



0 115864 830004

11-58-64-83

(40.10)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 6

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Козырева Алевксандра Дмитриевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

AK

Итоговая оценка:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|---|---|----|----|----|----|---|---|---------------|
| F | + | + | + | + | + | - | - | 56 |
| 4 | 4 | 12 | 12 | 12 | 12 | 0 | 0 | 56 |

mpm low -

11-58-64-83
(40.10)

Задачи 1

Всего 2 в 4 в 7 в 3 в когда взяли 1 в 2 в 3 в

1) выберем вратаря 2 створки

2) выберем защитников

- а) взяли О в 2 в $C_4^2 = 6$
- б) взяли 1 в 1 в $C_3^1 \cdot C_4^1 = 12$
- в) взяли 2 в 0 в $C_3^2 = 3$

3) выберем Нападающего

- а) если всего 3 в
 - взяли О в 3 в $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 35$
 - взяли 1 в 2 в $C_3^1 \cdot C_4^2 = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 63$
 - взяли 2 в 1 в $C_3^2 \cdot C_4^1 = 3 \cdot 4 = 21$
 - взяли 3 в 0 в $C_3^3 = 1$

б) если всего 2 в

- взяли О в 3 в $C_4^3 = 35$
- взяли 1 в 2 в $C_3^1 \cdot C_4^2 = 63$
- взяли 2 в 1 в $C_3^2 \cdot C_4^1 = 3 \cdot 4 = 21$

в) если всего 1 в

- взяли О в 3 в $C_4^3 = 35$
- взяли 1 в 2 в $C_3^1 \cdot C_4^2 = 63$

если всего а) $2 \cdot 6 \cdot (35 + 63 + 21) = 12 \cdot 120 = 1440$

если всего б) $2 \cdot 12 \cdot (35 + 63 + 21) = 2 \cdot 12 \cdot 119 = 2856$

если всего в) $2 \cdot 3 \cdot (35 + 63) = 6 \cdot 98 = 588$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 2856 \\ + 1440 \\ + 588 \\ \hline 4884 \end{array}$$

Ответ: 4884

$$\begin{array}{r} 119 \\ + 12 \\ \hline 238 \\ + 190 \\ \hline 428 \\ + 1426 \\ \hline 2856 \\ + 98 \\ \hline 588 \end{array}$$

Задача 5

четных

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{t+2}{t-2} = x \quad t+2 = tx - 2x$$

$$t(1-x) = -2x - 2 \quad t = \frac{2x+2}{x-1}$$

$$f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1}\right) = f\left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right) = f(x) = \frac{2}{\frac{2x+2}{x-1} - 2} = \frac{x-1}{x+1-x+1} = \frac{x-1}{2}$$

$$f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{2} = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

предположение $f(\dots f(x) \dots) = \frac{x-2^{n+1}+1}{2^n}$

докажем для n раз $f(\dots f(x) \dots) = \frac{f(x)-2^{n+1}+1}{2^n} = \frac{\frac{x-1}{2} - 2^{n+1} + 1}{2^n} = \frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$

$$= \frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$$

з.м.г.

т.к. для $n=1$ и $n=2$ это верно, то и для

остальных всех точек

$$f(\dots f(x) \dots) = \frac{x-2^{12}+1}{2^{12}} = \frac{1}{2^{12}}x - 1 + \frac{1}{2^{12}}$$

12

это означает \Rightarrow f_{12} в любой точке - это x \Rightarrow $\frac{1}{2^{12}}$

координат

четыре

Задача 3

$$\begin{cases} (y+3)(x-2) | y-x-8 | = (x-5) | (y+3)(x-2) | \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \\ \text{т.к. } y-4 \geq 0 \quad y \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3)(|x-2| |y-x-8| - (x-5) |x-2|) = 0 \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

1) $x \geq 2$

$$(x-2) | y-x-8 | - (x-5)(x-2) = 0$$

$$(x-2) (|y-x-8| - x+5) = 0$$

a) $y \geq x+8$

$$(x-2) (y-2x-3) = 0$$

$x=2$ т.к.

$$\sqrt{y+8} = y-4 \quad y+8 = y^2 - 8y + 16 \quad y^2 - 9y + 8 = 0 \quad (y-1)(y-8) = 0$$

