

0 328202 320000

32-82-02-32

(40.40)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 лист *оригинал*

Вариант № 7

Место проведения г. Москва
город

Решение

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Козеруб Иван Владимирович
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» 02 2024 года

Подпись участника
Козеруб

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	0	12	12	12	12	0	0	56

Задача 5

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}, \quad g(x) = f^3(x)$$

$k = ? \text{ при } x = 0$

56 (переходим через)

1) Замена $x+1 = t \rightarrow x-1 = t-2$

$$f\left(\frac{t-2}{t}\right) = -\frac{1}{t}$$

$$f\left(1 - \frac{2}{t}\right) = -\frac{1}{t}$$

2) Замена $-\frac{1}{t} = a$

$$f(1+2a) = a$$

3) Замена $1+2a = k \rightarrow a = \frac{k-1}{2}$

$$f(k) = \frac{k-1}{2}$$

4) Т.е. функция $f: f(x) = \frac{x-1}{2}$ — линейная

Тангенс угла наклона везде одинаковый

 $x \neq 1$

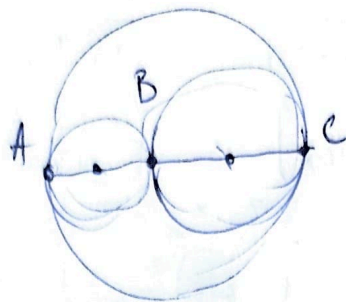
5) $f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x}{4} + c_1, c_1 = \text{const}$

$$f(f(f(x))) = f^3(x) = \frac{\frac{x}{4} + c_1 - 1}{2} = \frac{x}{8} + c_2, c_2 = \text{const}$$

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_g = f^g(x) = \frac{x}{2^g} + c_g, c_g = \text{const}$$

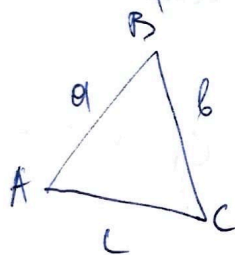
Тангенс угла наклона в этом случае
коэфф. при x т.е. $\frac{1}{2^g}$ Ответ: $2^{-9} \left(\frac{1}{512}\right)$
или же $\frac{1}{512}$

Задача 4



- 1) \checkmark \overline{AB} 15 км 5 мин а
 \checkmark \overline{BC} 25 км 13 мин в
 \checkmark \overline{AC} ? км 19 мин с

2) Из любой точки автомобиль может попасть в любую группу, так же известно, что начал в А и приехал обратно в А. Из этих двух условий можем построить все элементарные комбинации:



- | | | |
|----------|---------------|-----------|
| 1. 2а | \rightarrow | 1. 10 мин |
| 2. 2с | \rightarrow | 2. 38 мин |
| 3. 2а+2в | \rightarrow | 3. 36 мин |
| 4. 2с+2в | \rightarrow | 4. 64 мин |
| 5. а+в+с | \rightarrow | 5. 37 мин |

3) Так же известно, что в дороге был 95 мин 95-минутно (но из (2) в элементарных комбинациях нет только а+в+с - 37 мин)
 $95 - 37 = 58$ мин.

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|--|
| 1. $58 - 37 = 21$ - нечет | 2. 58 мин | } 10 мин
38 мин
36 мин
64 мин |
| $21 - 37 < 0$ | $58 - 38 = 20 = 2 \cdot 10$ | |
| противоречие | $58 - 36 = 22$ | |
| | не подходит | |

Очевидно, что подходит только случай $37 + 38 + 10 + 10 = 95$ мин, которому соответствует маршрут: (см. след. лист.)

Задача 4 (продолжение)

3) Маршрут: $37 + 37 + 10 + 10$
 $(a+b+c) + 2c + 2a + 2a$

$5a + b + 3c$

4) Найдем длину пути \tilde{AC}

1. $\overline{AB} = 15$

2. $\overline{BC} = 25$

$\tilde{AC} = 40$

$\pi d = 30$

$\pi d = 50$

$\pi d_3 = 2\tilde{AC}$

$d_1 = \frac{30}{\pi}$

$d_2 = \frac{50}{\pi}$

$30 = 2\tilde{AC}$

$\Rightarrow d_3 = \frac{80}{\pi}$

5) $5 \cdot 15 + 25 + 3 \cdot 40 = 75 + 25 + 120 = 220 \text{ км.}$

Ответ: 220 км

Задача 6

1.) (из условия)

$y = a - bx^2; x=0 \quad y=g$

$g = a - b \cdot 0^2 \quad a=g$

$y = g - bx^2$

$f(g) = 0 = g - b \cdot g^2 \Rightarrow b = \frac{1}{g} \rightarrow y = g - \frac{1}{g} x^2$

2) Пусть абсциссы $\tau, B = a_0 \Rightarrow \tau, A = -a_0$
 $\tau, C = b_0 \Rightarrow \tau, D = -b_0$

