сдано в 14.46 [illegible]

0 465703 750001

46-57-03-75
(38.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кошелевой Евгении Романовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
46-57-03-75	70	0	15	15	15	10	15	0	

46-57-03-75 (38.1)

|черновик|

1,5

$$\left(\frac{1}{m}-2\right)^2+a\left(\frac{1}{m}-2\right)+b=0$$

$$\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m}+4+\frac{a}{m}-2a+b=0$$

$$\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+4+\frac{a}{n}-2a+b=0$$

$$-a=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4 \qquad |m|\le 2$$

$$b=\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4$$

$$a+b=-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+4+\frac{1}{mn}-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4=$$

$$=\frac{1}{mn}-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}+8=\frac{1-3m-3n+8nm}{nm}$$

$$\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m}+\cancel{4}+\frac{a}{n}-\cancel{2a}+\cancel{b}=\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+\cancel{4}+\frac{a}{n}-\cancel{2a}+\cancel{b}$$

$$\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{a}{m}-\frac{a}{n}=0$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le 2 \qquad \frac{2bc}{2a}-\frac{2a^2}{2a}+\frac{2a}{2a}=$$

~~m+n≤2mn~~ $$=\frac{bc}{a}-a+1$$

$$a^2-4b$$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}$$

1,5 | 32

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge 3\sqrt[3]{abc}$$

100 | 320 | 0,0

10 / $\frac{10}{100}$ · 99,9 $\frac{999}{100}$

Черновик!

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3$$

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc}{abc}$$

$$\frac{bc-a^2+a}{2a}+\frac{ca-b^2+b}{2b}\geq 2\sqrt{\frac{}{4ab}}$$

$(bc-a^2+a)(ca-b^2+b)$

$c^2ab-a^2c+a^2c$

$$\frac{bc-a^2+a}{2a}+\frac{ca-b^2+b}{2b}=\frac{b^2c-a^2b+ab+ca^2-b^2a+ba}{2ab}=$$

$$=\frac{c(a^2+b^2)-ab(a+b)+2ab}{2ba}=1-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{ca}{2b}+\frac{cb}{2a}$$

$$\frac{ca}{2b}+\frac{cb}{2a}\geq 2\sqrt{\frac{c^2ab}{4ab}}=2\frac{c}{2}=c+1-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

$4,5+8,1$

$9,5+5=9,5$

$4,25+5=$

$9,25$

$$\frac{2-2+2}{2}$$

$1\,200$

$\cdot\ 14400$

6

86400

12

$\cdot 12$

24

12

144

$5+2+5=$

$6+5=11$ $\quad 5+1+5$

$5,5+5=10,5$

$5,25+5$

$5+x$

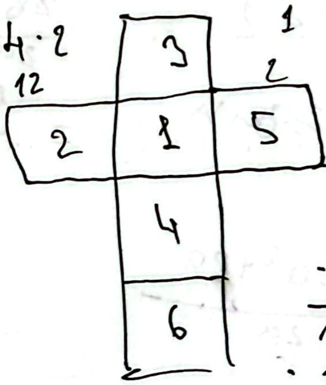
50 | 5·10

25·4·2

48 : 4 = 12

1 2 3

1 3 2 ?!



1 – 2, 3, 4, 5

2 – 3, 1, 4, 6

3 – 2, 1, 5, 6

4 – 1, 2, 5, 6

5 – 1, 4, 6, 3

6 –

$2\cdot3\cdot4\cdot5$

20

120 9

6 7 1 4 3

1 3 5 6 8 1 2

4 2

2

120

$\cdot 120$

14400

$\cdot 2$

28800

5 → 6

4 → 5

4 → 6

$\frac{1}{2}$

3 → 5

3 → 6

2 → 2 → 3

2 → 4

2 → 6

2 1 2 1 2 1 2 1 2

2 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1

46-57-03-75 (38.1)

Чистовик
Задача №3

Лист 1 из 1

1) Запишем каждое из слагаемых, как два одинаковых.

