Работа сдана 14:21

38-06-51-04
(38.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кузьмина Алексея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
38-06-51-04	95	15	15	10	15	10	15	15	

38-06-51-04 (38.3)

Участник 1439

95 Пётр (девяносто пять)

№1

$x^2+ax+b=0$

$D=a^2-4b>0$, т.к. уравнение имеет два различных корня, т.к. m и n попарно различны

$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

Без ограничения общности, пусть $\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{1}{m}-2$ и $\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{1}{n}-2$

Сложив получу, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=-a \Leftrightarrow a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$

Число a — целое, т.к. по условию коэф. целые, тогда

либо m и n равны ±1, либо $m=-n$

~~...~~ $m=n=1$ не возможно по условию, как и $m=n=-1$, и $m\neq n$,

в таком случае $m=-n$ и $a=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=4-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=4$

~~$D>0$, ... $a^2-4b>0$~~

$D>0$, тогда $a^2-4b>0$, откуда $b<4$, при этом число b целое.

При $a=4$ и любом $b<4$ (~~...~~ $\sqrt{a^2-4b}>0$)

$\frac{1}{m}-2=\frac{-4+\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}-2 \Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} \Rightarrow m=\frac{2}{\sqrt{a^2-4b}}$

$\frac{1}{n}-2=\frac{-4-\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}-2 \Rightarrow \frac{1}{n}=-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} \Rightarrow n=\frac{-2}{\sqrt{a^2-4b}}$

Так как $a^2-4b>0$ при ~~...~~ целом $b<4$, то

m и n всегда существуют, но по условию они целые $\Rightarrow$

$\pm\frac{2}{\sqrt{a^2-4b}}$ — целое. ~~Возможно~~ целое при $\sqrt{a^2-4b}=2$

$\sqrt{a^2-4b}=1$

Значения корня целые, т.к. a^2 и $4b$ целые, значит всего два варианта.

$16-4b=4$ при $b=3$ подходит, $a+b=4+3=7$

$a^2-4b=1$ при $b=3{,}75$ не подходит, т.к. b не целое

Значит $a+b$ имеет единственное значение при условии, что a, b, m, n принадлежат целым числам

Ответ: 7

Чистовик 2 из 9

№2

Сумма на противоположных гранях равна семи, тогда противоположные пары 1–6; 2–5; 3–4

Если последовательность возрастает и состоит из трёх чисел, то первое число не 5 и не 6

1) Если сначала ~~выпадает~~ выпало 4, то после неё идёт 5, а потом 6.

Это возможно, т.к. против 4 лежит 3 и можно перевернуть на 5, а против 5 — 1, можно на 6. Итого 1 последовательность

2) Если сначала ~~выпадает~~ выпало 3, то после неё идёт 5, а потом 6.

Число 4 лежит против 3 и его получить нельзя.

Последовательность 3 5 6, также всего 1

3) Если сначала ~~выпало~~ выпало 2: после неё либо 3, либо 4.

5 не может быть, так как 5 против 2, а 6 — максимальное число, не подходит. После 3 или 4 идёт 5 или 6 без каких-либо противоречий, т.к. 3 против 4 и значит из 3 и 4 можно попасть в 5 и 6. Итого $1\cdot2\cdot2=4$ последовательности

4) Если сначала 1: после 1 идёт 2, 3, 4 или 5, то есть любое число, если 5, то 156, если 4, то 145 или 146, если 3, то 135 или 136, если 2, то 123, 124, 126, итого 8 последовательностей

Всего $1+1+4+8=14$ различных последовательностей

Ответ: 14

38-06-51-04
(38.3)

Чистовик 3 из 9

№3

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$ $a,b,c>0$ по усл.

$$=3+\frac{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2}{2abc}=$$

$$=3+\frac{(b^2c^2-2ab^2c+a^2b^2)+(b^2c^2-2abc^2+a^2c^2)+(a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2)}{2abc}=$$

$$=3+\frac{(bc-ab)^2+(bc-ac)^2+(ab-ac)^2}{2abc}$$

Так как $a,b,c>0$, то ~~на~~ $2abc>0$,

$\underbrace{(bc-ab)^2}_{\ge0}+\underbrace{(bc-ac)^2}_{\ge0}+\underbrace{(ab-ac)^2}_{\ge0}\ge0$, тогда