$f(a_0) = g - \frac{1}{g} a_0^2$

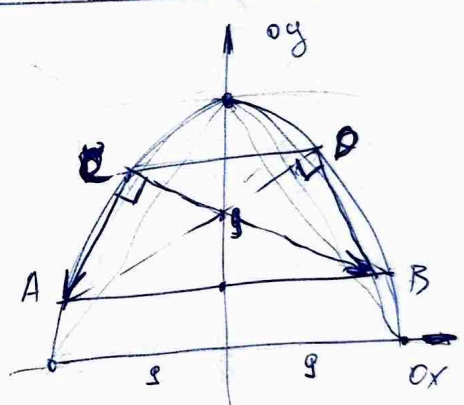
$f(b_0) = g - \frac{1}{g} b_0^2$

Искомое $l = f(b_0) - f(a_0) = \frac{1}{g}(b_0^2 - a_0^2)$

3) Вектор \vec{CA} :

(см. след. лист)

$A(-a_0; g - \frac{1}{g} a_0^2) \left\{ \vec{CA} = (b_0 - a_0; \frac{1}{g}(b_0^2 - a_0^2)) \right.$
 $C(-b_0; g - \frac{1}{g} b_0^2)$



Задача 6 (проект Немец)

4) Вектор \vec{CB} : $B(a_0; g - \frac{1}{g}a_0^2)$ $\left\{ \vec{CB} = (+b_0 + a_0; \frac{1}{g}(b_0^2 - a_0^2)) \right.$
 $C(-b_0; g - \frac{1}{g}b_0^2)$

5) $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = 0 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ т.к. $\cos 90^\circ = 0$

$$(+b_0 + a_0)(b_0 - a_0) + \frac{1}{g^2}(b_0^2 - a_0^2)^2 = 0$$

$$(b_0^2 - a_0^2) + \frac{1}{81}(b_0^2 - a_0^2)^2 = 0$$

$$b_0^2 - a_0^2 = c$$

$$c + \frac{1}{81}c^2 = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 0 = b_0^2 - a_0^2 \\ c = -81 = b_0^2 - a_0^2 \end{cases}$$

$$c(1 + \frac{1}{81}c) = 0$$

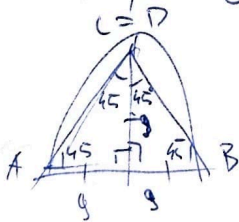
6) $\begin{cases} a_0^2 - b_0^2 = 81 \\ a_0^2 - b_0^2 = 0 \end{cases}$

- не подходит т.к.

(из 2) $c = \frac{1}{g}(a_0^2 - b_0^2) \neq 0$

$$c = \frac{1}{g}(a_0^2 - b_0^2) = \frac{1}{g} \cdot 81 = 9$$

т.е. т. D = т. C.



Ответ: $c = 9$

Задача 3

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) | y - x - 9 | = (x - 4) | xy - 3 + 3x - y | \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 \Rightarrow y \geq 4 \end{cases}$$

1) $(x - 1)(y + 3) | y - x - 9 | = (x - 4)(y + 3)(x - 1)$
 т.к. $y \geq 4$; $y + 3 \neq 0$

$$\begin{cases} (x-1)|y-x-9| = (x-4)|x-1| \\ \sqrt{y-x+9} = (y-4) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Задача 3} \\ \text{(продолжение)} \end{array}$$

2) $x=1$:

$$\sqrt{y+8} = y-4, \quad y \geq 4$$

$$y+8 = y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

$$y=8 \quad y=1$$

$$(1; 8)$$

решение

3) $x > 1$:

$$\begin{cases} |y-x-9| = (x-4) \\ \sqrt{y-x+9} = (y-4) \end{cases}$$

$$\sqrt{y-x+9} = |y-x-9| = y-x$$

Замечание: $y-x=9 \Rightarrow a \geq -9$

1. $\sqrt{a+9} - |a-9| = 9$

$-9 \leq a \leq 9$

$$\sqrt{a+9} + a - 9 = a$$

$$\sqrt{a+9} = 9$$

$$a=72 \quad \emptyset$$

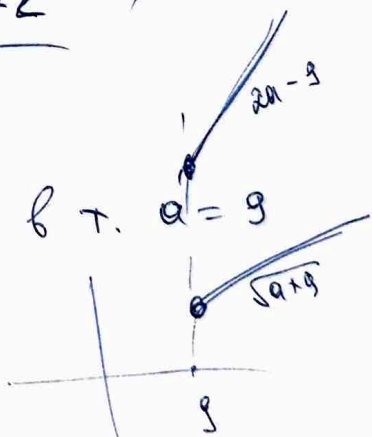
2. $a \geq 9$

$$\sqrt{a+9} - a + 9 = 9$$

$$\sqrt{a+9} = 2a - 9$$

$$\sqrt{18} \neq 9$$

в т. $a=9$



$2a-9$ - возрастает
убывает $\sqrt{a+9} \Rightarrow$ при $a \geq 9 \quad \emptyset$

4) $x < 1$: (см. след. мет.)

