0 043124 540007

04-31-24-54
(39.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Крамарного Петра Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
04-31-24-54	72	12	0	12	0	12	12	12	12

04-31-24-54 (39.6)

№1 Чистовик 1 из 6

Заметим, что т.к универсал не может быть вратарём то варантов выбрать вратаря это $C_3^1 = 3$

① Пусть ни один универсал не был выбран в качестве защитника. Тогда вариантов выбрать защитников $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Тогда нападающих мы можем выбирать и из нападающих и из универсалов т.е. вариантов $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$. Тогда в этом случае вариантов

$3 \cdot 10 \cdot 84 = 252 \cdot 10 = 2520$

② Пусть ровно один универсал выбран в качестве защитника. Тогда вариантов выбрать защитников $C_5^1 \cdot C_3^1 = 3 \cdot 5 = 15$. Тогда нападающих можно выбирать из нападающих и двух оставшихся универсалов т.е. вариантов $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. Тогда в этом случае вариантов $3 \cdot 15 \cdot 56 = 2520$

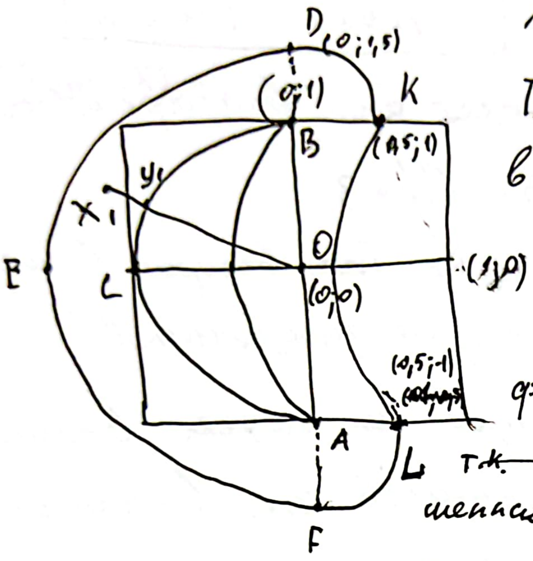
③ Пусть оба защитника выбраны из универсалов. Тогда вариантов выбрать защитников $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$. Тогда нападающих можно выбирать из нападающих и оставшегося универсала. т.е. вариантов $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$

Тогда в этом случае вариантов $3 \cdot 3 \cdot 35 = 315$

Тогда всего вариантов $2520 + 2520 + 315 = 5040 + 315 = 5355$

Ответ: 5355

№2 ~~черновик~~ Черновик 1



Проведем дугу окружности с центром в $(0;0)$ проходящую через $(0;1,5)$ и $(0;-1,5)$ и $(-1,5;0)$

Заметим, что любая точка в (образованной дугами) фигуре DEFACBV будет запрещена ~~т.к. ее.~~ Пусть это не так и есть незапрещенная точка X_1. тогда проведем отрезок из X_1 в $(0;0)$. Он пересечет дугу AB в какой-то точке Y. Заметим что $Y_1O = OB = 1$ т.к. Y_1 и B лежат на окружности с центром в O

$X_1O \leq DO = 1,5$ т.к. X_1 лежит внутри окружности с радиусом DO

тогда $X_1Y = X_1O - Y_1O \leq 0,5$, а значит когда Y_1 ~~раск~~ превратится в круг радиуса 0,5 она запретит X_1

Также все точки внутри фигур BDK и ALF (образованных дугами) будут запрещены (DK это дуга окружности с центром в B и радиусом 0,5, LF это дуга окружности с центром в A и радиусом 0,5). ~~т~~

Пусть точка X_2 не запрещена. но т.к. ~~Х~~ X_2 лежит либо в BDK либо в ALF расстояние от X_2 до B или до A меньше либо равно радиуса окружностей т.е. 0,5, а значит когда A и B превратятся в круги они их запретят.