$x=2 \quad y=8$ (т.к. условие раскрытия модуля не выполнено)

~~$y = 2x+3$~~

~~$\sqrt{2x+11} = 2x-1 \quad 2x+11 = 4x^2 - 4x + 1 \quad 4x^2 - 6x - 10 = 0$~~

~~$2x^2 - 3x - 5 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (x+1)(2x-5) = 0$~~

~~$x = \frac{5}{2} \quad y = 8 \quad \text{т.к. } y \geq x+8 \quad \text{не выполняется}$~~

b) $y \leq x+8$

$$(x+8-y-x+5) = 0 \quad y = 13$$

$$\sqrt{23-x} = 9 \quad 23-x = 81 \quad x = -58 \quad 13 \geq -58 \quad \text{не выполняется}$$

2) $x < 2$

$$(x-2) (|y-x-8| + x-5) = 0$$

~~$y \geq x+8 \quad y-13=0 \quad y=13$~~

~~$\sqrt{23-x} = 9 \quad 23-x = 81 \quad x = -58 \quad (-58; 13)$~~

2) $y \leq x+8 \quad (x+8-y+x-5) = 0 \quad y = 3+2x$

$$\sqrt{13+x} = 2x-1 \quad 13+x = 4x^2 - 4x + 1 \quad 4x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 16 \cdot 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{2} \quad \text{числителю}$$

$$\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{160}{142}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{217}}{2} \quad y = 3 + \frac{5 - \sqrt{217}}{4} < 4 \quad \text{применение}$$

~~$$\frac{5 + \sqrt{217}}{4} \leq \frac{5 - \sqrt{217}}{8} + 8 \quad 10 - 2\sqrt{217} \leq 5 - \sqrt{217} + 40$$

$$-\sqrt{217} \leq 35 \quad \left(\frac{5 - \sqrt{217}}{8}, 3 + \frac{5 - \sqrt{217}}{4} \right)$$~~

1) а) 2. $y \geq x + 6 \quad x \geq 2$
~~или~~

$$y = 2x + 3$$

$$\sqrt{x + 13} = 2x - 1 \quad x \neq 13 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 5x - 12 = 0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{8}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{217}}{8} \quad y = \frac{5 + \sqrt{217}}{4} + 3$$

$$\frac{5 + \sqrt{217}}{4} \geq \frac{5 + \sqrt{217}}{8} + 5 \quad 10 + 2\sqrt{217} \geq 5 + \sqrt{217}$$

$$\sqrt{217} \geq 35 \quad \text{так } 217 \geq 35^2 > 900 \quad \text{применение}$$

Ответ: $(2; 8)$ и $(-58; 13)$

Задача 4

местные

для каждого между двумя дугами AC

В P расходе длины окружности $P = R + V$

$$13 \text{ км} = \pi V$$

$$21 \text{ км} = \pi R$$

$$AC = \pi(V + R) = 34 \text{ км}$$

$$t_{AB} = 7 \text{ мин} \quad t_{BC} = 11 \text{ мин} \quad t_{AC} = 17 \text{ мин}$$

$$K \cdot t_{AB} + M \cdot t_{BC} + N \cdot t_{AC} = 85 \text{ мин}$$

$$K \cdot 7 + M \cdot 11 + N \cdot 17 = 85 \quad K_{AB} + M_{BC} + N_{AC} = X - ?$$

$$N \leq 5$$

1) $N=5$ $K=0, M=0$ в точке схода пути AC или оканчивая в т.с противоречие

$$2) N=4 \quad 4K + 11M = 17 \quad \left. \begin{matrix} m=1 \\ K = \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=0 \\ K = \frac{17}{4} \end{matrix} \right\} \times$$

$$3) N=3 \quad 3K + 11M = 34 \quad \left. \begin{matrix} m=0 \\ K = \frac{34}{3} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=1 \\ K = \frac{23}{3} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=2 \\ K = \frac{12}{3} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=3 \\ K = \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \times$$

$$4) N=2 \quad 2K + 11M = 51 \quad \left. \begin{matrix} m=0 \\ K = \frac{51}{2} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=1 \\ K = \frac{40}{2} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=2 \\ K = \frac{29}{2} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=3 \\ K = \frac{16}{2} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=4 \\ K = \frac{5}{2} \end{matrix} \right\} \times$$