Задача 3 (предположение)

$$4) \quad x < 1 \quad \begin{cases} |y-x-9| = -(x-4) \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$$|y-x-9| + \sqrt{y-x+9} = y-4 - x+4$$

Замена: $y-x = a, \quad y \geq 4 \quad -x \geq -1 \quad y-x \geq 3$

$$|a-9| + \sqrt{a+9} = a$$

1. $a \geq 9$ $a-9 + \sqrt{a+9} = a$

$$\sqrt{a+9} = 9, \quad a=72$$

$$\boxed{y-x=72}$$

2. $3 < a < 9$

$$\sqrt{a+9} = 2a-9$$

(из пункта 3) покажем, что не имеет решений

5) $y-x=72$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$\sqrt{81} = 9 = y-4 \quad y=13$$

$$x = -72 + y = -72 + 13 = -59$$

$$\boxed{(-59; 13)}$$

Подставляя в исходное, легко убедиться, что пара $(-59; 13)$ подходит.

Ответ: $(-59; 13), (1; 8)$

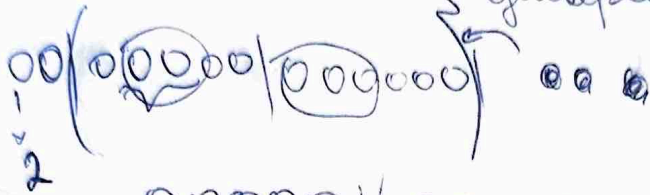
- ① 1 вратари
2 защитника
3 нап.

2

5

8

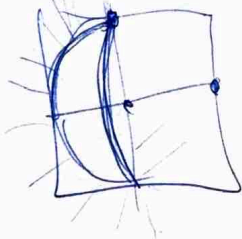
+ 3 универсала



$$2 \cdot (C_5^2 \cdot C_3^3 + C_6^2 \cdot C_3^3 + C_7^2 \cdot C_3^3 + C_8^2 \cdot C_3^3)$$

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

②



③

$$a|b| = c|a|$$

$a > 0$

$$\sqrt{b} = c$$

$$|b| = c$$

$$\sqrt{b} = c$$

16

$$b > 0$$

$$b = c$$

$$\sqrt{b} = c$$

$$c = 1$$

$$b = 1$$

$$c = 0 \quad b = 0$$

$$a = \pm \sqrt{b}$$

$$a = \pm |b|$$

$a < 0$

$$b = -c$$

$$\sqrt{b} = c$$

$$\sqrt{-c} = c \quad c \leq 0$$

$$-c = c^2 \quad c = 0$$

$$c = -1$$

$$\sqrt{y - x + 9} = y - 9$$

$$y - |y - x - 9| = +63$$

$$72 - 9 = 0$$

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$$

$$x+1 = t$$

$$f\left(\frac{t-2}{t}\right) = -\frac{1}{t}$$

$$f\left(1 - \frac{2}{t}\right) = -\frac{1}{t}$$

$$-\frac{1}{t} = a$$

$$f(1+2a) = a$$

$$2a+1 = k$$

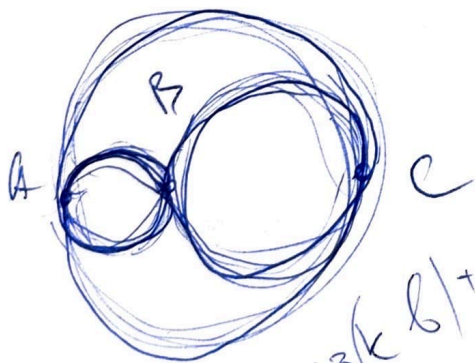
$$a = \frac{k-1}{2}$$

$$f(k) = \frac{k-1}{2} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$f^2(x) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$$

$$f^3(x) = \frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{4} - 1}{2} = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$$



