0722317570006

72-23-17-57
(43.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кудашовой Ольги Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

2-23-17-57

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
12	12	4	12	12	12	12	0	76	[illegible]	Кулешов И.А.
									[illegible]	Глоренков В.А.

72-23-17-57
(43.3)

76 (семьдесят шесть)

Черновик

O O O O O O
в з з н н н

$3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 3 \cdot 56 = \boxed{168}$

$\underbrace{ВВ}_{2}$ $\underbrace{3333}_{4}$ $\underbrace{ННННННН}_{7}$ $\underbrace{УУУ}_{3}$

~~$3 \cdot 4 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6}$~~ $2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

$\boxed{1008}$

$\boxed{720}$

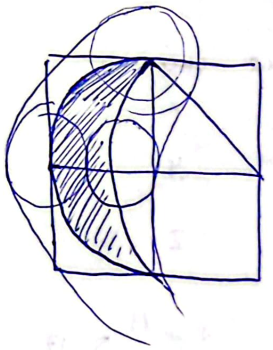
2. O у O з

$y - x + 10 = y^2 - 8y + 16$

72
14
288 4
72

$\boxed{6} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}$

у у $C_3^2 \cdot C_8^3$
у з $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_9^3$
з з $C_4^2 \cdot C_{10}^3$



$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

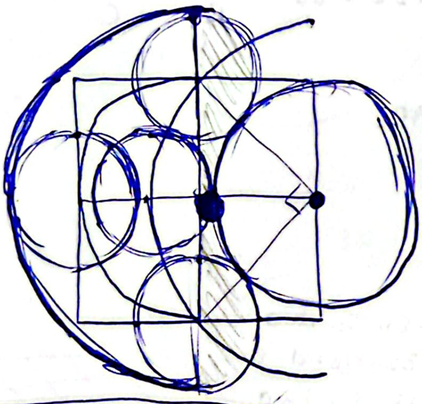
336
2016
1470

$$\left[\begin{array}{l} xy+3x-2y-6=0 \\ \begin{cases} xy+3x-2y-6>0 \\ y-x-8=x-5 \end{cases} \\ \begin{cases} xy+3x-2y-6<0 \\ y-x-8=5-x \end{cases} \end{array}\right.$$

$\sqrt{y-x+10} = y-4$

1440
336

1776
2016
3792



$a = 0{,}5$

$R = 1{,}5$

$r = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

$10^{76} - 1$ $\boxed{75 \cdot 9}$

$S = \frac{1}{2}\pi R^2 + 2 \cdot \frac{135}{360} \cdot \pi a^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$

$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2$

$\frac{9}{8}\pi + \frac{3}{16}\pi + 1 - \frac{1}{4}\pi r^2$

$\frac{21}{16}\pi + 1 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2$

Черновик

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$x=0$

$g(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))}_{12}\dots$

$f\left(1+\frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$f\left(1+\frac{4}{x}\right) = \frac{2}{x}$

n – 75 знаков

6 3 4

$S(n) = \Sigma$ цифр n

$x = \frac{1}{x}$

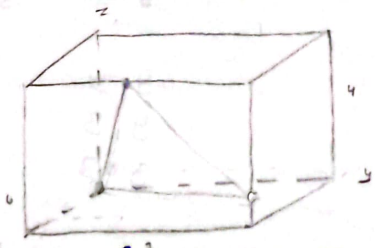
$\forall m: \quad 1 \le m \le n$

$S(mn) = S(n)$

$f(1+4x) = 2x$ $\quad x = \cancel{\frac{4}{x}-\frac{1}{4}}$ $\quad x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

$\underbrace{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

$\cancel{f(-3) = -2}$



$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$

$\frac{1}{2}(x-1) =$

x: (-5; 1)
y: (-5; 3)
z: (-5; -1)

9 5 7 3

	длина	время	~~скорость~~
AB:	13	7	x
BC:	21	11	y
AC:	~~4~~ 34	17	z

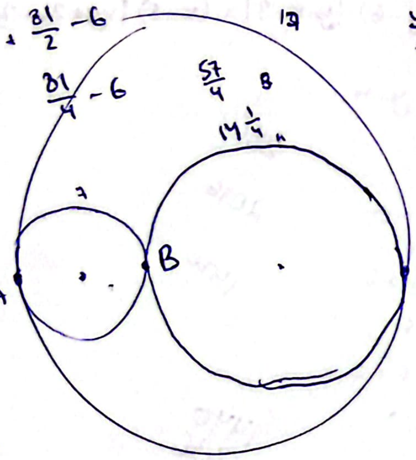
$-\frac{81}{4} + \frac{81}{2} - 6$

13

$\frac{81}{4} - 6$

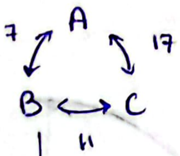
$\frac{57}{4}$ 8

$14\frac{1}{4}$



85 мин.

