0 341430 630000

34-14-30-63
(38.4)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кривощековой Анны Николаевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
34-14-30-63	80	15	15	10	10	0	15	15	

34-14-30-63 (38.4)

Задача 4 80 (восемьдесят) чистовик ① /5

Есть два варианта выбора мест для рассадки девочек 1, 3, 5, 7, 9 или 2, 4, 6, 8, 10. Иначе их не посадить. Для каждого из этих 2х вариантов одинаковое кол-во способов рассадки. 5! - кол-во способов рассадить девочек между выбранными стульями и 5·4·3·2 (численно равно 5!) способов рассадить оставшихся 4х человек на свободные места. Т.о всего вариантов рассадки 2·(5!·5!) = 2·14400 = 28800

Ответ: 28800 способов

Задача 2

Для того, чтоб получить возрастающую последовательность нужно начинать с числа не больше 4. Есть 2 варианта набора последовательности.

1: исх. число → число на боковой грани → число противоположн. исх. числу

2: исходн. число → число на боковой грани → → число на боковой грани

(боковая грань - 4 числа за исключением исходного и ему противоположного)

4. пр: 3

① б.г: 1-2-6-5

(б.г опр. однозначно т.к 1 и 6 не рядом и 2 и 5 не рядом а 1-5-6-2 то же что и 1-2-6-5)

1в: невозможен т.к пр. число больше исходного

2в: 4-5-6. он единственный т.к это вариант единственная возрастающая последовательность начина с 4.

3. пр: 4

① б.г: 1-2-6-5

1в: 4 больше 3х только на 1, поэтому невозможно

2в: ~~4~~ 3-5-6 (5 ~~??~~ и 6 единственные числа на б.г > 3 => друг. вар нет)

2. пр: 5

④ б.г: 1-3-6-4

1в: 2-3-5 и 2-4-5 (2 числа на б.г в диапазоне от 2 до 5)

2в: 2-3-6 и 2-4-6

1. пр: 6

⑧ б.г: 2-3-5-4

1в: 1-2-6, 1-3-6, 1-5-6, 1-4-6 (все числа на б.г в диапазоне 1-6)

2в: 1-2-3, 1-2-4; 1-3-5; 1-4-5

Ответ: всего 14 разных возрастающих последовательностей

Задача 7 чистовик ② 15

$\frac{1}{2} l_{w_1} = 15$ км $\frac{1}{2}\pi d_1 = 15$ км   ~~тогда $\frac{1}{2} l_{w_3} = \frac{1}{2}(l_{w_1}+l_{w_2}) = \frac{1}{2}(15$ км+~~

$\frac{1}{2} l_{w_2} = 25$ км $\frac{1}{2}\pi d_2 = 25$ км

$\frac{1}{2} l_{w_3} = \frac{1}{2}\pi d_3 = \frac{1}{2}\pi(d_1+d_2) = \frac{1}{2}(\pi d_1 + \pi d_2) = 15\text{км}+25\text{км} = 40\text{км}$

где w_1 - окр. содержащая дугу $\overset{\frown}{AB}$ (с диаметром AB)
w_2 - окр. $\overset{\frown}{BC}$
w_3 - окр. $\overset{\frown}{AC}$

т.о $\overset{\frown}{AC}$ = 40км.

Пусть автомобиль k раз проехал дугу AC, l раз проехал $\overset{\frown}{AB}$ и m раз $\overset{\frown}{BC}$

тогда $17k+7l+11m = 85$ где $k, l, m \in N$

заметим что $0 \le k \le 5$

$k=5$: $7l+11m=0$ $l=0, m=0, k=5$ невозможно т.к после этого автомобиль будет в точке C

$k=4$: $7l+11m=17$ решений нет (в целых числах)

$k=3$: $7l+11m=34$ решений нет (в целых числах) точнее в натуральных

$k=2$: $7l+11m=51$
$l=1$ $m=4$ $k=2$ невозможно т.к l и m должны быть одной четности иначе автомобиль не выедет из точки B

$k=1$ $7l+11m=68$
$l=5$ $m=3$ $k=1$ возможный вариант

$k=0$ $7l+11m=85$
$l=9$ $m=2$ $k=0$ невозможно l и m не одной четности

тогда автомобиль 5 раз проехал дугу AB (15км) 3 раза проехал дугу BC (25км) и 1 раз дугу AC (40км)
и всего проехал: $5\cdot15+3\cdot25+40 = 75+75+40 = 190$км

Ответ: автомобиль проехал 190км

34-14-30-63 (38.4)

Задача 6 чистовик ③ 15

а) объём воды в кувшине стремится к 10, но 10 литров никогда не достигнет.

- воды меньше 10л, значит выпивают меньше 5л, а доливают 5л $\Rightarrow$ объем воды возрастает
- пусть когда-то в кувшине впервые окажется 10л или более, для этого дольют 5л к 5или более литрам, но тогда до выпивания половины в кувшине должно быть 10или более литров (чтобы получить 5или более) - противоречие.

$\Rightarrow$ 10 или более литров в кувшине не будет

б) Если в кувшине было $x\%$ (от 10л) долили 50% (5л), но выпили $0.5x\%$ стало $50\% + 0.5x\%$, т.е среднее арифметическое от $x\%$ и 100%, т.е ~~x+~~ половина от разницы 100% и $x\%$ $x\% + \frac{100\% - x\%}{2} = 50\% + 0.5x\%$

т.о изначально было 70%, на второй день будет 85% и т.д.

разница между $x\%$ и 100% каждый день:

30%, 15%, 7.5% ... - геометрическая прогрессия

тогда необходимо найти тот день, когда разница между $x\%$ и 100% будет менее 0.1% (т.е ~~х~~ > 99.9%)

$30 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < 0.1 \quad \min k = 10$

т.о это произойдет на 10ый день.

Ответ: минимальный объём - 10 литров, это произойдет на 10 день.

~~Задача 3~~

~~$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ac - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$~~

~~пусть $a \geq b \geq c$ ($a \leq b \leq c$) тогда $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3 \leq \frac{a^2}{c} + \frac{a^2}{c} + \frac{a^2}{c} - 3c + 3 =$~~

~~Задача 3~~

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3\cancel{4}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab}{abc}+3\cancel{4}$$

~~пусть $a\ge b\ge c$ тогда~~

пусть $a\ge b\ge c$

$$\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab}{abc}+3=a^2b^2($$

Задача 1

x^2+ax+b корни: $\frac{1}{m}-2$ и $\frac{1}{n}-2$ $a,b,n,m\in\mathbb{Z}$
$n\ne m$

по теореме Виета:

$$a=-\left(\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2\right)=-\left(\frac{n+m}{n*m}-4\right)\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{n+m}{nm}\in\mathbb{Z}$$

$$b=\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)=\frac{1}{mn}-\cancel{2n}\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+4=$$

$$=\frac{1-2(m+n)}{mn}+4\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1-2(m+n)}{mn}\in\mathbb{Z}$$

$\frac{n+m}{nm}\in\mathbb{Z}$ пусть $n+m=kx$, $nm=k$ $k\in\mathbb{Z}$

тогда $\frac{1-2(m+n)}{nm}=\frac{1-2kx}{k}=\frac{1}{k}-2x$

причем $\frac{1}{k}-2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=\pm1\Rightarrow mn=\pm1$

$mn=\pm1$, $m\ne n$, $m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow m,n=1$ и -1 $m+n=0$, $m\cdot n=-1$

$$a=-\left(\frac{n+m}{nm}-4\right)=4$$

$$b=\frac{1-2(m+n)}{nm}+4=-1+4=3$$

$a+b=7$

Ответ: $a+b=7$

34-14-30-63 (38.4)

Задача №1 (черновик)

a, b – целые

x^2+ax+b корни: $\frac{1}{m}-2$ и $\frac{1}{n}-2$

по теореме Виета $-a = \frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2 = \frac{m+n}{mn}-4$

$-b = -(\frac{1}{m}-2)(\frac{1}{n}-2) = -\frac{1}{mn}+\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-4 =$

$= \frac{2(m+n)-1}{mn}-4$

т.к a и b целые, то $\frac{m+n}{mn}$ и $\frac{2(m+n)-1}{mn}$ тоже целые

Пусть $mn=k$, $m+n=kx$ ($\frac{m+n}{mn}$ - целое $\Rightarrow m+n \vdots mn$) $k\in Z$

тогда $\frac{2(m+n)-1}{mn} = \frac{2kx-1}{k} = 2x-\frac{1}{k}$

при этом $2x-\frac{1}{k}\in Z \Rightarrow k=\pm1$ т.е $m\cdot n=\pm1$

$m\cdot n=\pm1$

$m, n\in Z$

$m\neq n$

$\Rightarrow m, n = \{1, -1\}$

$m\cdot n=-1$

$a = -\frac{m+n}{mn}+4 = \left[\begin{array}{l} -m-n+4 \ (1) \\ m+n+4 \ (2) \end{array}\right.$

$b = \frac{-2(m+n)+1}{mn}-4 = \left[\begin{array}{l} -2(m+n)+1-4 \ (1) \\ 2(m+n)-1+4 \ (2) \end{array}\right.$

$a+b = \left[\begin{array}{l} (1): \\ \end{array}\right.$

$a = -\frac{m+n}{mn}+4 = m+n+4 = 1-1+4=4$

$b = \frac{-2(m+n)+1}{mn}-4 = -4$

$a+b=0$

$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab \overset{?}{>} 0$

$b^2c(c-a)$

$c^2a(a-b)$

$a^2b(b-c)$

$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2 \overset{?}{>} a^2bc+b^2ac+c^2ab$

$bc+ac+ab >$

Задача 3 чистовик 5/15

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}-a-b-c+3$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}-a-b-c+3\geq 3$$, т.к

$$\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}-a-b-c\geq 0$$, т.к

$$\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$$

т.о исходное выражение не меньше 3

Черновик

$-a = \frac{m+n}{mn}$ $-b = \frac{2(m+n)-1}{mn}$

$a+b = -(m+n+2(m+n)-1) = -m-n+1$

$a =$

$a \geq b \geq c$

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$

$\frac{bc}{a} - a + 1 \geq$

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^2bc - b^2$

$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab > 0$

$bc(bc - a^2) + ac(ac - b^2) + bc(bc - c^2)$

$a > b > c$

$-ac(b^2$

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} > a+b+c$

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} > a+b+c$

$\frac{a^2}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{c} >$

$\frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{c^2}{c} > 3a$

$\frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a}$

$\frac{3c^2}{a} > 3a$

$\frac{c^2}{a} > a$

$c^2 > a^2$

a b

$a \geq b \geq c$

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c}$

a (c) a (b)

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} > \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{c} >$ b

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \geq \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{a}$ c

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \geq \frac{bc}{a} + \frac{ac}{a} + \frac{ba}{c}$ b a

Черновик

$7k + 11l + 17m = 85$

$m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

5: $7k+11l+85=85$ 5 роу по AC что невозможно

4: $7k+11l=17$ нет реш

3: $7k+11l=34$ нет реш

2: $7k+11l=51$ 1 4 7 невозможно

1: $7k+11l=68$ 5 3 1 возможно 35 33 17 85

0: $7k+11l=85$ 9 2 0 невозможно

$2x\%$ в кувшине, после доливания $x+50\%$ 10 - 100% 7 - 70%

т. е среднее арифм $2x\%$ и 100%

30% 15% 7.5% 3.75 1.625 0.8125 0.40625 0.203125

$30 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < 0.1$ 0.1 с чем-то < 0.1 на 10 день