$$AB = 15 \text{ km} \quad | \quad 5 \text{ mm}$$

$$BC = 25 \text{ km} \quad | \quad 13 \text{ mm}$$

$$AC = 19 \text{ km} \quad | \quad 19 \text{ mm}$$

$$5x + 13y + 19z = 95$$

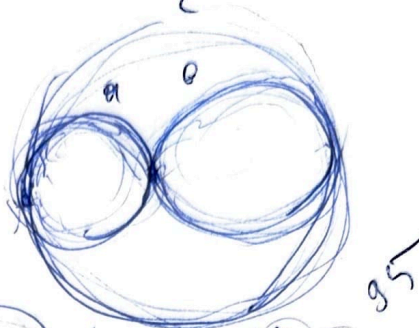
$$x + y + z = 9 \quad \in \mathbb{N}$$

$$5x + 3y + 4z = 0$$

$$5x + 13y = 0$$

$$10 + 10 + 38 + 37$$

$$2a + (a+b+c) + 2c$$



$$2a$$

$$a+b+c$$

$$2a+2b$$

$$2c$$

$$2b+2c$$

$$a+b+c$$

$$95 - 37$$

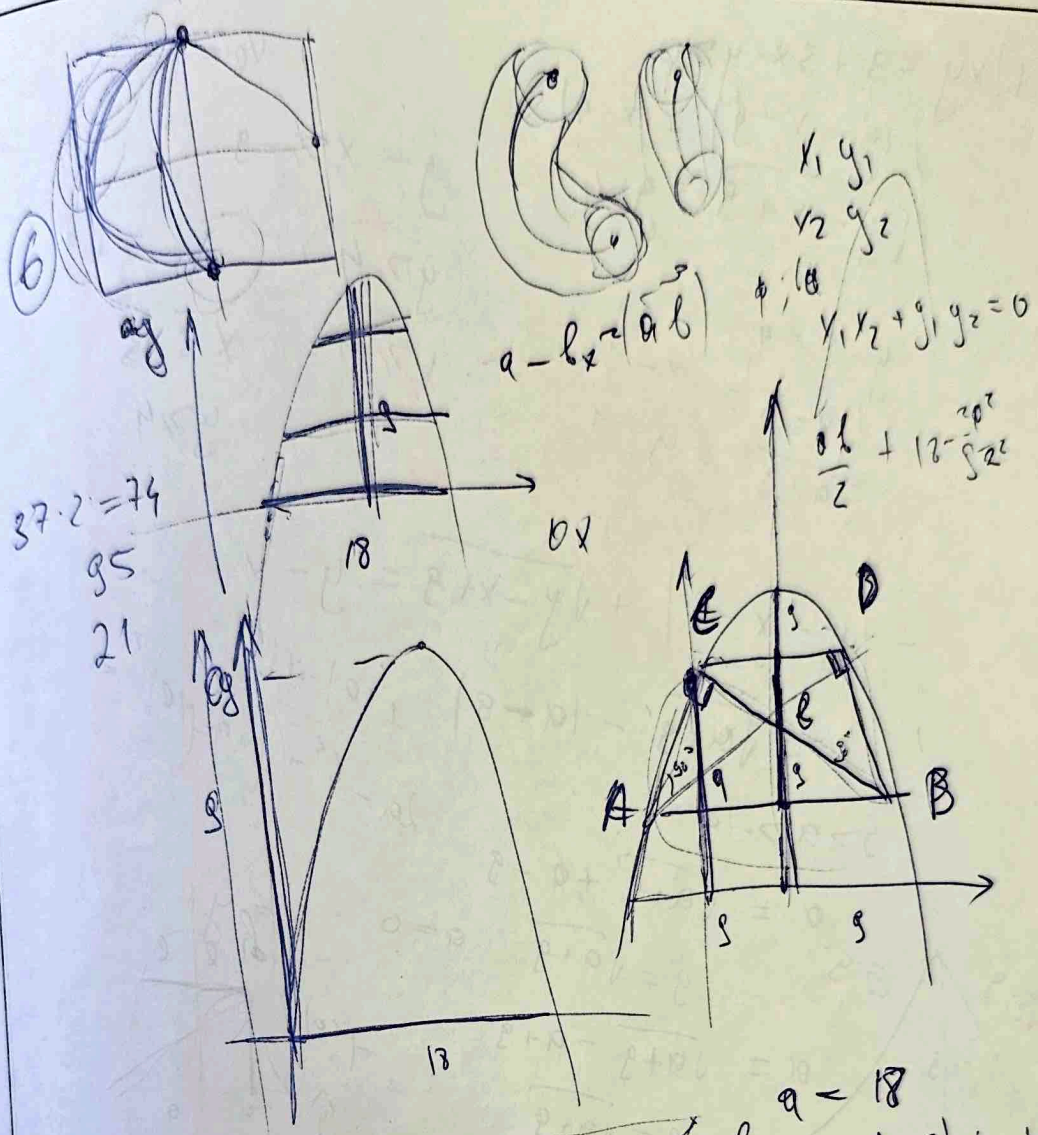
$$58$$

$$10$$

$$36$$

$$38$$

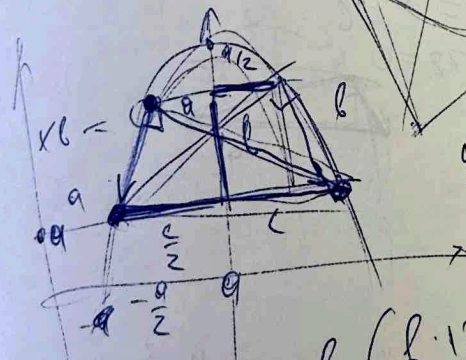
$$64$$



37.2 = 74
95
21

$$a = 18$$

$$\frac{ab}{2} + (18 - \frac{1}{18} a^2) + (18 - \frac{1}{18} b^2)$$



$$D = a - bx^2$$

$$x^2 = \frac{a}{b} \quad x = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b \cdot e = ab \left(b, 18 - \frac{2}{9} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = c^2$$

$$f(x) = 18 - \frac{2}{9} x^2$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = 18$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = 9$$

$$\sqrt{\frac{18}{b}} = 9$$

$$2 \cdot 9 = 9 \cdot 9 / b$$

$$b = \frac{2}{9}$$

$$a = 18 - \frac{2}{9} x^2$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2}, 18 - \frac{2}{9} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)$$

$$1.) \begin{cases} xy - 3 + 3x - y > 0 \\ |y - x - 9| = (x - 4) \\ |y - x + 9| = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 9 \\ |9 - 9| = x - 4 \\ \sqrt{a + 9} = y - 4 \end{cases}$$

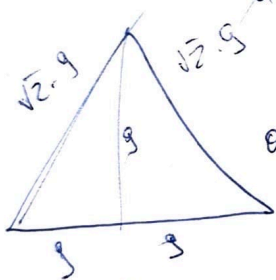
$$\begin{aligned} \sqrt{b} &= \\ y - x &> -9 \\ y &> 4 \\ x &\leq y + 9 \\ x &\geq 13 \\ y &> 4 \end{aligned}$$

$$-|y - x - 9| + \sqrt{y - x + 9} = y - x$$

$$a = \sqrt{a + 9} - |a + 9| + \frac{|a| - |b|}{2a - b^2 + (f'(a) - f'(b))^2}$$

$$9 > a > -9$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a + 9} + a - 9 \\ g &= \sqrt{a + 9} \quad a = 0 \end{aligned}$$

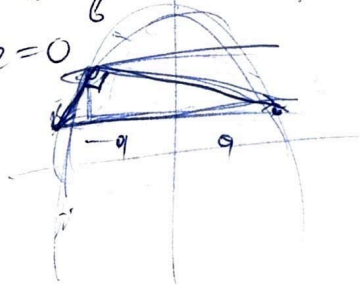
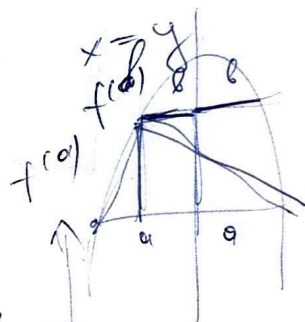


$$a = \sqrt{a + 9} - a + 9$$

$$2a - 9 = \sqrt{a + 9}$$

$$4a^2 - 18a + 81 = a + 9$$

$$4a^2 - 19a + 72 = 0$$



$$f(x) = 18 - \frac{2}{3}x^2$$

$$T: \left(b; 18 - \frac{2}{3}b^2 \right)$$

$$T: \left(a; 18 - \frac{2}{3}a^2 \right)$$

$$\left(a + b; \frac{2}{3}(a^2 - b^2) \right)$$

$$\left(-a + b; \frac{2}{3}(a^2 - b^2) \right)$$

$$(a+b) - (a^2 - b^2) + \frac{4}{3}(a^2 - b^2) = 0$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0 \\ a^2 - b^2 &= 3 \end{aligned}$$

$$-y + \frac{4}{3}y^2 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}$$

Задача 1

- 1) В каждой расстановке можно выбрать любого из двух вратарей $\times 2$
- 2) Пусть в одном случае вхождение универсалов в зщ. и нщ. будет следующим:

	зщ	нщ	
C_5^2	0	0	} $C_5^2 \cdot (C_6^3 + C_6^2 \cdot C_3^1 + C_6^1 \cdot C_3^2 + 1)$
	0	1	
	0	2	
C_5^1	0	3	} $C_5^1 \cdot (C_6^3 + C_6^2 \cdot C_3^1 + C_6^1 \cdot C_3^2 + 1)$
	1	0	
	1	2	} $C_5^1 \cdot (C_6^3 + C_6^2 \cdot C_3^1 + C_6^1 \cdot C_3^2 + 1)$
	2	1	
1	2	1	} $1 \cdot (C_6^2 \cdot C_3^1)$

$$2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 3 + 5 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 3 + 6 \cdot 3 \right) + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1 \right) \right) =$$

$$2 \cdot \left(45 + 5 \cdot \left(20 + 45 + 18 \right) + 10 \cdot \left(20 + 45 + 18 + 1 \right) \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(45 + 5 \cdot (83) + 10 \cdot (84) \right) =$$