$7x + 11y + 17z = 85$



$\begin{array}{r} -81 \\ 24 \\ \hline 57 \end{array}$

x: (-5; 1)
y: (-5; 3)
z: (-5; -1)

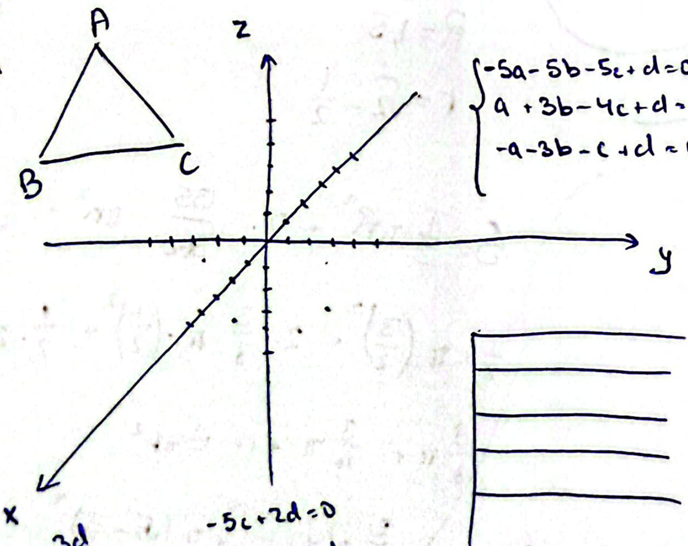
ABC

$13 = \frac{1}{2}\pi d_1$

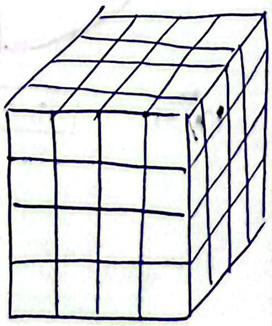
$21 = \frac{1}{2}\pi d_2$

$AC = \frac{1}{2}\pi$

$\pi r_1 + \pi r_2 = \pi(r_1+r_2) = \pi \cdot \frac{1}{2}d =$



$\begin{cases} -5a-5b-5c+d=0 \\ a+3b-4c+d=0 \\ -a-3b-c+d=0 \end{cases}$



$a = 0$
$b = -0{,}2d$
$c = 0{,}4d$

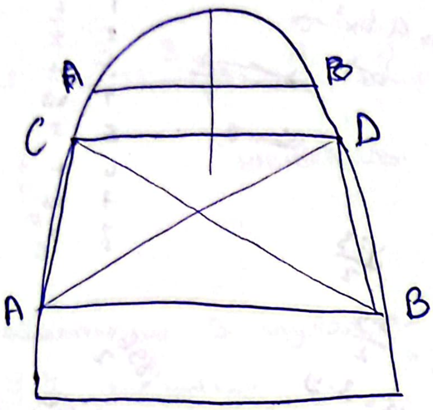
$5a + 15b = -3d$
$5a + 5b = -d$
$10b = -2d$
$b = -0{,}2d$

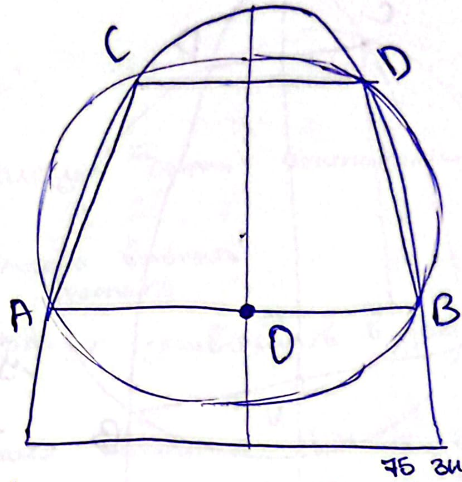
$-5c + 2d = 0$
$c = 0{,}4d$
$d - 4c$
$-0{,}6d - 3b$

$\begin{cases} 5a+5b = d - 5c = -d \\ c = 0{,}4d \\ a+3b = -0{,}6d \end{cases}$

72-23-17-57
(43.3)

Черновик





18

$y = a - bx^2$

75 знаков

24

999
скилли?

