



0 069445 700005

06-94-45-70

(40.16)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 6

Место проведения Москва  
город

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Корнилова Анатолия Александровича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Корнилов



Исходник №1.

Рассмотрим все случаи того, сколько будет в составе универсалов и кем они будут являться и для каждого найдем количество способов.

I 0 универсалов  $\Rightarrow C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 420$

II 1 универсал

1) универсал = защитник  $\Rightarrow C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 840$

2) универсал = нападающий  $\Rightarrow C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 756$

III 2 универсала

1)  $2y = 2z \Rightarrow C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 = 210$

2)  $2y = 2k \Rightarrow C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 252$

3)  $y = z$  и  $y = k \Rightarrow C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 1008$

IV 3 универсала

1)  $2y = 2z$  и  $y = k \Rightarrow C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 \cdot C_7^3 = 126$

2)  $y = z$  и  $2y = 2k \Rightarrow C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 168$

3)  $3y = 3k \Rightarrow C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 12$

Т.к. все эти случаи взаимоисключающие и независимые, то ответом будет сумма всех этих чисел.

$\Sigma = 420 + 840 + 756 + 210 + 252 + 1008 + 126 + 168 = 3792$

Ответ: 3792.

$\frac{(xy+3x-2y-6)}{(y-x+10)} = \frac{(x-5)(xy+3x-2y-6)}{(y-x-8)} = (x-5) \cdot \frac{(xy+3x-2y-6)}{(y-x-8)}$  ①

Р-м ②: При  $y < 4 \Rightarrow$  ② - не может быть верно  $\Rightarrow y \geq 4$ .

Примем этот учт:  $y-x+10 = y^2-2y+6 \Rightarrow x = -y^2+9y-6$ .

Р-м ①. Замена, то есть  $xy+3x-2y-6=0$ , но ① - верное равенство. Если  $xy+3x-2y-6 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  можно сократить на него и останется  $|y-x-8| = x-5$ . А далее можно сократить и оставить  $|y-x-8| = 5-x$ .

Тогда решим неравенство:

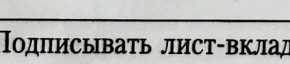
$xy+3x-2y-6 \geq 0$

$x(y+3) - 2(y+3) \geq 0$

$(y+3)(x-2) \geq 0$

$(y+3)(-y^2+9y-8) \geq 0$

$(y+3)(y-1)(y-8) \leq 0$



1)  $xy+3x-2y-6=0$  при  $y=-3; y=1$  и  $y=8$ . С ур. учт есть один случай  $y=8 \Rightarrow x = -64+72-6 = 2 \Rightarrow (2; 8)$  - реш.

2)  $xy+3x-2y-6 > 0$  при  $y \in (-\infty; -3) \cup (1; 8)$ . С ур. учт  $\Rightarrow$

Исходник  
№3 продолжение.

$y \in (1; 8)$ . В том случае  $|y-x-8| = x-5$ . Тогда  $x \geq 5$ .

I  $y-x-8 = x-5 \Rightarrow 2x = y-3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow \frac{y-3}{2} = -y^2 + 9y - 6 \Rightarrow -2y^2 + 18y - 12 = y-3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2y^2 - 17y + 9 = 0$   
 $D = 289 - 72 \cdot 217$   
 $y_1 = \frac{17 - \sqrt{217}}{4} < 4 \rightarrow$  не год. по условию.  
 $y_2 = \frac{17 + \sqrt{217}}{4} > 8 \rightarrow$  не год. по условию

II  $y-x-8 = 5-x \Rightarrow y = 13 \Rightarrow x = -169 + 117 - 6 < 5 \rightarrow$  не год. по условию.

3)  $xy + 3x - 2y - 6 < 0$  при  $y \in (8; +\infty)$ .  
 Тогда  $|y-x-8| = 5-x$ ;  $x \leq 5$ .

Сравниваем с 2. При этом при  $y = 13$ ,  $x = -58$  год. по условию.  
 $\Rightarrow (-58; 13)$  - ответ.

Ответ:  $\{(-58; 13); (2; 8)\}$ .