Если провести дугу окружности с центром в $(1;0)$ ~~через~~ и проходящую через K и L то все точки в фигуре BALK (образованную двумя дугами) будут запрещены.

04-31-24-54 (39.6)

№3 Чистовик 2 из 6

Заметим, что $|x^3+y^3-19| \geq 0$ т.к. модуль числа не отрицательный

Аналогично $|x^2y+xy^2+6| \geq 0$

~~$x|y|-y|x| \geq -xy-xy=-2xy$ т.к.~~

$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} \geq 0$ т.к. если $y \geq 0$ то $x|y|=xy$ и $\frac{x|y|}{xy}=1$

если $y \leq 0$ то $x|y|=-xy$ и $\frac{x|y|}{xy}=-1$

т.е. $\frac{x|y|}{xy} \geq -1$

Аналогично $\frac{y|x|}{xy} \leq 1$

Тогда $\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} = \frac{x|y|}{xy} - \frac{y|x|}{xy} + \frac{2xy}{xy} \geq -1-1+2=0$

Тогда $|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2+6=0 \\ \frac{x|y|}{xy}-\frac{y|x|}{xy}+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ xy(x+y)+6=0 \\ y<0 \text{ т.к } \frac{x|y|}{xy}=-1 \\ x>0 \text{ т.к } \frac{y|x|}{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=19-y^3 \\ xy(x+y)=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=19 \\ (x+y)xy=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-xy+y^2}{xy}=-\frac{19}{6} \\ (x+y)xy=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1=-\frac{19}{6} \ (*) \\ (x+y)xy=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases}$$

Пусть $t=\frac{x}{y}$

Тогда $(*) \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}-1=-\frac{19}{6} \Leftrightarrow$

$\sqrt{D}=\sqrt{13^2-4\cdot36}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t+\frac{19}{6}t+1 \\ t\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2+13t+6=0 \\ t\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{-13\pm5}{12} \\ t\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2} \\ t=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Вернемся к x и y

~~$\frac{x}{y}=-\frac{3}{2}$~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{3}{2} \\ (y\cdot\frac{x}{y}+y)\cdot y\cdot\frac{x}{y}\cdot y=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{2}{3} \\ (y\cdot\frac{x}{y}+y)\cdot y\cdot\frac{x}{y}\cdot y=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{3}{2} \\ -(-\frac{3}{2}y+y)\cdot y^2\frac{3}{2}=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{2}{3} \\ -(-\frac{2}{3}y+y)\,y^2\frac{2}{3}=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4}y^3=-6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot y^3=6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Чистовик 4 из 6

№5

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ac-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{bc-a^2}{a}+\frac{ac-b^2}{b}+\frac{ab-c^2}{c}+3=$$

$$=\frac{b^2c^2-a^2bc+a^2c^2-b^2ac+a^2b^2-c^2ab}{abc}+3=\frac{2b^2c^2-2a^2bc+2a^2c^2-2b^2ac+2a^2b^2-2c^2ab}{2abc}+3=$$

$$=\frac{(b^2c^2+a^2c^2-2c^2ab)+(b^2c^2+a^2b^2-2b^2ac)+(a^2b^2+a^2c^2-2a^2bc)}{2abc}+3 \quad (*)$$

$b^2c^2+a^2c^2-2c^2ab\geq 0$ т.к $b^2c^2+a^2c^2\geq 2\sqrt{b^2a^2c^4}=2c^2ab$

Аналогично $b^2c^2+a^2b^2-2b^2ac\geq 0$

$a^2b^2+a^2c^2-2a^2bc\geq 0$

т.к. $a,b,c>0$ то $2abc>0$

и значит $(*)\geq 0+3=3$

при $a=b=c=1$ $(*)=3$ $\left(\frac{2-2+2}{2}+\frac{2-2+2}{2}+\frac{2-2+2}{2}=1+1+1=3\right)$

Ответ: 3

№6

1 час 25 минут это 85 минут

~~Знач~~ ~~Итак~~ $17\cdot 6=102>85$. Значит по AC он проехал не более 5 раз

① Если он проехал 5 раз: $17\cdot 5=85$

Т.к. он не пользовался маленькими окружностями то т.к. 5 нечетное число после того как он 5 раз проехал AC о окажется в C а такого быть не может

② Если он проехал 4 раза:

$85-17\cdot 4=17$ но 17 не представляется в виде суммы 7 и 11 т.к.