24 $\forall\ 1 \le m \le n$

$S(mn) = S(n)$

$(1000-1) \cdot 2$

ACDB - р/б трап.

O - центр

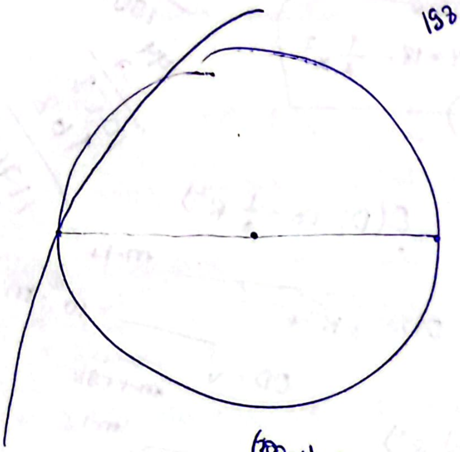
95 -

2000-1

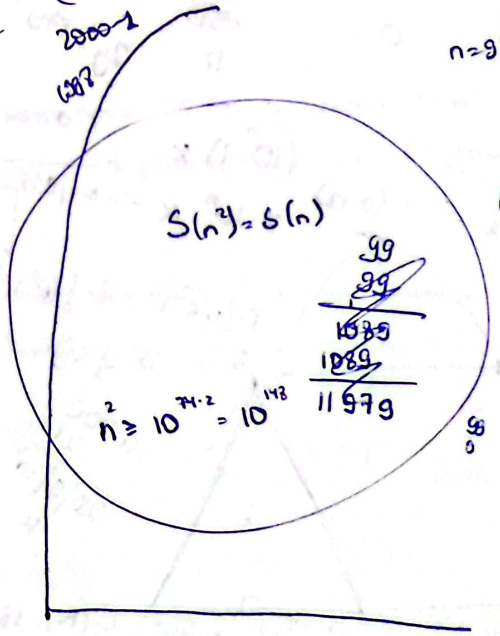
99

1998

$n = 9k$



198



$(100-1)^2$

$S(n^2) = S(n)$

99
~~99~~
1089
1089
11979

$n^2 \ge 10^{74 \cdot 2} = 10^{148}$

10000
10001

99

9801

$\begin{array}{r} 230000 \\ -\ 23 \\ \hline 229977 \end{array}$

$(100-1) \cdot 3$

99
11

300
3

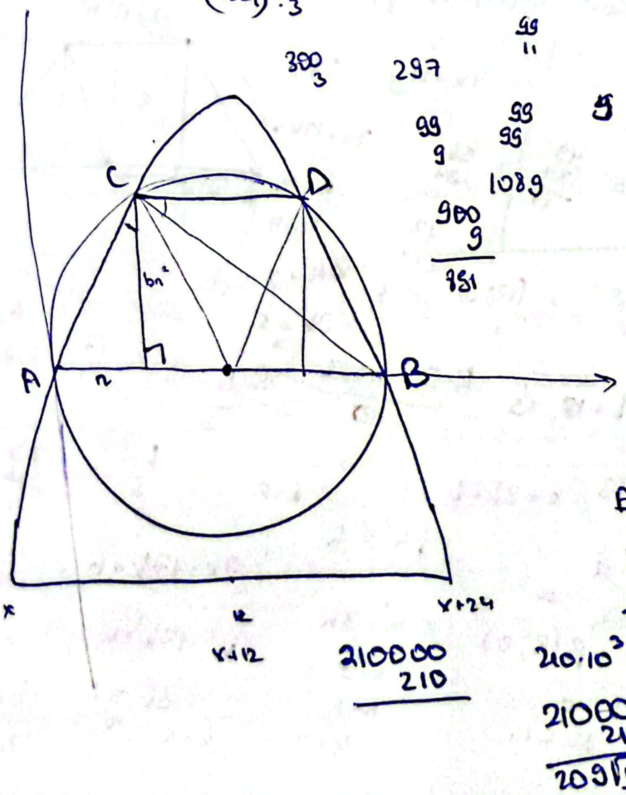
297

99
9

99
99

1089

$\begin{array}{r} 900 \\ 9 \\ \hline 891 \end{array}$



$a - bx^2 = a - b(x+24)^2 = 0$

$a - bx^2 = 0$

$a - b(x+12)^2 = 18$

$bx^2 - b(x+12)^2 = 18$

$bx^2 - bx^2 - 24bx - 144b = 18$

$24bx + 144b + 18 = 0$

~~$4bx + 36b$~~

$4bx + 24b + 3 = 0$

$10^n - 21$

$9n - t + 1$

$S = S(9n)$

~~A(0; a)~~

$A(0; a)$ $C(n; a - bn^2)$