$$m=4 \quad K=1 \quad N=2$$

$$5) N=1 \quad K + 11M = 68 \quad \left. \begin{matrix} m=0 \\ K = \frac{68}{1} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=1 \\ K = \frac{57}{1} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=2 \\ K = \frac{46}{1} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=3 \\ K = \frac{35}{1} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=4 \\ K = \frac{24}{1} \end{matrix} \right\} \times \quad \left. \begin{matrix} m=5 \\ K = \frac{13}{1} \end{matrix} \right\} \times$$

$$\left. \begin{matrix} m=6 \\ K = \frac{2}{1} \end{matrix} \right\} \quad N=1 \quad m=3 \quad K=5$$

6) $N=0$ тогда по AB и AC нужно пройти 2 или-во раз иначе в конце оканчивая в B или C

$$2K + 11M = 85, \text{ но } K \text{ и } M : 2 \Rightarrow 85 : 2 \text{ противоречие}$$

$$1) N=1 \quad M=3 \quad K=5$$

пути ACBCBABA (т.к. путь

$$5 \cdot AB + 3 \cdot BC + 1 \cdot AC = 5 \cdot 13 + 3 \cdot 21 + 34 = 65 + 63 + 34 = 162 \text{ км}$$

$$2) N=2 \quad K=1 \quad M=4$$

еще 1 раз по AB, то в A уже не вернемся, т.к.

тогда последний раз будет CA, но $N=2 \Rightarrow$ др. отсюда сделаем

еще раз по CA (т.к. в т. A кроме как в смысле некуда мы

не могли двигаться, но тогда из A мы не можем выйти противоречие

метеле

теставили в ауру т. 0

$$x_2^2 + \left(\frac{x_1^2}{8} - \frac{x_2^2}{8}\right)^2 = x_1^2$$

$$\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 \cdot \frac{1}{64} = x_1^2 - x_2^2 \quad t = x_1^2 - x_2^2$$

$$\frac{t^2}{64} = t \quad t=0 \quad t=64$$

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{8} = y_2 - y_1 = \frac{64}{8} = 8$$

Омлен. 8

$$K AB + m BC + N AC = x \text{ гербушек} \quad x = ?$$

$$K t_{AB} + m t_{BC} + N t_{AC} = 85 \text{ мин}$$

$$K \cdot 7 + m \cdot 11 + N \cdot 17 = 85$$

$$N \leq 5$$

$$m \leq 7$$

$$K \leq 12$$

1) $N=5$ x

2) $N=4$

$$K \cdot 7 + 11m = 17 \cdot 4 \quad x$$

3) $N=3$

$$7x + 11m = 94 \quad 34 \quad 23 \quad 12 \quad 1$$

4) $N=2$

$$K \cdot 7 + 11 \cdot m = 51 \quad 51 \quad 40 \quad 29 \quad 18 \quad \textcircled{7} \quad \checkmark$$

5) $N=1$

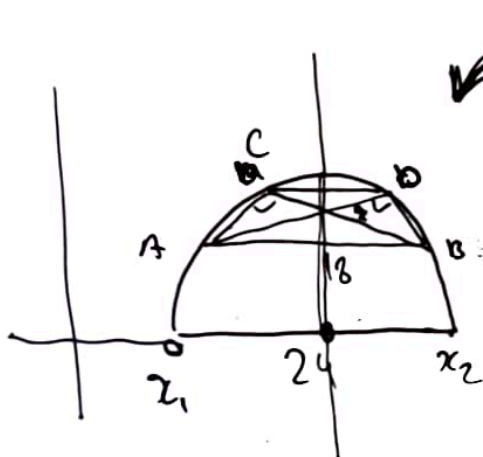
$$K \cdot 7 + 11 \cdot m = 68 \quad 68 \quad 57 \quad 46 \quad \textcircled{35} \quad 24 \quad 13 \quad 2$$

$$K=1 \quad m=4 \quad N=2$$

13 84 68

$$N=1 \quad m=3 \quad x=5$$

34 63 65



AB и CD

$$18 = a + \frac{b^2}{4a}$$

$$y = 18 - bx^2$$

$$0 = 18 - bx^2 \quad x^2 = \pm \sqrt{\frac{18}{b}}$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{18}{b}} + \sqrt{\frac{18}{b}} = 24$$

$$\frac{18}{b} = 144 \quad b = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$$