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}=\frac{bc-a^2+a}{2a}+\frac{bc-a^2+a}{2a} \quad (1)$$

$$\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}=\frac{ca-b^2+b}{2b}+\frac{ca-b^2+b}{2b} \quad (2)$$

$$\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{ab-c^2+c}{2c}+\frac{ab-c^2+c}{2c} \quad (3)$$

2) Теперь попарно произведём такие действия. Попарно - значит 1 со 2; 2 с 3; 3 с 1.

$$(1.3.)\ \frac{bc-a^2+a}{2a}+\frac{ab-c^2+c}{2c}=\frac{bc^2-a^2c+ac+a^2b-ac^2+ac}{2ac}=$$

$$=1+\frac{bc}{2a}+\frac{ab}{2c}-\frac{a}{2}-\frac{\cancel{b}c}{2}$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом: $(a;b;c>0$ (по усл.))

$$\frac{bc}{2a}+\frac{ab}{2c}\geq 2\sqrt{\frac{b^2\cancel{ca}}{4\cancel{ac}}}=2\frac{b}{2}=b \Rightarrow$$

$$(1;3.)\geq 1+b-\frac{a}{2}-\frac{c}{2}$$

Аналогично:

$$(1;2)\geq 1+c-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

$$(2;3)\geq 1+a-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}$$

3) $$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=(1;2)+(1;3)+(2;3)\geq 3+a+b+c-2\frac{a}{2}-2\frac{b}{2}-2\frac{c}{2}=$$

$$=3$$

$a=b=c=1$ Выражение принимает значение 3.

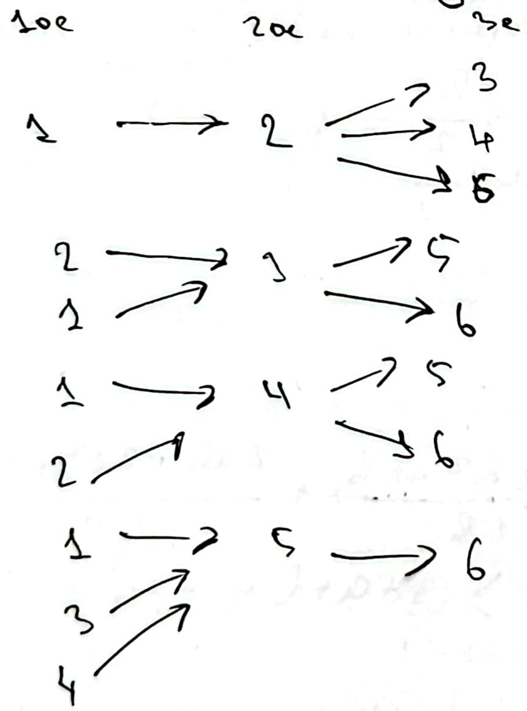
Ответ: 3

Чистовик
Задача №2

Лист 1 из 1

1) Рассмотрим грани кубика, и поймем, что при перекатывании на соседнюю сторону мы можем получить любое число от 1 до 6, кроме того что написано на данной грани и 7 − это число (т.к. сумма на противоположных гранях равна 7).

2) Рассмотрим, какое число может стоять на втором месте нашей трёхзначной последовательности. Очевидно 1 быть не может, т.к. на первом месте будет число > 1 и последовательность не будет возрастающей. Аналогично 6 не может стоять на втором месте. Тогда рассмотрим случаи 2−5.



3 варианта

4 варианта

4 варианта

3 варианта

Всего получилось 14 различных возрастающих последовательностей.

Ответ: 14

Чистовик
Задача 4

Лист 1 из 3

1) Разделим всех участников (в том числе пустое кресло) на две группы:
1ая – 5 девочек; 2ая – знайчика, учительница, пустое кресло.
Теперь понятно, что пересаживая участников одной группы условие о „несоседстве" девочек не будет меняться (а будут лишь отличаться рассадки.
Так что заменим людей на цифры 1 и 2.
Теперь будем составлять последовательность из 5 единиц и 5 двоек, так чтобы никакие две единицы не стояли рядом.

2). 1 2 1 – расстоянием будем называть кол-во шагов необходимое для перемещения от одной до другой цифры. (здесь расстояние между единицами равно 2).
Заметим, что расстояние между любыми двумя единицами не меньше 2. А расстояние между крайними числами равно 9.
Соседние – два одинаковых числа, между которыми нет такого же как они числа (т.е. 1 2 1 соседние; 1 2 1 2 1 не соседние)
Пусть между какими-нибудь соседними единицами расстояние хотя бы 4. Тогда расстояния между оставшимися тремя и этим куском (из двух единиц расстояние между которыми хотя бы 4) не меньше чем 2+2+2.
Т.е. всего не меньше 10, (а между крайними числами 9, значит ~~какой~~ ряд состоит не менее чем из 11 чисел, а по условию их 10. =)
=) Расстояние между любыми соседними единицами или 2 или 3.

Аналогично предыдущим рассуждениям рассмотрим случай, когда существует ~~хотя бы~~ две пары соседних единиц между которыми расстояние ровно 3.
Три „куска" (1; 1221; 1221) между любыми двумя „кусками" расстояние не меньше 2, значит всего не меньше 3+3+2+2 = 10, а по условию их 9. Больше чем две пары быть не может. Т.к. единиц всего 5.
И так, мы получили, что
(1) Единицы и двойки чередуются (расстояние между любыми соседними единицами ровно 2)
(2) Есть ровно две двойки стоящие рядом (есть только одна пара соседних единиц расстояние между которыми 3).

3) (1) Пронумеруем все места 1; 2; 3...; 10.
Существует всего две таких расстановки чисел. Либо все единицы стоят на четных местах, либо все на нечётных.
Рассадить теперь 5 разных людей на 5 разных мест можно $120 = 5!$ способами. Остальных 5 участников второй группы тоже можно рассадить на оставшиеся места 5! способами. Т.е. всего $120 \cdot 120 \cdot 2$ ~~= 28800~~
~~(2) Заметим что две двойки не могут быть крайними (на оставшиеся 8 мест не рассадить 5 девочек, что бы между любыми было хоть одно место). Обозначим ~~первое~~ ~~ч~~ ~~чисел~~ первую двойку в этой паре и посмотрим, что она может нахо~~

Чистовик
Задача №4

Лист 2 из 3

Чистовик
Задача №4

Лист 3 из 3

(2) Обозначим первое число из пары двоек и будем смотреть на его возможные расположения. Заметим, что оно не может стоять на 10 (т.к. вторая двойка будет 11.) и не может стоять на нечётных местах. (т.к. и слева и справа от двоек останется четное кол-во мест, а значит единицу туда можно будет вставить не больше половины (так чтоб никакие две не стояли рядом). Всего мест останется 8, не больше чем 4 единицы, а их ~~4~~ 5 => существует 4 различных перестановки чисел (когда первая двойка стоит на местах с номерами 2, 4, 6, 8). Мы опять определяем 5 мест где может быть переставлены люди 120 способами, и на оставшиеся места 120 способами могут быть усажены люди из второй группы. И таких 4 варианта. Т.е. всего 120 · 120 · 4