$3+\underbrace{\frac{(bc-ab)^2+(bc-ac)^2+(ab-ac)^2}{2abc}}_{\ge0}\ge3$, значит

наименьшее значение — это 3 (при $a=b=c$)

Ответ: 3

Неполная аргументация

Черновик 4 из 9

№1

Сначала рассадку девочек: их 5, мест 10, т.к. две не сидят рядом, значит всего вариантов 6:

X		X		X		X		X	
X		X		X		X			X
X		X		X			X		X
X		X			X		X		X
X			X		X		X		X
	X		X		X		X		X

~~Каждая~~ Каждая строка – отдельный вариант, крестиком отмечены места для девочек.

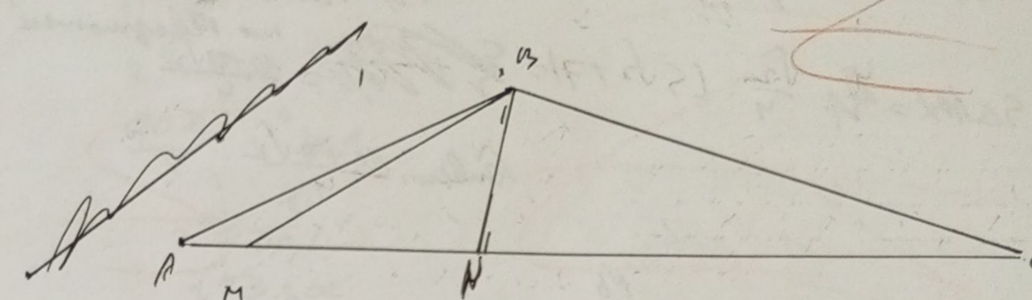
Для каждого из 6 вариантов способов рассадить 5 девочек на 5 мест – $5!$, далее для каждого варианта остается 5 мест для учителя и ~~парей~~ четырех мальчиков, способов их рассадить – $\frac{5!}{1} = 5!$, итого всего вариантов рассадки $6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120 \cdot 120 =$
$= 6 \cdot 14400 = 86400$

Производим умножение, т.к. каждый вариант выбора мест для девочек (6) гарантирует разные рассадки, так как девочек, мальчиков и учителя не пересадили далее, для каждого выбора все варианты рассадок девочек ($5!$) также обеспечивают разные варианты, ну а для каждой рассадки девочек выбираются различные рассадки мальчиков и учителя ($5!$), которые не повторяются с другими вариантами.

Ответ: 86400

38-06-51-04
(38.3)

№5 Черновик 5 из 9



Точка M ближе к A, чем точка N, т.к., в противном случае N лежит между A и M, $\angle ABM = 15^\circ$, а $\angle MBN$, который внутри ~~угла~~ $\angle ABM$, равен 45°, что невозможно.

$\angle ABC = \angle ABM + \angle MBN + \angle NBC = 15 + 45^\circ + 75^\circ = 135^\circ$

$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin \angle ABM$

$S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin \angle MBN$

$S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2} BN \cdot BC \cdot \sin \angle NBC$

$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2}(AB \cdot BM \cdot \sin 15 + \cancel{\frac{1}{2}} BN \cdot BC \cdot \sin 75) = 5$

$S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = \frac{AB \cdot BM \cdot \sin 15 \cdot BN \cdot BC \cdot \cancel{\sin 75}}{4} = 3$

$\sin 75 = \cos 15$, тогда $\sin 15 \cdot \sin 75 = \sin 15 \cdot \cos 15$

Если вспомнить, что $\sin 30^\circ = 2 \sin 15 \cdot \cos 15$, то

$S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = \frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 15 \cos 15}{4} = \frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 30}{8} =$

$= \frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC}{16} = 3$

$AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC = 48 \Rightarrow BM \cdot BN = \frac{48}{AB \cdot BC}$

$S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{4} BM \cdot BN = \frac{12\sqrt{2}}{AB \cdot BC}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} AB \cdot BC$

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} + S_{\triangle BMN} = 5 + \frac{12\sqrt{2}}{AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{4} AB \cdot BC \Big| \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} AB \cdot BC$

$(AB \cdot BC)^2 \cancel{\sqrt{2}} - 48 - \frac{20}{\sqrt{2}} AB \cdot BC = 0$

$D = 200 + 48 \cdot 4 = 392$; $AB \cdot BC = \frac{\frac{20}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{392}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{3?}}{\sqrt{2}}$

~~[illegible]~~ тогда $AB \cdot BC = \frac{10+\sqrt{98}}{\sqrt2} = \frac{10+7\sqrt2}{\sqrt2} = \frac{10\sqrt2}{2}+7 = 5\sqrt2+7$,

так как в случае, если $AB \cdot BC = \frac{10-\sqrt{98}}{\sqrt2}$, $S_{\triangle ABC} < S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MBC}$, что невозможно

$S_{\triangle ABC} = \frac12 \cdot \frac{\sqrt2}{4} \cdot (5\sqrt2+7) = \frac{10+7\sqrt2}{4}$

Ответ: $\frac{10+7\sqrt2}{4}$

№6

Пусть воду измеряем утром. В целом без разницы, но так проще представить что происходит.

Вечером первого дня в кувшине $\frac72$, утром второго — $\frac72+5$, вечером второго $\frac{\frac72+5}{2} = \frac74+\frac52$, утром третьего $\frac74+\frac52+5$, вечером третьего $\frac{\frac74+\frac52+5}{2} = \frac78+\frac54+\frac52$, и так далее.

Минимальное кол-во воды будет утром, так как 5 л. заливают.

~~[illegible]~~

Утром второго дня количество воды от утра первого отличается (больше) на $5-\frac72=\frac32$, утром третьего на $\frac52-\frac74=\frac34$ больше, чем утром второго, утром четвёртого еще на $\frac54-\frac78=\frac38$ больше и так далее. Тогда максимальный объем воды — $7+\frac32+\frac34+\frac38+\ldots+\frac{3}{2^n}\ldots =$

$= 7+3(\frac12+\frac14+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots)$. стремится к 1

$\frac12+\frac14+\ldots+\frac{1}{2^n}\ldots$ из бесконечно [illegible]

тогда ~~максимальный~~ минимальный искомый ответ равен $7+3=10$

99,9% от 10 л — это 9,99 л

$7+3(\frac12+\frac14+\ldots+\frac{1}{2^n}) \ge 9{,}99$, где $n+1$ — номер дня

Сумма от $\frac12$ до $\frac{1}{2^n}$ равна $\frac{2^n-1}{2^n}$, т.к. $(\frac12+\frac14+\ldots+\frac{1}{2^n})+\frac{1}{2^n}=1$

Чистовик 7 из 9

$3\cdot\frac{2^n-1}{2^n} \ge 2{,}99 \quad | \cdot \frac{2^n}{3} > 0$

$2^n - 1 \ge \frac{2{,}99}{3}\cdot 2^n$

$\frac{0{,}01}{3}\cdot 2^n \ge 1$

$2^n \ge \frac{3}{0{,}01}$

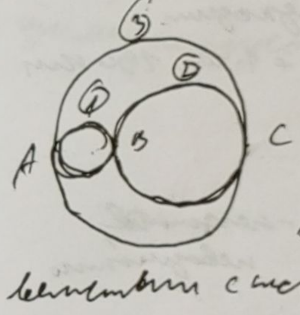
$2^n \ge 300$

Отсюда, $n \ge 9$, т.к. $2^9=512$, а $2^8=256$,

Значит на 10 день будет впервые $\ge 99{,}9\%$

Ответ: а) 10 л; б) 10 день

№7



~~AB [illegible] AC~~

~~[illegible]~~

~~1) Найду дугу AC:~~

Буду называть окружности в соответствии с точками на них: окружность AB, окружность BC и окружность AC

