 0$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ac-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{=\left(\frac{bc}{a}-a\right)+\left(\frac{ac}{b}-b\right)+\left(\frac{ab}{c}-c\right)+3}$$

~~по нер-ву между средним арифм. и геометрическим:~~

$$\cancel{\frac{bc}{a}-a \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot a}=2\sqrt{bc}}$$ ~~, причём рав-во дост. при~~

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}\cdot\frac{ab}{c}}=3\sqrt[3]{abc}$$, причём рав-во достигается при ~~a=b=c~~ $\frac{bc}{a}=\frac{ac}{b}=\frac{ab}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\left(b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right)-2(a+b+c)+6\right) \geq$$

$$\underset{2b}{\vee\!\!|} \quad \underset{2a}{\vee\!\!|} \quad \underset{2c}{\vee\!\!|}$$

≥ 3

№5

$a, b, c > 0$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2ca-2b^2+2b}{2b} + \frac{2ab-2c^2+2c}{2c} =$$

$$= \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)}_{\geqslant 2b} + \underbrace{a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)}_{\geqslant 2a} + \underbrace{c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}_{\geqslant 2c}\Big) - (a+b+c) + 3 \geqslant$$

$\geqslant 3$ $\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}\right.$ по нер-ву между ср. ар. и ср. геом.)

причём рав-во дост. при $a = b = c$ $\left(\frac{a}{c}=\frac{c}{a}, \frac{a}{b}=\frac{b}{a}, \frac{b}{c}=\frac{c}{b}\right)$

Ответ: 3