0 116964 930007

11-69-64-93
(40.39)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кремера Романа Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» 02 2024 года

Подпись участника
КР

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	102	102	102	102	102	0	0	60
−	+	+	+	+	+	−	−	

11-69-64-93 (40.39)

Чистовик

60 (шикадент)

№3

$$\begin{cases}(xy-3+3x-y)|y-x-9|=(x-4)|xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9}=y-4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(y+3)|y-x-9|=(x-4)|(x-1)(y+3)| \\ \sqrt{y-x+9}=y-4\end{cases} \quad *$$

I. $x=1$

$$\begin{cases}0=0 \\ \sqrt{y+8}=y-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+8=y^2-8y+16 \\ y\geq 4 \\ y\geq -8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-9y+8=0 \\ y\geq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=8\end{array}\right. \\ y\geq 4\end{cases} \Leftrightarrow y=8$$

Реш. $(1;\ 8)$

II. $y=-3$

$$\begin{cases}0=0 \\ \sqrt{-3-x+9}=\underset{\wedge\, 0}{-7}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Реш. нет

III. $x\neq 1,\ y\neq -3$

$$* \Rightarrow \begin{cases}|y-x-9|=|x-4| \\ \sqrt{y-x+9}=y-4\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1\begin{cases}y=2x+5 \\ \sqrt{y-x+9}=y-4\end{cases} \\ 2\begin{cases}y=13 \\ \sqrt{y-x+9}=y-4\end{cases}\end{array}\right.$$ (появл. лишние корни)

1.) $\begin{cases}y=2x+5 \\ \sqrt{y-x+9}=y-4\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+14}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\geq 0 \\ x+14=4x^2+4x+1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+3x-13=0 \\ 2x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16\cdot 13}}{8} \\ x\geq -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}$

~~($y=$ [illegible] $\sqrt{217}$ [illegible])~~

~~Если $y-x-9$ и $x-4$ имеют одинаковый знак, то получ. корни являются реш.~~

~~$y-x-9=$ [illegible] $-3-\sqrt{217}-4$ [illegible] $\sqrt{217}$~~

~~$y-x-9=$ [illegible] $\sqrt{217}$ [illegible] $=\sqrt{217}-7$ [illegible] $x-4$~~

~~$(-3+\sqrt{217};\ \sqrt{217}$ [illegible]~~

$y=2x+5=\frac{-3+\sqrt{217}}{4}+5=\frac{17+\sqrt{217}}{4}$

$(x-1)(y+3)>0$. Тогда $|y-x-9|=x-4$, но $x-4<0$

Реш. не подходит.

см. след. стр.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

2.) $\begin{cases}\sqrt{22-x} = \cancel{*}9 \\ y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}22-x=81 \\ y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-59 \\ y=13\end{cases}$

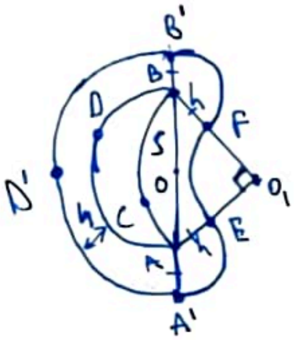
$(x-1)(y+x3) < 0 \rightarrow |y-x-9| = -x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |72-9| = 59+4 \Leftrightarrow 63=63$

Реш. $(-59;13)$ подходит

Ответ: $\{(1;8); \cancel{*}(-59;13)\}$

№2



AB - вершина первоначального месяц~~а~~
$O(0;0)$
O_1 ~~(0;1)~~ $(1;0)$
рад. окр. O $r=1$
рад. окр. O_1 $r_1=\sqrt{2}$

Площадь ~~сектора~~ сегмента ABC $S = $ ~~S_{ABC}~~ $- S_{\Delta AO_1B} =$

$= \frac{\pi r_1^2}{4} - \frac{r_1 r_1}{2} = \cancel{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$ $\frac{\pi}{2} - 1$

На утро, ~~*~~ левая граница полумесяца представляет собой не ~~окр~~ часть окр. с рад. r и центром O, а окр с центром O и рад $r+h$, где $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис.)

Аналогично для правой границы

Точки A, B - вершины месяца $\Rightarrow$ они создали ~~во~~ вокруг себя две окр. (см. рис.)

~~Полная площадь~~ $\angle B'BF = \angle A'AE = 135° = \frac{3\pi}{4}$ (по рис. из усл.)