1) Найду дугу AC: радиус окружности AB равен $\frac{2\cup AB}{2\pi} = \frac{\cup AB}{\pi} = \frac{15}{\pi}$, радиус окр. BC равен $\frac{\cup BC}{\pi} = \frac{25}{\pi}$, радиус окружности AC равен сумме радиусов окружностей AB и BC, ~~[illegible]~~ в таком случае дуга $AC = (\frac{15}{\pi}+\frac{25}{\pi})\cdot 2\cdot\pi : 2 = 40$ км

2) Пусть автомобиль проехал по дуге AB a раз, по дуге BC b раз, по дуге AC — c раз. Замечу, что, если автомобиль вернулся в точку A, значит он равное количество раз въехал и выехал из точки A, равное количество раз въехал и выехал из точки B, и также равное количество раз въехал и выехал из C, тогда

Чистовик 8 из 9

~~a+b=a (mod 2)~~;

$a+b \vdots 2$; $b+c \vdots 2$; $a+c \vdots 2$,

Если a - четно, то b и c четно, если a нечетно, то b и c нечетные, тогда a, b и c одной четности

Время пути равно $a\cdot 7 + b\cdot 11 + c\cdot 17$ минут, пройденный путь равен $a\cdot 15 + b\cdot 25 + c\cdot 40$

Переберу случаи:

Если $c=1$;

$a\cdot 7 + b\cdot 11 + 1\cdot 17 = 85$

$a\cdot 7 + b\cdot 11 = 68$, a и b нечетные

$68 - a\cdot 7 = b\cdot 11 \Rightarrow 68 - 7\cdot a \vdots 11$

$a=5$, $68 - 7\cdot 5 = 33$; $b=3$

подходит

$S = 5\cdot 15 + 3\cdot 25 + 1\cdot 40 = 130$ км

Если $c=2$:

$a\cdot 7 + b\cdot 11 + 2\cdot 17 = 85$

$a\cdot 7 + b\cdot 11 = 51$, a и b четные, 51 - нечетное

невозможно

Если $c=3$

$a\cdot 7 + b\cdot 11 + 3\cdot 17 = 85$

$a\cdot 7 + b\cdot 11 = 34$ a и b нечетные

$34 - a\cdot 7 = b\cdot 11 \Rightarrow 34 - a\cdot 7 \vdots 11$

a: решений нет

Если $c=4$ аналогично с $c=2$; $a\cdot 7 + b\cdot 11 = 17$ при a и b четных невозможно

Если $c=5$:

$a\cdot 7 + b\cdot 11 + 5\cdot 17 = 85$

$a\cdot 7 + b\cdot 11 = 0 \Rightarrow a, b = 0$, но a и b - нечетные, невозможно

Итого 1 случай: 5 раз по дуге AB, 3 раза по дуге BC и один по дуге AC. Это, конечно, возможно: из точки A два круга по окр. AB и пятая дуга AB ($5 = 4 + 1$), и первый из B один круг по окр. BC и вторая дуга BC ($3 = 2 + 1$) и дуга CA, вернемся в точку A, $S = 130$ км

Чистовик: 9 из 9

Точки A, B и C лежат на одной прямой, так как обе дуги AC автомобиль проезжает за одинаковое время, тогда AC - диаметр окр. AC, $\angle ABC = 180°$, т.к. если через B провести касательную к ~~[illegible]~~ окружностям AB и BC, она будет перпендикулярна диаметрам AB и BC и $\angle ABC = 90° + 90° = 180°$. AB и BC диаметры, так как, по условию обе дуги AB и обе дуги BC проходятся за равное время. Тогда, если $\angle ABC = 180°$, A, B и C лежат на одной прямой и AC - диаметр окр. AC.

Об этом нужно было сказать в начале задачи, т.к. если A, B и C не на одной прямой, то радиус окр. AC меньше суммы радиусов окр. AB и BC