$11\cdot 2>17$ $11\cdot 1+7\cdot 2>17$ $11\cdot 1+7\cdot 1<17$ $11\cdot 0+7\cdot 3>17$ $11\cdot 0+7\cdot 2<17$

③ Если он проехал 3 раза:

$85-17\cdot 3=34$, но 34 не представляется в виде суммы 7 и 11 т.к.

$11\cdot 4>34$ $34-11\cdot 3=1\not\vdots 7$ $34-11\cdot 2=12\not\vdots 7$ $34-11\cdot 1=23\not\vdots 7$ $34\not\vdots 7$

④ Если он проехал 2 раза:

$85-17\cdot 2=51$

$11\cdot 5>51$ $11\cdot 4+7=51$ $51-11\cdot 3=18\not\vdots 7$ $51-11\cdot 2=29\not\vdots 7$ $51-11=40\not\vdots 7$ $51\not\vdots 7$

$85=17\cdot 2+7+11\cdot 4$

Заметим, что сколько раз автомобиль уехал из A, столько же

Чистовик 5 из 6

должен приехать, а значит суммарное кол-во перемещений по АС и по АВ должно быть четным. В данном случае из $2+1=3$ нечетное а значит такого не может быть

⑤ Если он проехал 1 раз:

$85-17=68$

$11\cdot7>68$ $\quad 68-11\cdot6=2\not\vdots\,7$ $\quad 68-11\cdot5=13\not\vdots\,7$ $\quad 68-11\cdot4=24\not\vdots\,7$ $\quad 68-11\cdot3=35=7\cdot5$

$68-11\cdot2=46\not\vdots\,7$ $\quad 68-11=57\not\vdots\,7$ $\quad 68\not\vdots\,7$

Значит $85=17+7\cdot5+11\cdot3$

Он мог проехать $A\xrightarrow{17}C\xrightarrow{11}B\xrightarrow{11}C\xrightarrow{11}B\xrightarrow{7}A\xrightarrow{7}B\xrightarrow{7}A\xrightarrow{7}B\xrightarrow{7}A$

~~Тогда он проехал~~

Найдем длину дуги АС.

$|\breve{AB}|$ (длина дуги AB) $=15 \Rightarrow |AB|=\frac{30}{\pi}$ км (т.к. $|\breve{AB}|=\frac{\pi\cdot|AB|}{2}$)

$|\breve{BC}|=25\Rightarrow |BC|=\frac{50}{\pi}$ км

Значит $|AC|=\frac{80}{\pi}\Rightarrow|\breve{AC}|=\frac{\pi\cdot|AC|}{2}=40$ км

Тогда он проехал $40+3\cdot25+5\cdot15=40+75+75=190$ км

⑥ Если он проехал 0 раз:
$85-17\cdot0=85$

$11\cdot8>85$ $\quad 85-11\cdot7=8\not\vdots\,7$ $\quad 85-11\cdot6=19\not\vdots\,7$ $\quad 85-11\cdot5=30\not\vdots\,7$ $\quad 85-11\cdot4=41\not\vdots\,7$

$85-11\cdot3=52\not\vdots\,7$ $\quad 85-11\cdot2=63=7\cdot9$ $\quad 85-11=74\not\vdots\,7$ $\quad 85\not\vdots\,7$

$85=11\cdot2+7\cdot9$.

Т.к как сказано в 4 случае суммарное кол-во перемещений по АС и АВ должно быть четным, но это нечетное значит такого не может быть

Ответ: 190 км.