перемены

$$\frac{t+2}{t-2} = \frac{x-1}{2}$$

$$2t+4 = tx - 2x + t + 2$$

~~$$2t + tx - 2x - 2$$~~

$$3t - tx = -2x - 2 \quad t = \frac{-2x-2}{3-x}$$

$$\delta\left(\frac{\frac{-2x-2}{3-x}+2}{\frac{-2x-2}{3-x}-2}\right) = \frac{2}{\frac{3-x}{3-x}-2} \quad \delta\left(\frac{-x-1+3-x}{-x-1-3+x}\right) = \frac{2-x}{-x-1-3+x} = \frac{2-x}{-4}$$

$$\frac{t+2}{t-2} = \frac{x-3}{4} \quad 4t+8 = xt - 2x - 3t + 6$$

$$7t - xt = -2x - 2 \quad t = \frac{-2x-2}{7-x}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \quad f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{2} = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{f(f(x))-1}{4} = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{4} = \frac{x-7}{16}$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{f(f(f(x)))-1}{8} = \frac{\frac{x-7}{16}-1}{8} = \frac{x-15}{128}$$

xy

$$(xy+3x-2y-6) | y-x-8 | = (x-5) | xy+3x-2y-6 |$$

$$\frac{1}{4}(y+3)(x-2) | y-x-8 | = (x-5) | (y+3)(x-2) |$$

$$y-x-8 = y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - 9y + 6 + x = 0$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24 - 4x}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{57 - 4x}}{2}$$

$$x \leq \frac{57}{4}$$

$$x = -y^2 + 9y - 6$$

$$(-y^2 + 9y - 8) | y^2 - 8y | = (-y^2 + 9y - 11) | -y^2 + 9y - 8 |$$

$$\rightarrow (1-y)(y-8) | y^2 - 8y - 2 | = (-y^2 + 9y - 11) | (1-y)(y-8) |$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4}}{2} = 4 \pm \sqrt{18}$$

1 в 2 з 3 н

черты

2 в 4 з 7 н 3 ч

2

1) выберем 2 - 2 способа

2) выберем 3 - ~~4.6~~ способа

3) а) взяли 0 ч и 2 з C_2^2

б) взяли 1 ч и 1 з $C_1^1 \cdot C_1^1$

в) взяли 2 ч и 0 з C_2^2

а) выберем 1 ч 0 з 3 н $C_1^1 \cdot C_3^3$

1 ч 2 н $C_1^1 \cdot C_2^2$

2 ч 1 н $C_2^2 \cdot C_1^1$

3 ч 0 н C_3^3

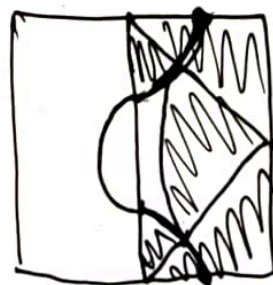
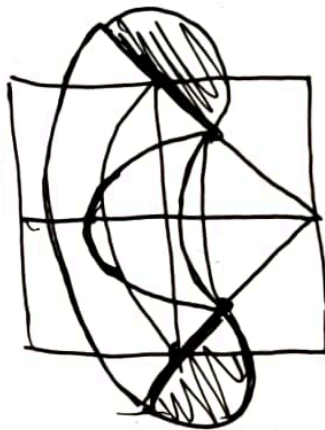
б) выберем 1 ч 0 з

1 ч

2 ч

в) выберем 1 ч 0 з

1 ч



$$\frac{t+2}{t-2} = x$$

$$t+2 = (t-2)x$$

$$f\left(\frac{\frac{x-1}{x-1} + 2}{\frac{2x+2}{x-1} - 2}\right) = \frac{2}{2x+2-2}$$

$$t = \frac{2x+2}{x-1}$$

$$f\left(\frac{1+x+x-1}{x+1-x+1}\right) = \frac{x-1}{x+1-x+1}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$