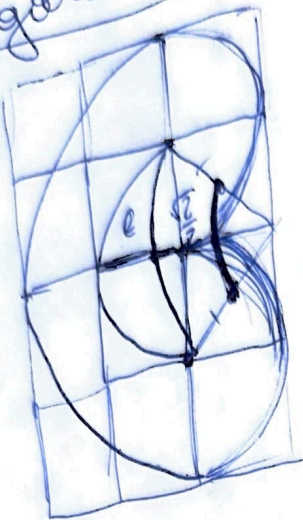
$$= 2 \cdot \left(\cancel{45} + 5 \cdot (9 + 83) + 840 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(5 \cdot (92) + 840 \right) = 2 \cdot \left(10 \cdot 46 + 840 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(460 + 840 \right) = 2 \cdot \left(1300 \right) = 2600$$

Ответ: 2600 способов

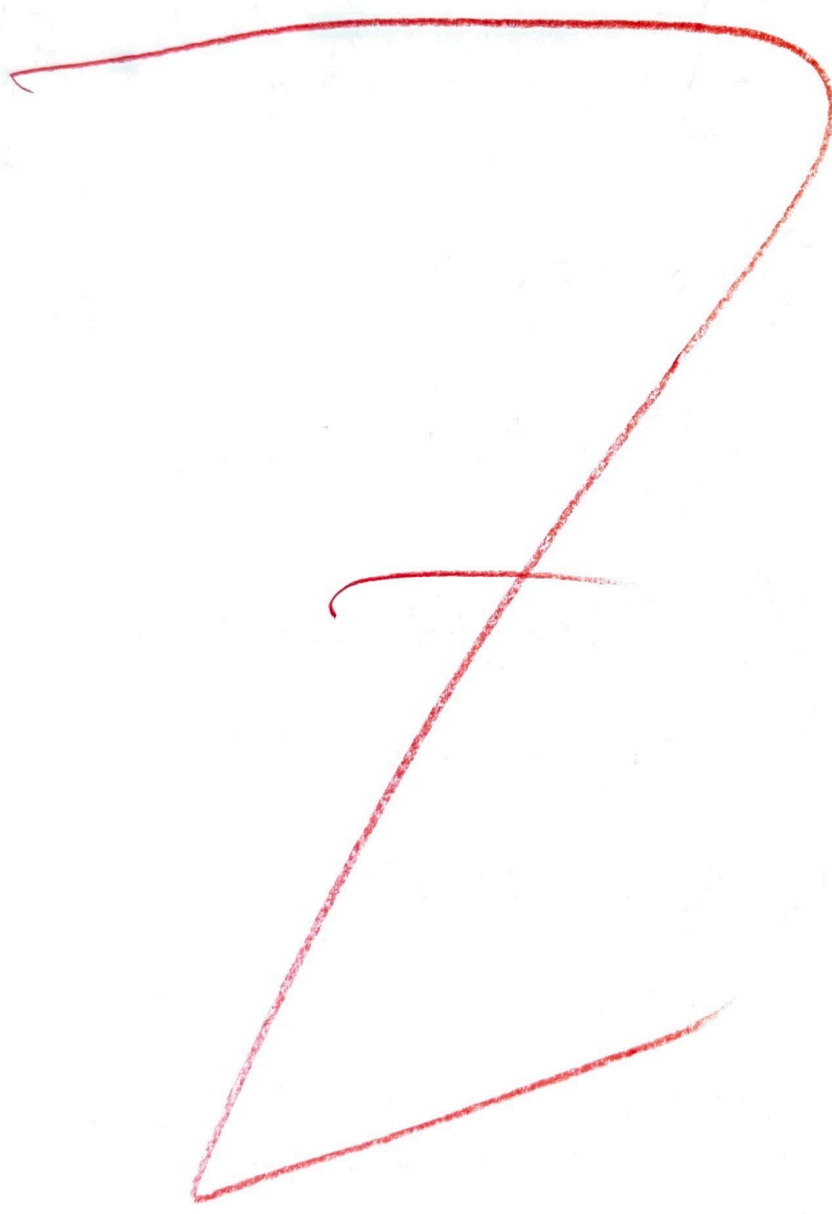
Задача 2



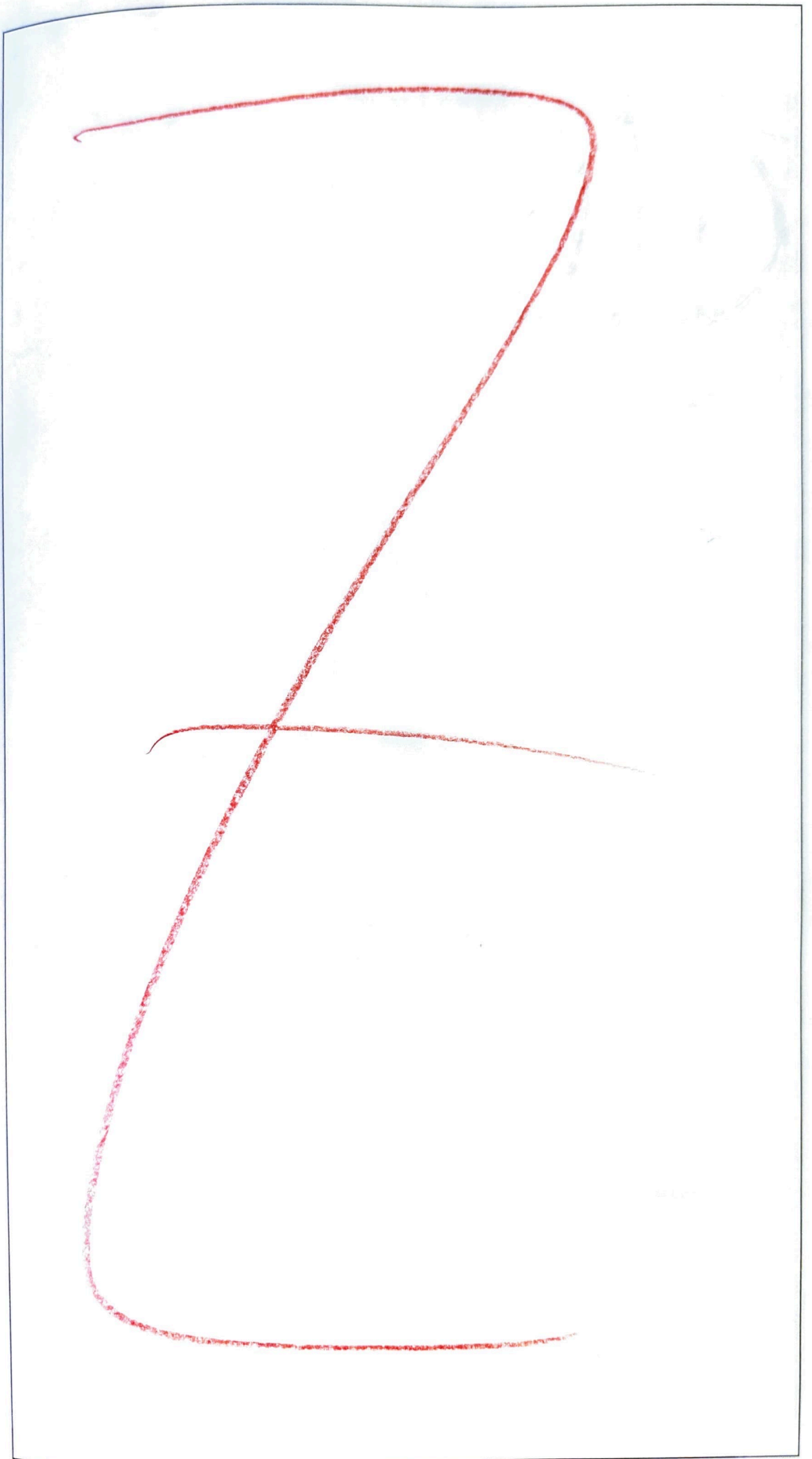
$$S = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} + \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot 2 =$$