Полная площадь полученной фигуры будет равна

$S_0 = S_{A'B'D'} - S + S_{ABO_1} - S_{EFO_1} + S_{B'BF} + S_{A'AE} =$

$= \cancel{\frac{\pi(r+h)^2}{(\sqrt{2})^2}}\ \frac{\pi(r+h)^2}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{r_1^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(r_1-h)^2 \pi}{4} + 2 \cdot \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi} \cdot h^2 \cdot \pi =$ см. след. стр.

чистовик

$$= \frac{\pi(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2} - \frac{\pi}{2}+1 + \frac{3\pi}{4} - \frac{(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2\pi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi = \frac{\pi(\frac{3}{2}+\sqrt{2})}{2} + 1 - \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} =$$

$$= \frac{\pi(3+2\sqrt{2})}{4} + \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi(4+2\sqrt{2})}{4} + 1 = \frac{\pi(2+\sqrt{2})+2}{2}$$

Ответ: $\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}+1$

№5

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}=t\right) = -\frac{1}{x+1}$$

$$t=\frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow tx+t=x-1 \Leftrightarrow x=-\frac{t+1}{t-1}$$

$$f(t)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{\left(-\frac{t+1}{t-1}+1\right)} = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1}-1} = \frac{t-1}{2}, \quad t\neq 1$$

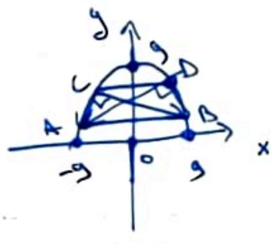
$$g(x)\ \underbrace{f(f(f(\dots f(x))))}_{9} = \underbrace{f(f(f(\dots \tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{2})))}_{8} = \underbrace{f(f(f(\dots \tfrac{x}{4}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2})))}_{7} =$$

$$= \dots = \frac{x}{2^9} - \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^8} - \dots - \frac{1}{2}$$

$tg\,\alpha = \frac{dg(x_0)}{dx} = \frac{1}{2^9} - 0 - 0 - \dots - 0 = \frac{1}{2^9}$, $x_0=0$ – угол наклона касат. в точке $x_0=0$.

Ответ: $\frac{1}{2^9}$

№6



Парабола симм. отн Oy => пересекает Ox в 9 и -9.

$9=a-b\cdot 0=a$

$0=a-b\cdot 9^2 \Leftrightarrow b=\frac{1}{9}$

$$y=9-\frac{x^2}{9}$$

$$\begin{cases} A\left(x_a,\ 9-\frac{x_a^2}{9}\right) \\ B\left(-x_a,\ 9-\frac{x_a^2}{9}\right) \\ C\left(x_c,\ 9-\frac{x_c^2}{9}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AC}\left(x_c-x_a,\ \frac{x_a^2-x_c^2}{9}\right) \\ \vec{BC}\left(x_c+x_a,\ \frac{x_a^2-x_c^2}{9}\right) \end{cases}$$

см. след. стр.

Чистовик

$\angle ACB = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{AC} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_c - x_a)(x_c + x_a) + \frac{(x_a^2 - x_c^2)^2}{81} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x_c| = |x_a| \\ 1 + \frac{x_c^2 - x_a^2}{81} = 0 \end{array}\right.$

$|x_c| \neq |x_a|$ т.к. C не совп. с A или B.

$1 + \frac{x_c^2 - x_a^2}{81} = 0 \Leftrightarrow 81 + x_c^2 - x_a^2 = 0 \Leftrightarrow x_a^2 = 81 + x_c^2$

· $|x_a| \le 9 \Leftrightarrow x_a^2 \le 81 \Leftrightarrow 81 + x_c^2 \le 81 \Leftrightarrow x_c^2 = 0 \Leftrightarrow x_c = 0$

Если $|x_a| > 9$, то точка ~~x_a~~ A находится под полом, чего не может быть.

$x_a^2 = 81 + x_c \Leftrightarrow |x_a| = 9 \Leftrightarrow x_a = -9$

Расстоянием м-ду балками ~~Я~~ является высота, опущенная из C на AB, равная разности ординат C и A.

$h = \left|\left(9 - \frac{x_c^2}{9}\right) - \left(9 - \frac{x_a^2}{9}\right)\right| = \left|\frac{x_a^2}{9} - \frac{x_c^2}{9}\right| = 9$

~~Ответ: 9~~ Точки C и D в данном случае совпадают, но через них всё равно можно провести прямую, параллельную Ox, которая будет являтся балкой.

Ответ: 9.

N 1

Найдём кол-во различных способов выбрать 2 защитника и 3 нап.