№8

Рассмотрим число $A=\underbrace{9\ldots\ldots9}_{100}$ Заметим, что это самое большое 100-значное число. Докажем, что $S(A)=S(m\cdot A)$ для любого m $(1\le m\le A)$

Пусть $m=\overline{a_1a_2\ldots a_k}=a_1\cdot10^{k-1}+a_2\cdot10^{k-2}+\ldots+a_{k-1}\cdot10+a_k$

$m\cdot A=m\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{100}-m$ $\quad S(m\cdot A)=S(m\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{100}-m)$

Чистовик 6изб

Заметим, что в m не более 100 цифр(к/на) значит

$S(m\cdot 10^{100} - m) = S((m-1)\cdot 10^{100} + (\underbrace{9\dots9}_{100} - m+1)) =$

$= S(m-1) + S(\underbrace{9\dots9}_{100} - m+1) = S(m-1) + S(\underbrace{9\dots9}_{100} - (m-1)) =$

(т.к. $m-1 < \underbrace{9\dots9}_{100}$ и перехода через разряд не будет)

$= S(m-1) + S(\underbrace{9\dots9}_{100}) - S(m-1) = S(A)$

т.к. в любом разряде m-1 стоит не более чем 9 и при вычитании, из каждого разряда A вычетается соответствующий разряд m-1 без перехода через десяток а значит сумма цифр уменьшится на S(m-1)

Тогда A ~~работает~~ удовлетворяет условию и A самое большое такое число т.к A самое большое 100-значное число.

Ответ: $\underbrace{9\dots9}_{100}$

Чистовик зад 6

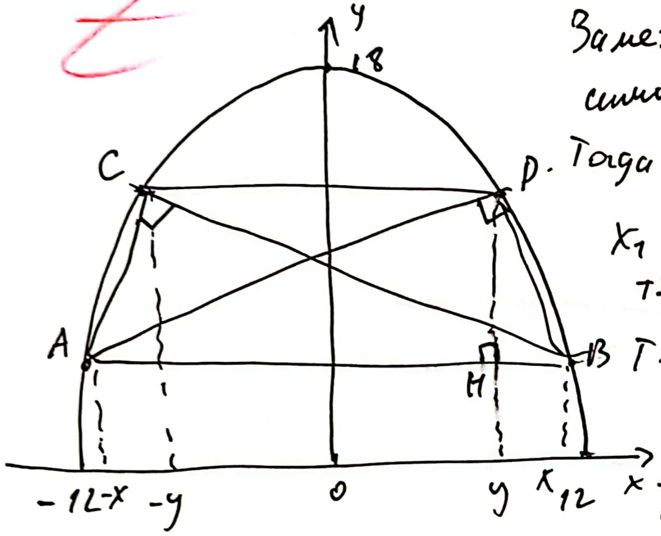
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4}y^3 = -6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}y^3 = 6 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \\ y^3 = -8 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \\ y^3 = 27 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \\ y = -2 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Такого быть не может т.к. если $y<0$ то и $y^3<0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ответ: $y=-2$, $x=3$

№ 7



Заметим, что график $y = a - bx^2$ ($f(x)$) симметричен относительно Ox т.к. $x^2 = (-x)^2$. Тогда пусть корни x_1 и x_2, значит $x_1 + x_2 = 24$ (т.к. ширина 24) и $x_1 = -x_2$ т.к. график симметричный.

Т.к. высота 18 то $18 = a - b \cdot 0^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 18$

Т.к. AB параллельны полу то если B имеет координату x то A имеет координату $-x$ (т.к. график симметричный.) Аналогично ~~...~~ D и C имеют координаты y и $-y$ соответственно

Т.к. $\triangle ADB$ прямоугольный то $DH^2 = AH \cdot BH \Rightarrow$

$DH^2 = (x-y)\ (x+y) = x^2 - y^2$

$DH =$ ~~...~~ $f(y) - f(x) = a - by^2 - a + bx^2 = b(x^2 - y^2)$

Найдем b. т.к. $f(12) = 0$ то $18 - b \cdot 144 = 0 \Rightarrow b = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$

Тогда $DH^2 = b^2(x^2-y^2)^2 = x^2 - y^2$

$\Downarrow$

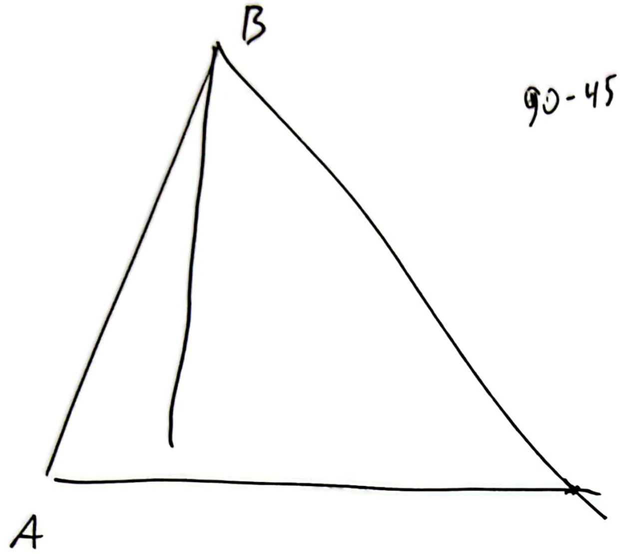
$\frac{1}{64}(x^2-y^2)^2 = (x^2-y^2)$ Пусть $x^2 - y^2 = t$ тогда

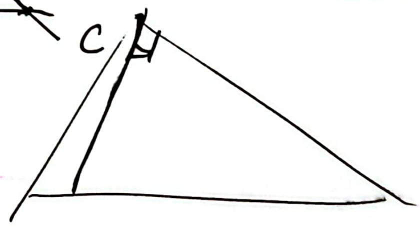
$\frac{1}{64}t^2 = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=64 \end{array}\right.$ Тогда $\left[\begin{array}{l} DH = \frac{1}{8}t = 0 \\ DH = 8 \end{array}\right.$ т.к. были не совпадают $DH = 8$

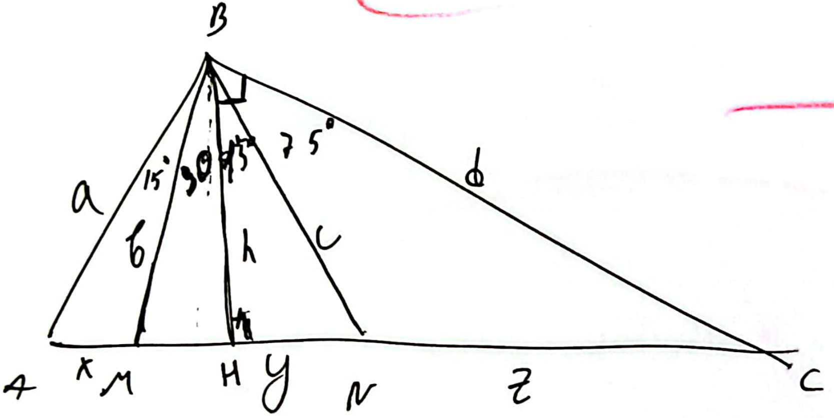
Ответ: 8

Черновик

$90-45-x = 180-135^\circ - x$







5

$\frac{1}{2}h\cancel{x}+\frac{1}{2}hz=5$ c 3

$25=12=13$

$\frac{1}{4}h^2xz=3$

$x^2-5x+3=0$

$\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1}{2}ab\sin15^\circ+\frac{1}{2}cd\cos15^\circ=5$