$\begin{array}{r} 9999 \\ 21 \end{array}$

$\begin{array}{r} 10000 \\ 21 \end{array}$

$\begin{array}{r} 210000 \\ 210 \end{array}$

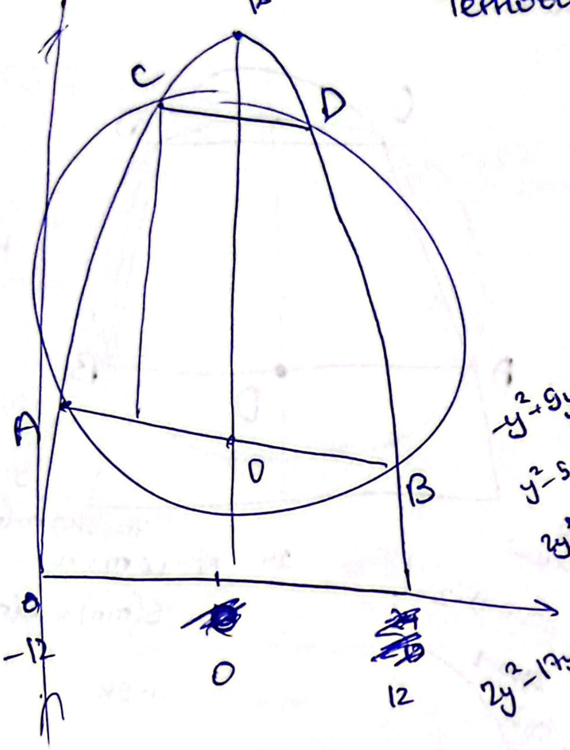
$210 \cdot 10^3$

$\begin{array}{r} 21000 \\ 21 \\ \hline 209 \end{array}$ 10^2

$S = S_n - S(t)$

209 99 −21 +1

Черновик



~~$a-bn^2$~~

$y = a-bx^2 = 0$

~~bx^2~~

~~$x=0$~~

1 ±
2 ±
3 ±
4 x3
5 ±
6 +
7 x3
8 ?

$-y^2+9y-6 = \frac{y-3}{2}$

$y^2-5y+6 = \frac{3-y}{2}$

$2y^2-18y+12 = 3-y$

$2y^2-17y+9=0$

~~$D = 18-12b^2$~~

$a=18$

$D = 18-12^2b$

$18 = 144b$

$b = \frac{18}{144} = \frac{2}{16}$

1896
2

1896
1896
3792

34
12
168
84

$y-x-3 = x-5$

$y-3 = 2x$

$y \cdot x+10 = y^2-8y+16$

$-x = y^2-9y+6$

$x = y$

$x = -y^2+9y-6$

$(10^n-1)x$

$x \cdot 10^n - x =$

x 000000
x
x-1 | 999...99 x

$\boxed{y = 18 - \frac{1}{8}x^2}$

2000
2
199

144
2
1008
168
1176
720
1296

(0; 18)