Универсалы в защитниках	0	0	0	0	1	1	1	2	2
Универсалы в нап.	0	1	2	3	0	1	2	0	1
Кол-во сп.	~~5·6~~ $\frac{5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3!}$	$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot6\cdot5}{2\cdot2}$	$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot6}{2\cdot2}$	$\frac{5\cdot4\cdot1}{2}$	$\frac{3\cdot5\cdot6\cdot5\cdot4}{3!}$	$2\cdot3\cdot\frac{5\cdot6\cdot5}{2}$	$3\cdot\frac{5\cdot6}{1}$	$3\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}$	$3\cdot\frac{6\cdot5}{2}$

Найдём полученную сумму

$\frac{20^2}{2} + 2\cdot15^2 + 5\cdot6^2 + 10 + 12\cdot5^2 + 2\cdot15^2 + 90 + 60 + 45 =$ см след стр.

11-69-64-93 (40.39)

Чистовик 5

$= 200 + 450 + \cancel{180}+10 + 300 + 450 + 90 + 105 = 300 + 380 + 100 + 105 = 1000 + 485 =$

$= \cancel{1000}\ 1485$ – кол-во способов выбрать 2 защитников и 3 нападающих

$2 \cdot 1485 = 2970$ – кол-во способов выбрать всю команду

Ответ: 2970

№4

Пусть дугу AC проехали $k = 5$ раз (больше нельзя)

Тогда $19k = 95 = 1735$ мин – всё затраченное время → мотоцикл остановился в точке C.

Пусть $k=4$ тогда $95 - 19k = 19$ – время проезда по дугам AB и BC, но нельзя найти путь по AB и BC, который составляет 19 мин.

Пусть $k=3$. Тогда $95 - 3 \cdot 19 = 38$. м/ст мог проехать $m=1$ раз по BC и $n=5$ раз по AB и оказаться в A. (других путей нет)

$k=2$: $\cancel{x}\ 95 - 2 \cdot 19 = m \cdot 13 + n \cdot 5 \Leftrightarrow 13m + 5n = 57$

m	1	2	3	4
n	$\frac{44}{5}$	$\frac{31}{5}$	$\frac{18}{5}$	1

Реш. $m=4$ и $n=1$, но тогда м/ст не окажется в A.

$k=1$: $13m + 5n = 76 \Leftrightarrow n = \frac{76 - 13m}{5}$

m	1	2	3	4	5	6
n	$\frac{63}{5}$	$\frac{25}{10}$	$\frac{37}{5}$	$\frac{22}{5}$	$\frac{11}{5}$	$n<0$

Реш. $m=2$ $n=10$ не подх. т.к. м/ст не остановится в т. A.

$k=0$: $\cancel{x}\ 13m + 5n = 95 \Leftrightarrow n = 19 - \frac{13m}{5} \Rightarrow m \vdots 5$

$\cancel{m}$ $\begin{cases} m = 5 \\ n = \cancel{32}6 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=10 \\ n=-7 \end{cases}$ и далее $n<0$

При $m=5$ $n=6$ м/ст опять не окажется в A.

Единственный способ добраться до A за 95 мин. при $k=3, m=1, n=5$

~~S = k.~~ Дуга AC равна сумме дуг AB и BC т.к. ~~соотв~~ сумма ~~сое~~ радиусов соотв. окр. равна радиусу третьей.

$S = k \cdot (15+25) + m(25) + n \cdot 15 = 3 \cdot 40 + 25 + 75 = 220$ км Ответ: 220 км

Чистовик

№8

6

$A(-7;4;3)$
$B(1;5;9)$
$C(-5;8;7)$

Найдём плоскост..

Черновик

5, 13, 19 5 6

95

~~19~~ 38

0	0	0	0
		0	1
1	0	0	2
0	1	0	3
1	1	1	0
0	2	1	1
2	0	1	2
1	2	3	6
2	1	2	1
3	0	3	0
0	3		

$$2\cdot\left(\frac{5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3!}+\frac{3\cdot5\cdot6\cdot6\cdot4}{}\right.$$

$13a+13b \vdots 5 = 5n \Leftrightarrow a=\frac{5n-13b}{13}$

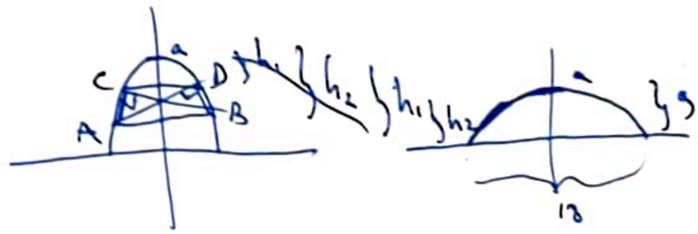
$57+13=70$

$57+$

$\cancel{a}\ x+by+cz+d=0$

$$\begin{cases}-7+4b+3c+d=0\\ 1+0b+9c+d=0\\ -5+8b+7c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\end{cases}$$