$$= 2\pi + \pi = 3\pi$$

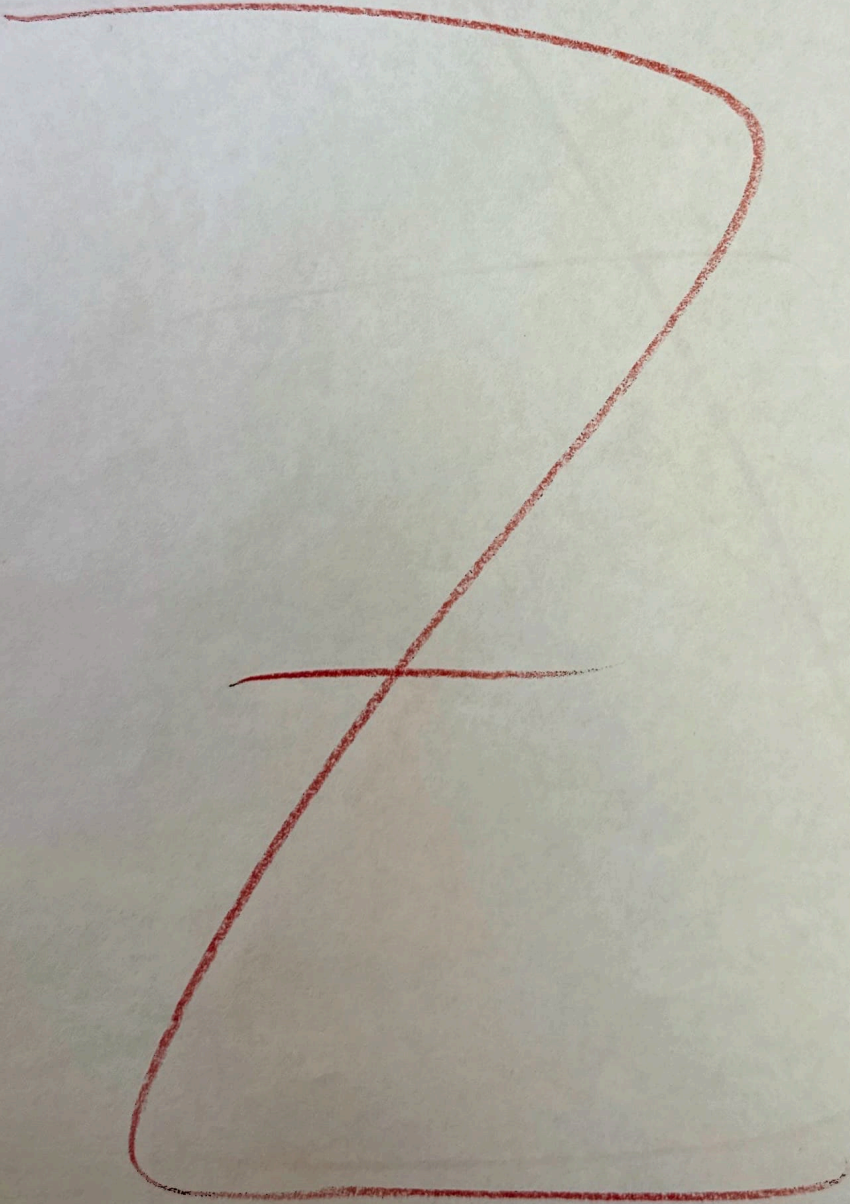
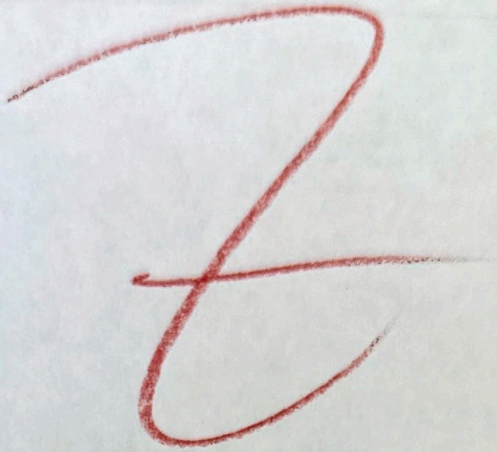
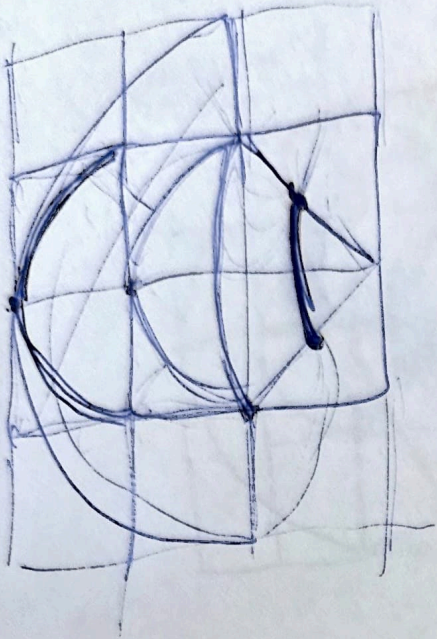
Ответ : 3π



ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!



$$\begin{cases} (xy-3+3x-y) |y-x-9| = (x-4) |xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \rightarrow y \geq 4 \end{cases}$$

1) $xy-3+3x-y > 0$: $x \rightarrow \frac{y+3}{y+3} = 1$

$$|y-x-9| = (x-4) \rightarrow x \geq 4$$

$$x(y+3) - (y+3) = |(y+3)(x-1)|$$

$y \geq 4$ - всегда

$$\Rightarrow y \geq 4 \quad x \geq 1$$

$$|y-x-9| = x-4 \rightarrow x \geq 4$$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4 \quad y \geq y-x \geq -9$$

$$\sqrt{y-x+9} - |y-x-9| = y-x$$

$$\sqrt{a+9} - |a-9| = 9$$

$$\sqrt{a+9} + a-9 = 9$$

$$a = 0$$

$$x = y$$

маче

$$\sqrt{a+9} = 2a-9$$

~~а+9~~

$$\sqrt{t} = 2t-27$$

~~47~~

118

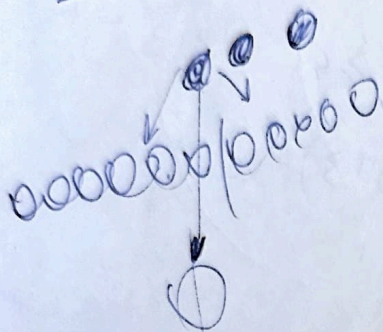
9

00

2

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	1	0	0	0	0	0	0	0
0	3	2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
1	2	3	0	0	0	0	0	0	1

00
2



Защ

ман

0
0
0
0

0

2

3

0

1

2

1

$$2 \cdot \left(-C_5^2 \cdot \left(C_6^3 + 2C_6^2 + C_6^1 + C_6^0 \right) + C \right) \cdot 12, \leftarrow$$