№4

Назовём дугой любую полуокружность из отмеченных. Т.к. на каждой дуге

он едет некоторое количество минут, а всего минут 35, т.е. некоторое  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  он проехал некоторое количество дуг.  $D$ -жем, что он проехал по всем дугам  
 окружности некоторое количество раз. Проще всего по окружности много раз. Мы не  
 знаем толку, в которой мы делаем две дуги от точки к точке, а где одной меем  
 ется  $\Rightarrow$  мы сделаем некоторую толку  $\Rightarrow$  применим теорему В.А.

Тогда он проедет по каждой дуге хотя бы по 1 разу  $\Rightarrow$  он проедет не это  
 $7 + 11 + 17 = 35$  минут  $\Rightarrow$  у него останется  $50^{\text{мин}}$  на то-либо. При этом по всем дугам  
 столько раз, сколько некоторое число раз. Если он едет 2 раза по дуге 17 минут  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  ост. 16 мин, которые невозможно получить  $\Rightarrow$  по дуге 17 мин он едет всего  
 1 раз. Тогда, не трудно понять, нужен некоторый серебря, то единственное  
 соотношение  $7 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 50$ . Тогда автомобиль проехал  $5AB + 3AC + AC =$   
 $= 5 \cdot 13 + 3 \cdot 21 + (13 + 21) = 6 \cdot 13 + 4 \cdot 21 = 78 + 84 = 162 \text{ км.}$

$AC = AB + BC$ , т.к. радиус этой окружности равен сумме радиусов двух мал.

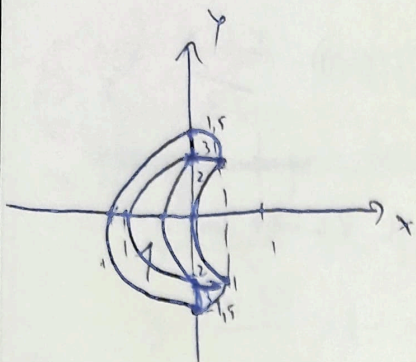
Ответ: 162 км

№5.

$D$ -жем, что заданная функция:  $f(y) = \frac{y-1}{2}$ .

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{\frac{x+2}{x-2} - 1}{2} = \frac{x+2-x-2}{2(x-2)} = \frac{2}{x-2}$ , т.е.  $f$





Чертовик  
N2

Заметю, что область будет формироваться так, как показано на картинке, но есть полая седьминутка окружками и углы будут окружностями.

Начнем считать площадь.

Для начала посчитаем всё, где  $x \leq 0$ .

Эта область - полукруг с центром в  $(0, 0)$  и  $R = 1,5 \rightarrow S_1 = \frac{\pi \cdot 2,25}{2} = \frac{9}{8}\pi$ .

Потом найдем  $S_2$ , как площадь прямоугольника - площадь сектора круга  $+ S_{\Delta}$   $S_{\text{прямо}} = 0,5 \cdot 2 = 1$ . Окр. с центром в  $(0, 0)$  и  $R = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$\Rightarrow S_{\text{сектор}} = \pi \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}\pi$ . Найдем угол, кот. соотн этом секторе:

$$\frac{5}{4}r \frac{\alpha}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha = 1$$

$$\frac{5}{2} \cos \alpha = \frac{5}{2} - 1$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{23}{25}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$= \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5} \Rightarrow S_2 = 1 - \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5}$$

Потом найдем  $S_3$ . Это 2 кусочка четверть-окружностей с  $R = 0,5 \Rightarrow$  вместе - пол-окр.  $R = 0,5 \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{8} \pi$ .

$$S = \frac{9}{8} \pi + \frac{3}{2} - \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5} + \frac{1}{8} \pi = \pi + \frac{3}{2} - \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5}$$

Ответ:  ~~$\pi + \frac{3}{2} - \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5}$~~   $\pi + \frac{3}{2} - \frac{5}{8} \arcsin \frac{4}{5}$ .

N7

Ответ:  $10^{75} - 1$ .

Большинств 75-значных чисел не сумм, кот. это так. Потому, что если мы постоянно будем добавлять к самому началу нули, то сумма цифр не будет меняться. Всегда будем уменьшать часть цифр, а часть увеличивать но так, чтобы сумма цифр не менялась. Тогда мы будем получать все числа виде  $n \cdot 10^{75} - n$ , а у них сумма цифр такая же.

Зерновик

Нужно 1В; 2г; 3нап.

Есть: 2В; 4г; 7нап; 3(з.нап.н.)

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 168 \\ \hline \times 42 \\ 42 \\ \hline + 56 \\ \hline 1008 \end{array}$$

I) 0 зерн

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot C_2^1 C_4^2 C_7^3 = \frac{2! \cdot 4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7}{2} = 420$$

II) 1 зерн

$$1) \text{ зерн} = 2 \Rightarrow C_2^1 C_3^1 C_4^1 C_7^3 = 2! \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 840$$

$$2) \text{ зерн} = 4 \Rightarrow C_2^1 C_4^2 C_3^1 C_7^3 = 2! \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 18 \cdot 42 = 756$$

III) 2 зерн

$$1) 2 \text{ г} \Rightarrow C_2^1 C_3^2 C_7^3 = 2! \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

$$2) 2 \text{ на} \Rightarrow C_2^2 C_4^2 C_7^3 = \frac{2! \cdot 4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 12 \cdot 7 = 252$$

$$3) 2 \text{ на} \Rightarrow C_2^1 C_4^2 C_3^1 C_7^3 = 2! \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6}{7 \cdot 7} = 24 \cdot 42 = 1008$$

IV) 3 зерн

$$1) 2 \text{ г} \text{ и } 1 \text{ на} \Rightarrow C_2^1 C_3^2 C_4^1 C_7^3 = 2! \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6}{7} = 21 \cdot 6 = 126$$

$$2) 1 \text{ г} \text{ и } 2 \text{ на} \Rightarrow C_2^1 C_3^1 C_4^2 C_7^3 = 2! \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 4 \cdot 7 = 6 \cdot 4 \cdot 7 = 42 \cdot 7 = 168$$

$$3) 3 \text{ на} \Rightarrow C_2^1 C_4^2 C_7^3 = 2! \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$420 + 840 + 756 + 252 + 1008 + 126 + 168 + 12 = 1470 + 1260 + 180 + 882 = 2730 + 1062 = 3792$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ + 840 \\ \hline 1260 \\ + 180 \\ \hline 1470 \\ + 756 \\ \hline 2226 \\ + 126 \\ \hline 2352 \\ + 1470 \\ \hline 3822 \\ + 1062 \\ \hline 4884 \end{array}$$

$(xy + 3x - 2y - 6) | y - x - 8 | = (x - 5) | xy + 3x - 2y - 6 |$  ①

$\begin{cases} xy - x + 10 = y - 4 & ② \\ y - x - 10 = y - 4 \end{cases}$  - реш

Решим ②:  
 $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ y - x - 10 = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -y + 9 = 5 \end{cases}$

Получим:  $x = 5$   
 $(xy + 3x - 2y - 6) | y - x - 8 | = (y^2 + 9y - 6 - 5) | y - (-y + 9 - 6) - 8 | = (y^2 + 9y - 6 - 5) | y - (-y + 3) - 8 |$

Решим ①:  
 $x - 5 = \frac{xy + 3x - 2y - 6}{|xy + 3x - 2y - 6|} |y - x - 8|$   
 " + 1 умнож = 1

а)  $xy + 3x - 2y - 6 \geq 0$   
 $-y^2 + 9y^2 - 6y - 3y^2 + 27y - 18 - 2y - 6 \geq 0$   
 $-y^2 + 6y^2 + 19y - 24 \geq 0$   
 $y^2 - 6y + 19y - 24 \leq 0$   
 $y^2 + 13y - 24 \leq 0$   
 $y = 27$   
 $y = 27$   
 $y = 27$   
 $y = 27$

Черновик

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)(y-x-8) = (x-5)(xy+3x-2y-6) \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

Усл:  $y \geq 4 \Rightarrow y-x+10 = y^2 - 2y + 16$   
 $x = -y^2 + 2y - 6$

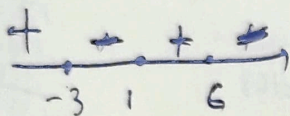
Если:  $xy+3x-2y-6 \geq 0 \Rightarrow$  верх решен

$$\begin{aligned} x(y+3) - 2y(y+1) &= 0 \\ (y+3)(x-2y) &= 0 \end{aligned}$$

$y = -3$  - не подходит

$$\begin{aligned} x-2y &= 0 \Rightarrow x=2y \\ y^2 - 2y + 6 &= 2y \\ y^2 - 4y + 6 &= 0 \\ D &= 16 - 24 = -8 \\ y_1 &= \frac{4 - \sqrt{-8}}{2} \\ y_2 &= \frac{4 + \sqrt{-8}}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 6$  - решение  $\Rightarrow x = -36 + 54 - 6 = 12$



При  $y \in [4; 6) \Rightarrow xy+3x-2y-6 > 0$

Усл:  $x \geq 5$

$$\begin{aligned} y-x-8 &= x-5 \\ y &= 2x+3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \end{aligned}$$

$$(y-x-8) = x-5$$

$$\begin{aligned} y^2 - 9y + 8 &= 0 \\ D &= 81 - 32 = 49 \\ y_1 &= \frac{9-7}{2} = 1 \\ y_2 &= \frac{9+7}{2} = 8 \end{aligned}$$

на  $AB = \frac{13}{2}$  км/ч  
 85 мин - ?  
 Пусть столько на  $AB$   
 $2k =$

OK проверка вел. кол-во рун  $\Rightarrow$  все время все 3 рун  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  можно проверить  $AB$ ;  $BC$  и  $AC$  на 1 рун

$$\begin{aligned} 7+11+17 &= 35 \text{ мин} & 7k+11h+17m &= 85 \\ \text{сем. } 50 \text{ мин} & \Rightarrow 2 \text{ рун} & \text{ на } 11 & \\ & & \text{на } 7 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) &= \frac{1}{x-2} \\ \text{пусть } f(x) &= \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$$

Аналог:  $\frac{2}{x-2}$

$$f(y) = y - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{y-1}{2}$$

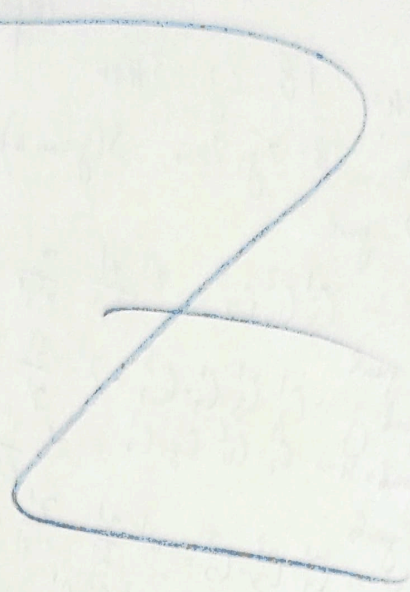
$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$$

$$f(\dots f(x) \dots) = \frac{x-2^{12}+1}{2^{12}} = \frac{x-4097}{4096}$$

12

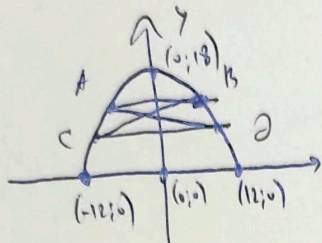
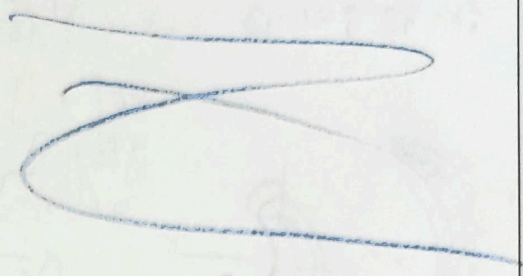




Зеркальце

$$f(y) = \frac{y-1}{2}$$

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{\frac{x+2}{x-2} - 1}{2} = \frac{\frac{x+2-x+2}{x-2}}{2} = \frac{2}{x-2}$$

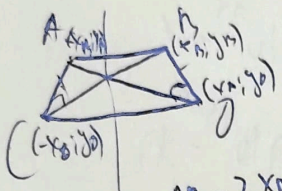


$f(x) =$

$\angle ACK = \angle ADB = 90^\circ$

$y = a - bx^2$

$(0, 18) \Rightarrow a = 18$   
 $(12, 0) \Rightarrow 0 = 18 - 144b \Rightarrow b = \frac{18}{144} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$   
 $y = -\frac{1}{8}x^2 + 18$



$AB = 2x_B$

$AC = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = \sqrt{x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 + (-\frac{1}{8}x_0^2 + 18 - (-\frac{1}{8}x_1^2 + 18))}$

$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{64}(x_1 - x_0)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8} |x_1 - x_0|$

$BC^2 = (x_1 + x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (x_1 + x_0)^2 + \frac{1}{64}(x_1 - x_0)^2$

$4x_1^2 = \frac{65}{64}(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{64}(x_1 - x_0)^2 + (x_1 + x_0)^2$

$(2x_1 - x_0 - x_0)(2x_1 + x_0 + x_0) = \frac{32}{32}(x_1 - x_0)^2$

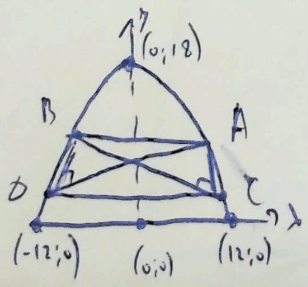
$3x_1 + 2x_0 = \frac{32}{32}x_1 = \frac{32}{32}x_0$

$\frac{63}{32}x_1 = -\frac{65}{32}x_0$

$x_1 = -\frac{65}{63}x_0$

$S(a)$  — сумма чисел  $n$

$\max 75 - 7n$  а такое,  $n =$  при  $n \in [1; 75]$ ;  $S(75n) = S(a)$



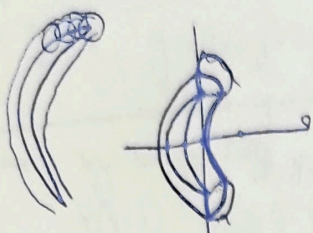
$(-5; -5; -5); (1; 3; -4); (-1; -3; -1)$  — блок. д.

$Ax + By + Cz + 1 = 0$

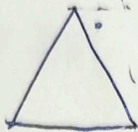
$\begin{cases} -5A - 5B - 5C + 1 = 0 \\ A + 3B - 4C + 1 = 0 \\ -A - 3B - C + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = C$

$A = -3B - C + 1$   
 $15B + 5C - 5 - 5B - 5C + 1 = 0$   
 $-3B - C + 1 + 7B - 4C + 1 = 0$   
 $4B - 4 = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$   
 $A = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$   
 $C = \frac{2}{5}$

$-\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}z = 1 \Rightarrow$  Зариовик  
 $(-5; -5; -5); (1; 3; -4); (-1; -3; -1)$



$x \in [-5; 1]$   
 $y \in [-5; 3]$   
 $z \in [-5; -1]$



$S_{(mn)} = S(n)$

$m \in [1; n]$

max  $75 \cdot 3n$

$= 9 \cdot 75$

$10^{75} - 1 = 9 \dots 9$

$$\begin{array}{r} + 99 \dots 9 \\ + 99 \dots 9 \\ \hline 15 \dots 998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 199 \dots 998 \\ + 99 \dots 99 \\ \hline 29 \dots 997 \\ 39 \dots 96 \\ 49 \dots 95 \\ 59 \dots 94 \\ 69 \dots 93 \\ 79 \dots 92 \\ 89 \dots 91 \\ 99 \dots 90 \end{array}$$

$10^{75} - 1$   
 $n \cdot 10^{75} - n$