$\frac{30}{2^k} < 0.1$

30 | 256 0.11

$1-a = 9-3a$ $8=2a$ $a=4$ 9 уже

-1 и -3

$1-4+b=0$ 30 | 528 $b=-3$

$1-a+b = 0-3a+b$

$\cancel{\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}}-a-b-c+3 \geq \frac{a^2}{c}+\frac{a^2}{c}+\frac{a^2}{c}-3c+3$

x^2+4x+3

~~Пусть $a \geq b, c$~~ $a \leq c \geq 3$ ≤ 0 $\frac{3a^2-3c^2}{c}$ 3 4 -7

$\frac{1}{3}+\frac{6}{1}+\frac{3}{2}-\frac{6}{4}+3$

$\frac{13}{6}+3$

$\frac{3a^2-3c^2}{c} \leq 3$ $\frac{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2+c^2+}{abc}$

$a \leq b \leq c$ $a^2+b^2 \geq ab$

$\frac{3(a^2-c^2)}{c}$ ≥ 0

$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c \leq \frac{c^2}{a}+\frac{c^2}{a}+\frac{c^2}{a}-3a =$

$= \frac{3c^2-3a^2}{a} \leq 3$ ≥ 3

≥ 3

$\frac{3(c^2-a^2)}{a_1} \geq$ ≤ 0

Черновик

$\frac{1}{m}-2$ $\frac{1}{n}-2$ корни x^2+ax+b по теореме Виета

$(\frac{1}{m}-2)(\frac{1}{n}-2)=a$ $\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2=b$ a, b - целые

$\cancel{a+b} =$ $\cancel{x+y+xy}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4$ - целое $\frac{m+n}{mn}$ - целое число $\frac{k}{}$ $\frac{kn}{k}$

$\frac{1}{mn}-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+4$ - целое $\frac{1-2n-2m}{mn}$ - целое $\frac{2kn-1}{k}$

$\frac{2(n+m)-1}{mn}$ $2n-\frac{1}{k}$ $k=1$

Задача 2: 1 - 6 2 - 5 3 - 4

начальное число не более 4.

4: 1 вариант 4-5-6

3: 3 - 4 1: -

1-2-6-5 2: 3-5-6

2: 2 - 5 1: 2-3-5, 2-4-5

1-3-6-4 2:

$\frac{k}{xk}$ $\frac{2k-1}{xk}$ $\frac{2}{x}-\frac{1}{xk}$

и т.д.

$\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1$? ...

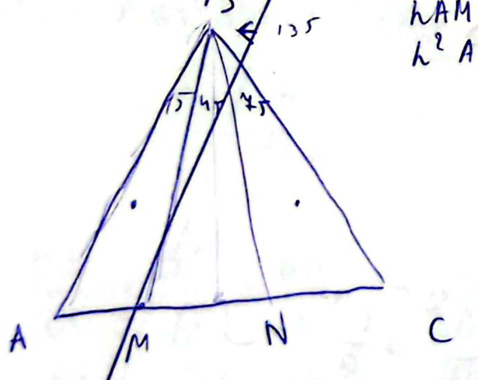
$7 \to 3.5 \to 8.5 \to 4.25 \to 9.25 \to 4.6... \to$ ~~9.6~~ 9.2

если ~~больше~~ меньше 10 литров то каждый день выпивают меньше 5 а доливают 5. $\uparrow$ к. 9 $\Rightarrow$ заполнится

$x<10$ долили 5 наполнился было $x+5>y$

если может дан x то может $0.5x+5$ $0.5x+5>x$ если $x<10$

$(y-5)\times 2 = 2y-10$



$hAM+hNC=5$

$h^2AMNC=3$

$h(AC)$ - ?

$m+\frac{1}{m}=\frac{m^2+1}{m}$

$\pi d_1 = 15$

$\pi d_2 = 17$

$\pi(d_1+d_2)$

$x+\frac{100-x}{2}=50+0.5x$

$a+b = 1\frac{1}{m}+$