$\frac{1}{4}abcd\cdot\sin15\cdot\cos15=\frac{1}{8}abcd=3$

$abcd=24$

$\frac{1}{2}ab\cdot\sin15+\frac{1\ 24}{2\cdot ab}\cos15=5$

$b^2c^2 - a^2bc + a^2c^2 - b^2ac + a^2b^2 - c^2ab \geq 0$

Черновик

$16 - 4 + 4 - 8 + 4 - 8 = 8 - 4 - 4 = 0$

$a < b, c$

$a \leq b \leq c$

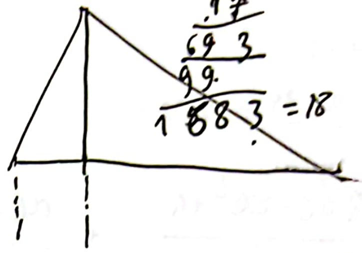
$a^2c^2 - b^2ac$

198

$\underbrace{b^2c^2 - a^2bc} > 0$

a^2c^2

$\times \begin{array}{r} 99 \\ 17 \\ \hline 693 \\ 99 \\ \hline 1683 \end{array} = 18$



$a^2 \leq bc$

$b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2abc^2$

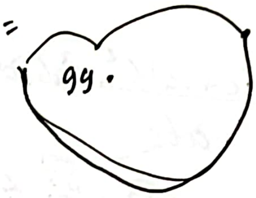
$S(2x) = S(x)$

85 мин

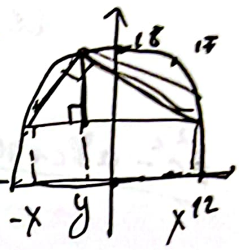
$99 \cdot 2 = 198$

$99 \cdot 17 =$

$= 90 \cdot 17 + 9 \cdot 17 =$



$30 + 21 +$



17 ·

$90 + 63 = 153$

$\begin{array}{r} 1530 \\ \hline 1683 \end{array}$

$17 \cdot 4 +$

$17 \cdot 3 +$

$34 = \cancel{11} + 23$

778

$51 = 44 + 7 = \cancel{33+}$

66 19

55 30

44 41

33 52

22 63

11 74

$\frac{3}{2}$

$17 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 7$

$68 = 33 + 35$

$85 =$

$17 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 7 \cdot 5$

$(y+x)(x-y) = h^2$

$2 \cdot 11 + 7 \cdot 9$

$1700 - 17 = 1583$

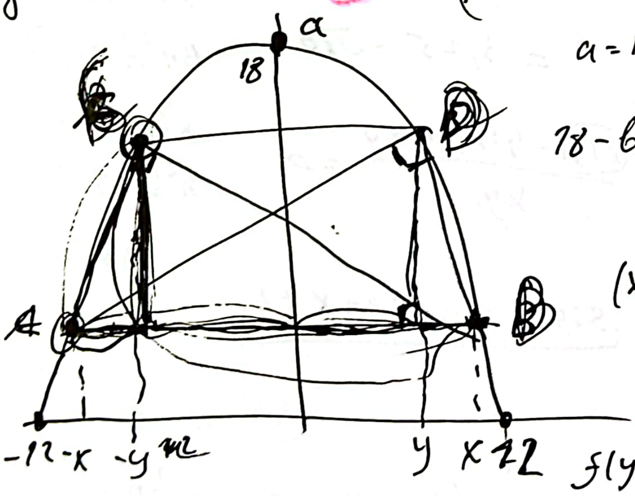
$4 \cdot 36 = 144$

$-y + x \quad h^2 = x^2 - y^2$

$(x-y)(x+y) = h^2$

$x^2 - y^2 = h^2$

$\begin{array}{r} 625 \\ -144 \\ \hline 481 \end{array}$



$a = 18$

$9 + 6 + 4 = 19$

$18 - b \cdot 144 = 0$

18

$b = \frac{18}{144} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}$ $\quad \sqrt{481}$