4) Тогда всего различных способов пересадки будет 120 · 120 · 6 = = 86400

Ответ: 86400

Черновик

$\sin(15)^2 \cdot \cos(15)^2$

$\cos 15^2 = 1 - \sin(15)^2$

$(1 - \sin(15)^2) \cdot \sin(15)^2$

$\sin^2(15)^4 - \sin^4(15)$

$\frac{ab \sin 15}{2} + \frac{cd \sin 75}{2} = 5$

$ab \sin 15 + cd \sin 75 = 10$

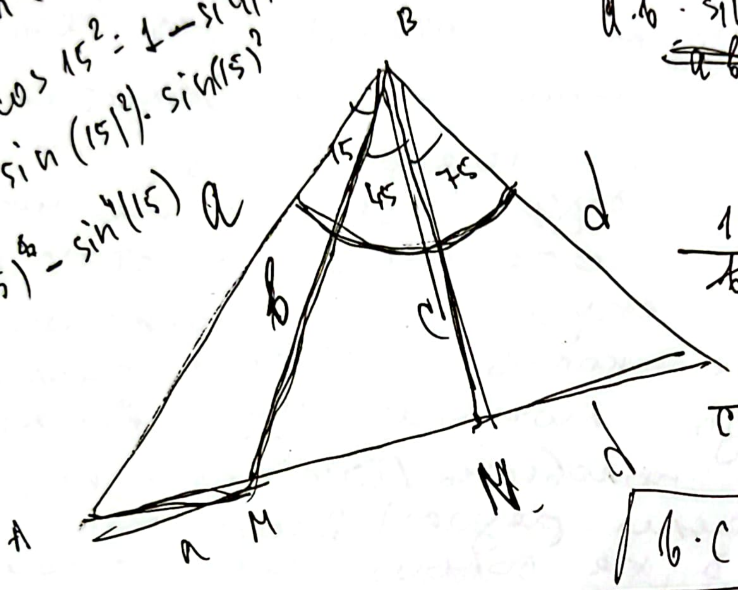
$abcd \sin 15 \cdot \sin 75 = 12$

$a \cdot b \cdot \sin \alpha$

$\cancel{ab \sin 15}$

$a = \frac{12}{bcd \sin 15 \sin 75}$

$\frac{12 \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{\sin 15}}{\cancel{b} c \cancel{\sin 15} \sin 75}$



$\frac{12}{c \cdot \sin 75} + \frac{12}{b \cdot \sin 15} = 10$

$\boxed{b \cdot c}$

$\triangle ABM$ и $\triangle MBC$

3,4 5

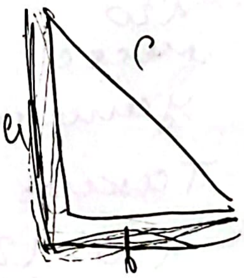
3,5 · 15 · 0,5 3

5 + 5 − 1,5

= 5 5 − 0,75

$\frac{AB \cdot BM \cdot \sin(15)}{2} + \frac{NB \cdot B(\sin 75)}{2} =$

$AB \cdot BM \sin(15) + NB \cdot BC \frac{(\cos 15)}{\cancel{\sin 75}} = 10$ и



$\frac{AB \cdot BM \cdot NB \cdot BC \cdot \sin(15) \cdot \cos(15)}{5 + 5 - 0{,}75} = 12$

5 10

$x^2 + 5x + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$

$a + b = 5$

$a \cdot b = 3$ $a \cdot b \cdot \sin 15 = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$a = \frac{3}{b}$ $2ab \cdot \sin(15) = 5 + \sqrt{13}$

$b =$

$\frac{3}{b} + b = 5$ $\sin$

$a \sin 15 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2b}$

$b + b^2 = 15$

$\frac{12b \sin 15 + 12c \sin 75}{cb \cdot \sin 75 \cdot \sin 15} = 10$

$\overset{6}{\cancel{12}}(b \sin 15 + c \sin 75) = \overset{5}{\cancel{10}} cb \sin 75 \cdot \sin 15$

черновик!

$$cb \cdot = \frac{6}{5} \frac{b\sin 15 + c\sin 75}{\sin 75 \cdot \sin 15}$$

$$\frac{12}{a \cdot \sin 75} + \frac{12}{a \cdot \sin 15}$$

$$ab\sin(15) + cd(\cos 15) = 10$$

$$abcd \sin(15) \cos(15) = 12$$

$$bc = \frac{12}{ab \sin(15)\cos(15)} = \frac{12 \cdot 2b \cdot 2c}{(5+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})}$$

$$\frac{ab \sin 15}{2} = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$ab \sin(15) = 5+\sqrt{13}$$

$$cd \cos(15) = 5-\sqrt{13}$$

$$ab \sin(15) + cd \cos(15) = 10$$

$$a = \frac{5+\sqrt{13}}{b \sin(15)}$$

$$d = \frac{5-\sqrt{13}}{c \cos(15)}$$

$$a \cdot d \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{(5+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})}{cb \sin 15} =$$