Черновик



$a=9$

$9-bx^2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{9}{b}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{\sqrt{b}} \\ x=-\frac{3}{\sqrt{b}} \end{array}\right.$

$\frac{6}{\sqrt{b}}=18 \Leftrightarrow b=\frac{1}{9}$

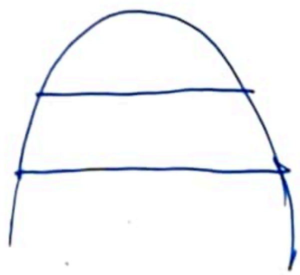
$\cancel{9-\frac{x^2}{9}}$ $\cancel{y=9-x^2}$

$y=9-\frac{x^2}{9}$ $\qquad h_1=9-\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}=9-h_1$

$x=\pm\sqrt{9(9-h_1)}=\pm 3\sqrt{(9-h_1)}$

$CD=6\sqrt{9-h_1}$

$AB=6\sqrt{9-h_2}$

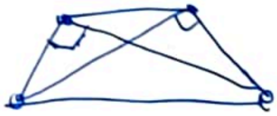


$h_1=9-\frac{CD^2}{36}$

$h_2=9-\frac{AB^2}{36}$

$h_1-h_2=\frac{AB^2-CD^2}{36}$

$\vec{AB}(a,0)$ $\qquad 81$



$A\left(x_A, 9-\frac{x_A^2}{9}\right)$

$C\left(x_C, 9-\frac{x_C^2}{9}\right)$

$B\left(x_B, 9-\frac{x_B^2}{9}\right)$

$x_C^2-x_A^2+\frac{(x_A^2-x_C^2)^2}{81}=0$

$1-\frac{x_C^2-x_A^2}{81}=0 \Leftrightarrow$

$x_A^2-x_C^2+81=0$

$\Leftrightarrow 81-x_C^2+x_A^2=0$

$\vec{CA}\left(x_C-x_A, \frac{x_A^2-x_C^2}{9}\right)$

$\vec{CB}\left(x_C-x_B, \frac{x_B^2-x_C^2}{9}\right)$

$(x_C-x_A)(x_C-x_B)+\frac{(x_C-x_A)(x_C-x_B)(x_C+x_A)(x_C+x_B)}{81}=0$

$\Leftrightarrow x_A^2=81+x_C^2$

$\cancel{(x_C-x_A)(x_C+x_A)}+x_C^2-x_A^2+\frac{(x_C^2-x_A^2)^2}{81}=0$

$1+\frac{x_C^2-x_A^2}{81}=0 \Leftrightarrow x_C^2-x_A^2=-81 \Leftrightarrow x_C=\sqrt{x_A^2-81}$

Черновик

26, 53, 64, 34

$\cancel{2\cdot4\cdot5\cdot6}$ $\quad \cancel{\frac{5\cdot 6}{2\cdot 3!}} = \frac{5\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 3!} = 150$

$150\cdot 11$

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)\,|y-x-9| = (x-4)\,|xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+3)\,|y-x-9| = (x-4)\,|(x-1)(y+3)| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$\cancel{|y-x-9| = |x-4| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x+5 \\ y = -13 \end{array}\right.}$

$y-4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 4$

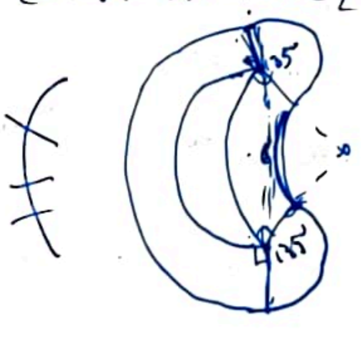
$y - x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x-9$

$\begin{array}{r} 16 \\ 13 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array}$

$(x-1)(x-4) > 0 \quad x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \Leftrightarrow x+14 = 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+3x-13=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9+208}}{8} = \frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$



$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{-\frac{t+1}{t-1}+1} =$

$\frac{x-1}{x+1} = t \Leftrightarrow x-1 = xt+t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1+t}{t-1} = x$

$= -\frac{t-1}{-t-1+t-1} = \frac{t-1}{2} \quad f(t) = \frac{t-1}{2} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$f(f(t)) = \frac{f(t)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{t}{2}-\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$