$(x-y)(x+y) = h^2 = x^2 - y^2$

$18 - \frac{y^2}{8} - 18 + \frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}$

$f(y) - f(x) = a - by^2 - a + bx^2 = b(x^2 - y^2)$

$\frac{1}{8}(x^2 - y^2) = x^2 - y^2$

$4x^2 = (x-y)^2 + h^2 + (x+y)^2 + h^2$

$b(x^2 - y^2) = x^2 - y^2$

$2{,}25 + \frac{3}{2} + \frac{14 \cdot 3}{6 \cdot \frac{3}{2} + 1} \quad 2h^2 + 4y^2 = 0 \quad 8x^2$

$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} + y^2 = x^2 \quad \frac{1}{8}$

$x^2 - y^2 = 0$

$h = a - by^2 - a + bx^2 = bx^2 - by^2$

$h = 8h \Rightarrow h$

$-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$

$h = b(x^2 - y^2)$

$b(x^2 - y^2)$

Черновик 4

$3\cdot\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{\cancel{6}}+3\cdot9\cdot5\cdot\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}}+3\cdot\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{7\cdot\cancel{8}\cdot5}{6}=$

$=5\cdot9\cdot8\cdot7+9\cdot5\cdot8\cdot7+9\cdot5\cdot7=$

$c^2>ab$

$C_n \quad C_n^k \quad a^2b^2-c^2ab$

$\cancel{c^2ab-a^2b^2} \quad ab(ab-c^2)$

$3\cdot84=2520$

$504\cdot5$

$\frac{bc-a^2+a}{a}+\frac{ac-b^2+c}{b}$

$2{,}2$

$\times\, 22$, 22, 44, 44, 484

$3\cdot56=168$

$b^2c^2-a^2bc+abc+a^2c^2-b^2ac+abc+a^2b^2-c^2ab+\cancel{cab}$

$\cancel{abc}$

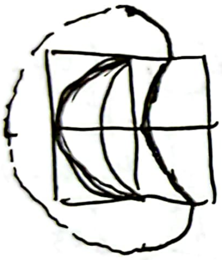
$\times\, 168$, 15, 840, 168, 2520

3

$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq0{,}5$

$1{,}5-1{,}1$

$\frac12 BH\cdot AM+\frac12 BH\cdot NC=5$



$\frac12 h(x+y+z)$

$\frac14 BH^2\cdot AM\cdot NC=3$

$\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=2+\frac34-\sqrt{10}=$

$=3{,}25-\sqrt{10}$

$BH(AM+NC)=10$

$BH^2 AM\cdot NC=12$

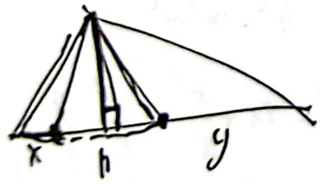
$bc-a^2$

$h(x+y)=10$

$h^2x\cdot y=12$

$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-9|x|+2xy}{xy}=0$

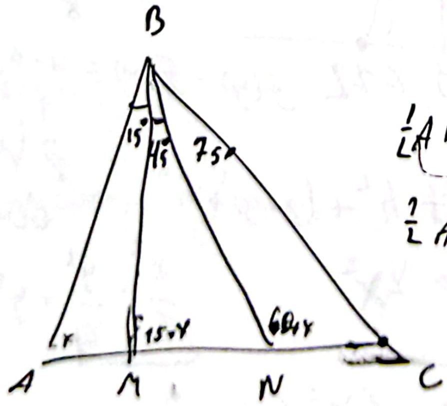
$135°$



sign y - sign $x+2$

$x^3+y^3-19=0$

$x^2y+xy^2+6=0$



$\frac12 AB\cdot BM\cdot\sin15+\frac12 BN\cdot BC\cdot\sin75=5$

$\frac12 AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\cdot\sin15\cdot\sin75=$

$=\frac12 AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN\cdot\frac12\sin30=$

$=\frac18 AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN=3$