$$= 5 + cb \frac{\sqrt{2}}{2}$$

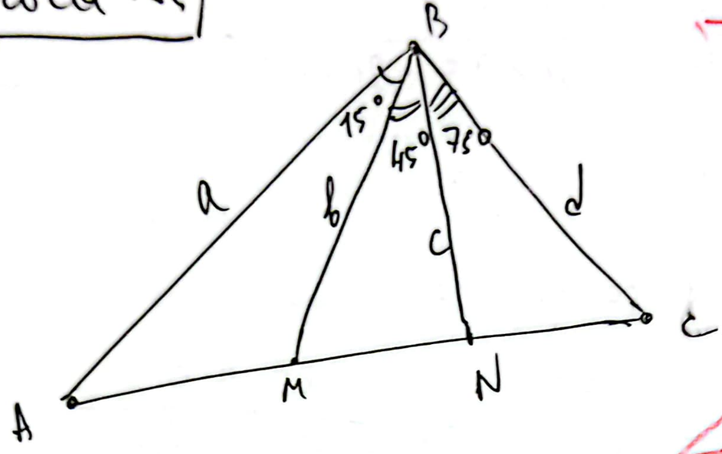
1,5 | 300 256

15000 | 5120 — 0,00

1,5 | 2560 — 15000 | 0,0

Чистовик задача №5

Лист 1 из 2



1) $\frac{ab\sin(15)}{2} + \frac{cd\sin(75)}{2} = 5$ $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC}$

$\frac{abcd\sin(15)\sin(75)}{4} = 3$ $S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC}$

2) $S_{\triangle ABM}$ и $S_{\triangle NBC}$ – являются корнями уравнения

$x^2 - 5x + 3 = 0$

$x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$

Не умоляя общности будем считать, что $x_1 = S_{\triangle ABM}$; $x_2 = S_{\triangle NBC}$

3) $S_{\triangle ABC} = 5 + \frac{bc}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{ad \cdot \sin(135)}{2} = \frac{ad}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\frac{ad \cdot \sqrt{2}}{4} = 5 + \frac{bc \cdot \sqrt{2}}{4}$

$\sqrt{2}(ad - bc) = 20$

$ad - bc = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$

$ab = \frac{5+\sqrt{13}}{\sin(15)}$; $bc = \frac{5-\sqrt{13}}{\sin(75)}$

Чистовик
Задача №5

Лист 1 из 2

$$\begin{cases} ad = 10\sqrt{2} + bc \\ b = \dfrac{5+\sqrt{13}}{\sin(15)a} \\ c = \dfrac{5-\sqrt{13}}{\sin(75)d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad = 10\sqrt{2} + \dfrac{25-13}{ad\sin(15)\sin(75)} \\ b\ldots \\ c\ldots \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2d^2\sin(15)\cancel{\cdot}\sin(75) = 10\sqrt{2}ad\sin(15)\sin(75) +$
$+12$

$ad = x$; $\sin(15)\cdot\sin(75) = k$

$x^2k\cancel{\sin} - 10\sqrt{2}kx - 12 = 0$

$D = 10^2\cdot 2\cdot k^2 + 48 = 200k + 48$

$x_{1,2} = \dfrac{10\sqrt{2}k \pm \sqrt{200k^2+48}}{} = 5\sqrt{2}k \pm \cancel{2}\sqrt{50k^2+12}$

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{ad\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}(5\sqrt{2}\cdot\sin^2(15)\cdot\cos(15) \pm \sqrt{50\cdot\sin^2(15)\cos^2(15)+12})}{4}$

Чистовик
Задача №6

Лист 1 из 1

а) Запишем кол-во воды в кувшине как $5-1{,}5$ ~~Тогда~~ (т.к. изначально было 7, и половину выпили). Тогда после следующего доливания будет

$5+5-1{,}5$, а выпьют $5-\frac{1{,}5}{2}$ и столько же останется т.е.

в кувшине всегда будет оставаться

$5-\frac{x}{2}$; ~~$\frac{x}{2}$ - убавляю~~ потом

$\frac{x}{4}$; $\frac{x}{8}$; $\frac{x}{16}\ldots \to$ стремится к нулю

т.е минимальный объем кувшина достаточно 10 литров, т.к. 5 никогда не останется (т.к. стремится к нулю) и 5 еще дольют.

б) 99,9% от 10 л это 9,99 литров

значит $\frac{1{,}5}{2^{k-1}} \leq 0{,}1$, где k - день, если 3,5 литров стало в 1 день

$1{,}5 \leq 0{,}01 \cdot 2^{k-1}$

$3 \leq 0{,}01 \cdot 2^{k}$

$300 \leq 2^{k}$

$k \geq 9$

Ответ: 10 литров; на 9 день