$D(\sqrt{R^2-h^2};\ 18-\frac{1}{8}(R^2-h^2))$

~~$D(x;\ 18-\frac{1}{8}x^2)$~~

$O(0;\ 18-\frac{1}{8}R^2)$

21000
21
20|9|10^{3k}
k

~~$OD = \sqrt{R^2}$~~

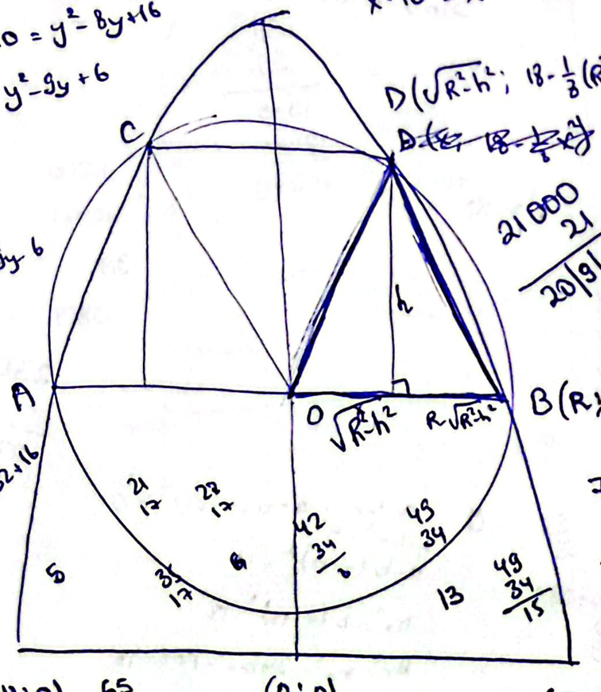
m-1+

$10^{76}-m$

$OD = \sqrt{\ }$

~~m-1+3k~~

m-1



$B(R;\ 18-\frac{1}{8}R^2)$

$-x+14 = 16-32+16$

$x=14$

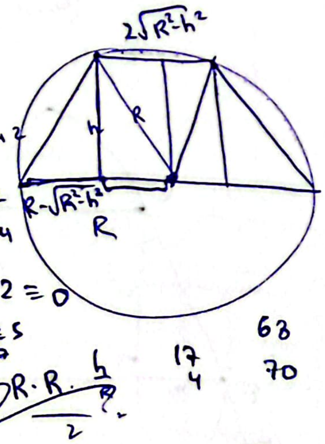
(-12; 0)
(0; 0)
(12; 0)

$7x+11y \ \vdots\ 17$

$7x = 17k+2$

~~$k=2$~~

$k=4$



56
84

22
17

5

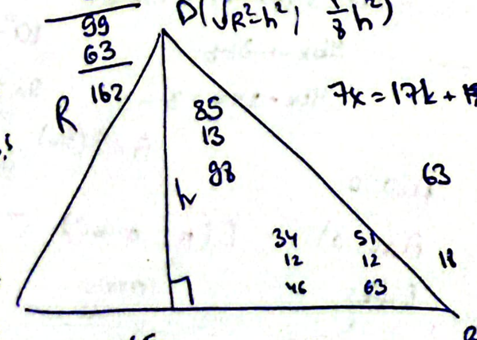
$3k+2 \equiv 0$

$3k \equiv 5$
7

65
34
99
63
162

7,5

$D(\sqrt{R^2-h^2},\ \frac{1}{8}h^2)$



$O(0;0)$

$B(R;0)$

R

$-36+54-6$

12 16,5

y^2-9y+6

$D = 81-24$
57

$\frac{9+\sqrt{57}}{2}$

65
63
34

18

35

63

$7x = 17k+13$

$x = 3k+6$

$3k+6 \equiv 0$

$3k \equiv 1$

~~$R \cdot R \cdot \sin$~~ $= \frac{R \cdot R \cdot \frac{h}{R}}{2}$

17
4

68
70

$\frac{hR}{2}$

35
6

01

$k=5$

$\frac{1}{8}h^2 = h$

$h^2 = 8h$

$h=0$

$h=8$

$k=4$

$7x = 17k+6$

$17k+6 \equiv 0$
7

$3k \equiv 1$
7

$k=5$

34
6

$k=7$

$7x=$

72-23-17-57 (43.3)

Чистовик

№1

В З З Н Н Н

В: 2
З: 4
Н: 7
У: 3

универсалы не могут быть вратарями
⇓
2 способа выбрать вратаря

Рассмотрим 3 случая — по кол-ву универсалов в защитниках.

① У У ⊔ ⊔ ⊔ (защита)

C_8^3 – для нападения остается 1 У и 7 Н, нужно трое

C_3^2 – число способов выбрать двух универсалов в защиту

② У Н (защита) ