0 256084 430008

25-60-84-43
(40.56)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант №8

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Краснова Алексея Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	8	12	12	12	12	0	0	68

68 (шестьдесят восемь)

25-60-84-43
(40.56)

Черновик

3.№1.

нет универс.: В: 3

2_3: $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ $\quad 3\cdot 6\cdot 35$

3_4: $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

1 универ.: если он защит.:

$3\cdot \underbrace{4}_{\text{число защ.}} \cdot 35 \cdot 3$

если он напад.: выбор универ

$3\cdot 6\cdot \underbrace{\frac{7\cdot 6}{2}}_{2\text{ шт}} = 3\cdot 6\cdot 21 \ (\times 3)$

если 2 универ.: если оба защит.: $3\cdot 35\ (\times 3)$ выбор универ $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$

если оба напад.: $3\cdot 6\cdot 7\ (\times 3)$

если один напад, а др. защит: $3\cdot 4\cdot \frac{7\cdot 6}{2}\ (\times 6)$

если 3 универс.: все напад.: $3\cdot 6$ $\quad C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$ сп.

2 напад.: $3\cdot 4\cdot 7\cdot 3$

1 напад.: $3\cdot \frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3$

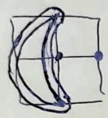
$$\Sigma = 3\cdot 6\cdot 35 + 3(3\cdot 4\cdot 35 + 3\cdot 6\cdot 21) + 3(3\cdot 35 + 3\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 21) + 3(6 + 3\cdot 4\cdot 7 + 3\cdot 21) =$$

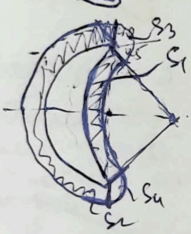
$$= 9(70 + 140 + 126 + 35 + 42 + 84 + 2 + 28 + 21) = 9\cdot 548 = 4932$$

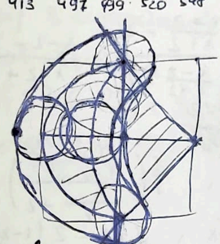
210 356 371 413 497 499 520 548

$548 + 84 = 632$

3.№2.







$(x-1)^2 + y^2 = 2$

$x = \sqrt{2} - 1$

$x = 1 - \sqrt{2}$

$1 - \sqrt{2} + \frac{1}{3} =$

$= \frac{4}{3} - \sqrt{2} < 0$

$\frac{16}{}$

$\frac{135}{360} = \frac{45\cdot 3}{45\cdot 8}$

$S_1 = \frac{1}{4}\pi\left((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - \frac{1}{3})^2\right)$

$S_2 = \frac{1}{2}\pi\left((\frac{4}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2\right)$

$S_3 = S_4 = \frac{3}{8}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{3})^2$

$S_{пол.} = \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - 1\right)$

3.№3

$xy + 2x - y - 2 = 0$

$x(y+2) - (y+2) = 0$

$(x-1)(y+2) = 0$

$x = 1$ или $y = -2$ – первое ур: при $y = -2$ нет к.

$x = 1$: $\sqrt{y+7} = y - 5$ $\quad y \geq 5$

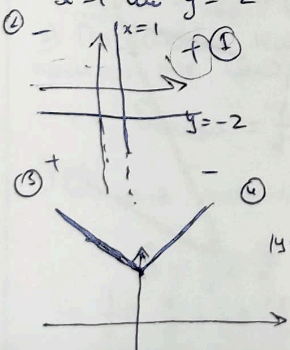
$y + 7 = y^2 - 10y + 25$

$y^2 - 11y + 18 = 0$

$y = 9$

$y = 2$ – нет

$y = 9;\ x = 1$



1: $\begin{cases} |y - x - 10| = (x-4) \\ y \geq 5 \\ y - x + 8 = y^2 - 10y + 25 \end{cases}$

$14 = x + 10 +$

$\begin{cases} y^2 - 11y + 17 + x = 0 \\ y \geq 5 \\ x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} y - x - 10 = x - 4 \\ y - \cancel{x} - 10 = 4 - \cancel{x} \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} y - 2x = 6 \\ y = 14 \end{array}\right.$

$y - x = x + 6$

$\sqrt{22 - x} = 9$

$\sqrt{x + 14} = 2x + 1$

$x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$x \leq 0$ нет к.

$D = 9 + 16\cdot 13$

169 39

178

2 $\quad |y - x - 10| = x - 4$

$\left[\begin{array}{l} y - x - 10 = x - 4 \\ y - \cancel{x} - 10 = -\cancel{x} + 4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ y = 14 \end{array}\right.$

$16 \times 13 = 192$

$\sqrt{22 - x} = 9$

$22 - x = 81$ $\quad x = -6$ ..

$\sqrt{2x + 6 - x + 8} = 2x + 6 - 5$

$x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$D = 9 + 16\cdot 13 = 201 = 3\cdot 67$

$x = \dots$

Черновик

3. №4.

AB 15км 7 мин

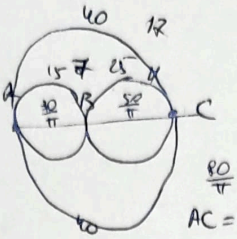
BC 25км 11 мин

AC 40км 17 мин

1ч 25 мин

85 мин

5·17



$2\pi R$

$\pi R = 15$

$R_1 = \frac{15}{\pi}$

$\frac{80}{\pi}$

$AC = 2\pi R \cdot \frac{1}{2} = \pi R$ 4 40

$7a + 11b + 17c = 85$

$c = 0$: $7a + 11b = 85$ 77 ... $11b \equiv 4b$

$b = 1$ 74

$b = 2$ 63 $a = 9$

$b = 6$ 19

$b = 7$ 8

$a = 9$ $b = 2$ $c = 0$

$a = 7$ $b = 3$ $c = 1$

$a = 1$ $b = 4$ $c = 2$ нет

$c = 1$: $7a + 11b = 4 \cdot 17$

0 11 22 33 44 55 66

35

$b = 3$

$a = 7$

$c = 2$: $7a + 11b = 51$ $b = 4$: $a = 1$

$c = 3$: $7a + 11b = 34$

$c = 4$: $7a + 11b = 17$ нет.

3. №5. $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$\frac{\frac{x-2}{x+2} - 2}{\frac{x-2}{x+2} + 2} = \frac{x-2-2x-4}{x-2+2x+4} = \frac{}{3x+2}$

$f\left(\frac{x-4}{x}\right) = -\frac{2}{x}$

$f\left(1 - \frac{4}{x}\right) = -\frac{2}{x}$

$x = \frac{4}{-x+1}$ $f\left(1 - \frac{4(-x+1)}{x}\right)$

$f(+x) =$

$\frac{4}{1-x}$

$f\left(\frac{\frac{4}{1-x} - 2}{\frac{4}{1-x} + 2}\right) =$

$f\left(\frac{4 - 2(1-x)}{4 + 2(1-x)}\right)$

$\frac{2+2x}{6-2x}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$\frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$

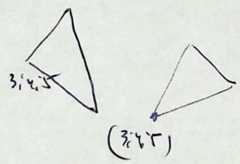
$x = x - 2$: $f\left(1 - \frac{4}{x}\right) = -\frac{2}{x}$

$1 - \frac{4}{\frac{4}{1-x}} = 1 - 1 + x$ $f(x) = \frac{2}{\frac{4}{x-1}} = \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x-1}{2}$

$f(f(x)) = \frac{x-3}{4}$ $\frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$ $\frac{\frac{x-1}{2} - 3}{4} = \frac{x-7}{8}$ ...

$\frac{x - 2^{11} + 1}{2^{11}}$ $f' = \frac{1}{2^{4}}x$ $90°$

3;4;5



$ax + by + cz + d = 0$

$\begin{cases} 3a + 4b + 5c + 1 = 0 \\ 11a + 10b + 6c + 1 = 0 \\ 5a + 8b + 9c + 1 = 0 \end{cases}$

$d = 1$ $6a + 8b + 10c + 2 = 0$

$3a + 4b + 5c + 1 = 0$

$6a + 2b - 3c = 0$

~~$3a - 2b + 8c + 1 = 0$~~

$6b + 13c + 2 = 0$

Чистовик

Задача № 1

1) Рассмотрим случаи, когда мы берем разное число универсалов, т.к их разное число, то и ~~...~~ шестерки будут различными.

Вр В З Н Н Н

2) Если нет универсалов:

$$\underset{\text{на место врат.}}{3}\cdot\underset{\text{1 на 2 места защит. из 4 чел}}{\left(\frac{4\cdot 3}{2}\right)}\cdot\underset{\text{на 3 места напад. из 7 чел}}{\left(\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\right)} = 3\cdot 6\cdot 35$$

Если есть 1 универсал (выбрать его можно 3 способами $C_3^1=3$)

если он защитник, то случ. $\underset{\text{врат.}}{C_3^1}\cdot\underset{\text{зап.}}{C_4^1}\cdot\underset{\text{напад.}}{C_7^3} = 3\cdot 4\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 3\cdot 4\cdot 35$

если он нападающ., то случ.: $C_3^1\cdot C_4^2\cdot C_7^2 = 3\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{7\cdot 6}{2} = 3\cdot 6\cdot 21$

Если есть 2 универсала (выбор их можно $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3$ спос)

если оба защит.: $C_3^1\cdot\cancel{C_4^0}\cdot C_7^3 = 3\cdot 35$

если оба напад.: $C_3^1\cdot C_4^2\cdot C_7^1 = 3\cdot 6\cdot 7$

если один напад., а др. защит: $2\cdot C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_7^2 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 21$

Если есть 3 универсала (выбор 1 способ)

если 3 напад.: $C_3^1\cdot C_4^2\cdot\cancel{C_7^0} = 3\cdot 6$

если 2 напад (выбор универс.: $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$ сп.): $3\cdot C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_7^1 = 3\cdot 3\cdot 4\cdot 7$

если 1 напад. (выбор 3 способами): $3\cdot C_3^1\cdot C_7^2 = 3\cdot 3\cdot 21$

(здесь не выбир. защит., т.к они универсалы)

3) Общее число способов выбора:

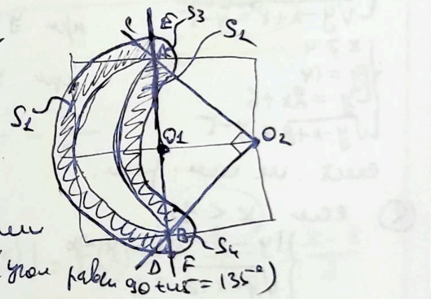
$$3\cdot 6\cdot 35 + 3\left(3\cdot 4\cdot 35 + 3\cdot 6\cdot 21\right) + 3\left(3\cdot 35 + 3\cdot 6\cdot 7 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 21\right) + \left(3\cdot 6 + 3\cdot 3\cdot 4\cdot 7 + 3\cdot 3\cdot 21\right) =$$

$$= 9\left(\underbrace{70 + 140}_{210} + 126 + 35 + 42 + \underbrace{168 + 2}_{170} + 28 + 21\right) = 9\left(450 + \underbrace{56 + 126}_{182}\right) = 9\cdot 632 = 5688$$

Ответ: 5688 спос.

Задача № 2

1) После того как часть краски расплылась, части фигур стали продолжениями ок-тей ⇒ посчит. их площадь как разность соотв. эл-тов



$$S_1 = \frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2$$

2) Кусочки с площадями S_3 и S_4 явл секторами ок-тей с центрами A и B и радиусами $\frac{1}{3}$. (угол равен $90+45=135°$)

$$S_3 = S_4 = \frac{135}{360}\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

3) Посчитаем площадь исходного полумесяца, это есть ~~...~~ разность полуок-ти с центром в т. O_1 и кусочка от сек. ч. $x=0$ от $\frac{1}{4}$ ок-ти с центром O_2

т.е $S_{полум.} = \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - S_{треуг}\right)$; $S_{треуг} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$

4) Общая площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\pi\frac{16}{9} - \frac{1}{2}\pi\cdot 1 + \frac{1}{4}\pi\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot\pi\underbrace{\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2}_{2+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\sqrt{2}} + 2\left(\frac{3}{8}\pi\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{4}\pi\cdot 2 - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{7}{9} + \frac{1}{4}\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{12} + \cancel{\frac{1}{2}\pi} - \cancel{\frac{\pi}{2}} + 1 = \pi\left(\frac{7}{18} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right) + 1 =$$

$$= \pi\left(\frac{7}{36} + \frac{6\sqrt{2}}{36} - \frac{1}{36} + \frac{3}{36}\right) + 1 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{2\sqrt{2}+3}{12}\pi + 1$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}+3}{12}\pi + 1$

Задача №3 черновик

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-10|=(x-4)|xy+2x-y-2|\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$$

① если $xy+2x-y-2=0$

$(y+2)x-(y+2)=0$

$(x-1)(y+2)=0$

$\left[\begin{array}{l}x=1\\ y=-2\end{array}\right.$

если $y=-2$: $\sqrt{6-x}=-7$ нет решений

если $x=1$:

$\sqrt{y-1+8}=y-5$

$\begin{cases}y\geq 5\\ y+7=y^2-10x+25\end{cases}$ $y^2-11x+18=0$

$\begin{cases}y\geq 5\\ \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=9\end{array}\right.\end{cases}$

$y=9$ => решение $(1;9)$

② если $xy+2x-y-2\neq 0$:

~~$\begin{cases}|y-x-10|=x-4 \text{ ①}\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$~~

Рассм. знак. выраж. $(x-1)(y+2)$.

$y+2>0$, при любых знач., т.к

$(\sqrt{y-x+8}=y-5 \Rightarrow y\geq 5)$

Значит знак зависит от знач. $x-1$

~~① $|y-x-10|=x-4$~~

~~$\begin{cases}x\geq 4\\ \left[\begin{array}{l}y-x-10=x-4\\ y-x-10=-x+4\end{array}\right.\end{cases}$~~

~~$\begin{cases}x\geq 4\\ \left[\begin{array}{l}y=2x+6\\ y=14\end{array}\right.\end{cases}$~~

~~если $y=14$: $\sqrt{14-x+8}=9$, $22-x=81$, $x=-59$ (не подходит, т.к~~

① если $x\geq 1$:

$\begin{cases}|y-x-10|=x-4\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq 4\\ \left[\begin{array}{l}y-x-10=x-4\\ y-x-10=-x+4\end{array}\right.\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq 4\\ \left[\begin{array}{l}y=14\\ y=2x+6\end{array}\right.\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$

сист. не имеет реш.

при $y=14$: $\sqrt{14-x+8}=9$

$22-x=81 \Rightarrow x<0$ (н, т.к $x\geq 4$)

при $y=2x+6$: $\sqrt{2x+6-x+8}=2x+6-5$

$x+14=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$D=9+4\cdot 4\cdot 13=217$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$ (не удовлетвор. $x\geq 4$)

$2x+1\geq 0$

$x\geq -\frac{1}{2}$

$\frac{-3+\sqrt{217}}{8}<\frac{-3+15}{8}<4$

② если $x<1$:

$\begin{cases}|y-x-10|=4-x\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$

$\begin{cases}x\leq 4\\ \left[\begin{array}{l}y=14\\ y=2x+6\end{array}\right.\\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$

при $y=14$: $x=-59 \Rightarrow$ удовл. $(x<1)$

при $y=2x+6$: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$ (из ①)

$\frac{-3+\sqrt{217}}{8}>\frac{-3+14}{8}>1$ (не удовл.)

$\frac{-3-\sqrt{217}}{8}<-\frac{1}{2}$ => не явл. реш. (см. п. ①)

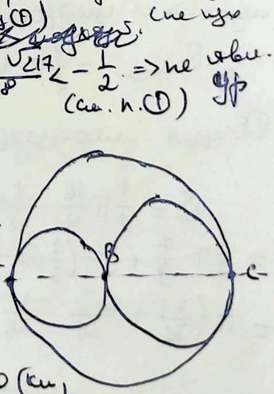
решение: $(-59;14)$

Ответ: $(1;9)$; $(-59;14)$

Задача №4

1) По св. касающ. окр-тей $A, B, C\in\ell$ и явл. диаметром большей окр-ти. $AB=15$ км $\Rightarrow r_1=\frac{15}{\pi}$

$BC=25$ км $\Rightarrow r_2=\frac{25}{\pi}$



$\Rightarrow R=\frac{2r_1+2r_2}{2}=r_1+r_2=\frac{40}{\pi}$; $\Rightarrow AC=\frac{2\pi R}{2}=\pi\cdot R=40$ (км)

1) Пусть он a раз проехал по дуге AB; b раз по дуге BC и c раз по дуге AC

Значит можно сост. уравнение: $\underbrace{7a+11b+17c}_{\text{время езды по дугам}}=\underbrace{85}_{\text{всё время 1 ч. 25 мин}}$

25-60-84-43
(40.56)

чистовик

Задача № 4 (продолжение)

$7a + 11b + 17c = 85$ $a, b, c \in \mathbb{Z};\ a, b, c \geq 0$

Если $c = 0$: $7a + 11b = 85$

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$7a$	85	74	63	52	41	30	19	6	<0

т.е $a = 9;\ b = 2;\ c = 0$

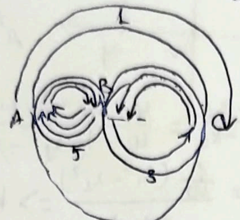
(b, c – четные $\Rightarrow$ проехав по дугам AC и BC он вернется в ту же точку, но a – нечет $\Rightarrow$ он выезжает из т. A и не вернется в нее)

Если $c = 1$: $7a + 11b = 68$

b	0	1	2	3	4	5	6
$7a$	68	57	46	35	24	13	2

т.е $a = 5;\ b = 3;\ c = 1$ – подходит.

Пример:



Он проехал:

$5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 = 190$ (км)

2

Если $c = 2$: $7a + 11b = 51$

b	0	1	2	3	4	5
$7a$	51	40	29	18	7	

т.е $a = 1;\ b = 4;\ c = 2$

(он не вернется в A, т.к b, c – четные (он возвращ. в ту же точку), a – нечет) $\Rightarrow$ не подх.

Если $c = 3$: $7a + 11b = 34$

b	0	1	2	3
$7a$	34	23	12	1

нет таких реш.

Если $c = 4$: $7a + 11b = 17$

b	0	1
$7a$	17	6

нет таких реш.

Если $c = 5$: $\underset{\geq 0}{7a} + \underset{\geq 0}{11b} = 0 \Rightarrow a = b = 0$, но при $c = 5$, он не вернется в A

Значит ответ: 190 км

Задача № 5

(1) $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = f\left(\frac{(x-2)-2}{(x-2)+2}\right) = f\left(\frac{x-4}{x}\right) = -\frac{2}{(x-2)+2} = -\frac{2}{x}$

$x \neq -2$ при $x = 0$: $f\left(\frac{0-2}{0+2}\right) = -\frac{2}{0+2} \Rightarrow f(-1) = -1$

(2) при $x_1 = \cancel{x-4}\ \frac{4}{1-x}$: $f\left(\frac{\frac{4}{1-x} - 4}{\frac{4}{1-x}}\right) = f\left(\frac{4 - 4(1-x)}{4}\right) = f(x) = -\frac{2}{\frac{4}{1-x}} = \frac{x-1}{2}$

~~при $x = 2$: $f\left(\frac{4-2}{4+2}\right) = -\frac{2}{4+2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)$~~

при $x = 1$: $f\left(\frac{1-2}{1+2}\right) = -\frac{2}{1+2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

т.е $f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

~~(3) $f(f(x)) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; $f(f(f(x))) = \frac{\frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$~~

~~(4) $f(f(\ldots f(x)))$ $\Rightarrow$ мы берем функц. от функц. 10 раз~~
~~Расм. коэф. при x: если берем 1 раз: $\frac{1}{4}$; 2 раз: $\frac{1}{16}$~~

(3) $f(f(x)) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; $f(f(f(x))) = \frac{\frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

(4) $f(f\ldots(f(x)))\ldots) \Rightarrow$ мы берем функц. от функц. 10 раз $\Rightarrow$ коэф. при x будет равен $\frac{1}{2^{11}}$ (т.к каждый раз мы делим на 2. $g'(x) = \frac{1}{2^{11}}$

$g'(0) = \frac{1}{2^{11}} \Rightarrow$ т.к знач. производ. в точке есть тангенс угла накл. касательной, то он равен $\frac{1}{2048}$

Ответ: $\frac{1}{2048}$

чистовик

Задача №6

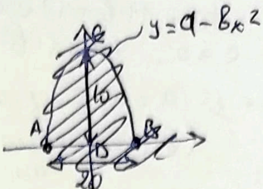
пусть т. $W(0;0)$.

1) $y = a - bx^2$ симметрич. отн. Oy.

тогда $X(-10;0)$

$Y(10;0)$

$Z(0;10)$



т.е $10 = a$

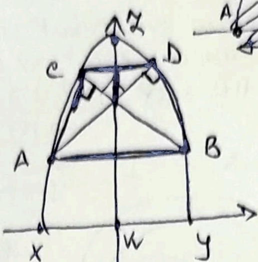
$bx^2 = 10 - y$

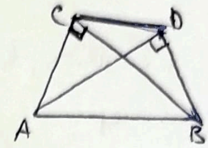
т. $X \in$ параб $\Rightarrow 100b = 10$

$b = \frac{1}{10}$

т.е перебаем:

$y = 10 - \frac{1}{10}x^2$





2) Пусть т. $B(x_1; 10 - \frac{1}{10}x_1^2)$

т. $D(x_2; 10 - \frac{1}{10}x_2^2)$

т. $C(-x_2; 10 - \frac{1}{10}x_2^2)$

т. $A(-x_1; 10 - \frac{1}{10}x_1^2)$

$(BD): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - 10 + \frac{1}{10}x_1^2}{10 - \frac{1}{10}x_2^2 - 10 + \frac{1}{10}x_1^2}$

$\Rightarrow k_{BD} = \frac{\frac{1}{10}(x_1^2 - x_2^2)}{x_2 - x_1} \Rightarrow k_{BD} = -\frac{1}{10}(x_1 + x_2)$

$x_2 \neq x_1$

(AD) $\frac{x + x_1}{x_2 + x_1} = \frac{y - 10 + \frac{1}{10}x_1^2}{10 - \frac{1}{10}x_2^2 - 10 + \frac{1}{10}x_1^2}$

$k_{AD} = \frac{1}{10}\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2 + x_1} = \frac{1}{10}(x_1 - x_2)$

$(AD) \perp (BD) \Rightarrow k_{BD} \cdot k_{AD} = -1$: $-\frac{1}{100}(x_1^2 - x_2^2) = -1$

$x_1^2 - x_2^2 = 100$

3) Расстояние м-у прямыми CD и AB:

$y_{CD} - y_{AB} = \cancel{10} - \frac{1}{10}x_2^2 - \cancel{10} + \frac{1}{10}x_1^2 = \frac{1}{10}(x_1^2 - x_2^2) = 10$

Ответ: 10.

Задача №7

1) $S(mn) = S(n) \Rightarrow$ числа n и mn им. одинак. остаток от дел. на 9, а т.к m меняется, то $n \vdots 9$

Задача №8

1) Т.к нам нужны точки $\in$ треуг $\Rightarrow$ все эти точки леж. в одной пл-ти с треуг. Зададим эту пл-ть: $\alpha: ax + by + cz + d = 0$

т.к коорд. пропорц., то пусть $d = 1$

$\begin{cases} 3a + 4b + 5c + 1 = 0 \\ 11a + 10b + 6c + 1 = 0 \\ 5a + 8b + 9c + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6a + 2b - 3c = 0 \\ 2a + 4b + 4c = 0 \\ 3a + 4b + 5c + 1 = 0 \end{cases}$ $12a + 4b - 6c = 0$

$\begin{cases} +10a - 10c = 0 \Rightarrow a = c \\ 2a + 4b + 4c = 0 \\ 3a + 4b + 5c + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = c \\ 6a + 4b = 0 \\ 8a + 4b + 1 = 0 \end{cases}$ $2a + 1 = 0 \Rightarrow a = c = -\frac{1}{2}$

$b = \frac{3}{4}$

$\alpha: -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z + 1 = 0$

$2x - 3y + 2z - 4 = 0$

2) Итак, нужны точки леж. в пл-ти $2x - 3y + 2z - 4$, и при этом внутри треуг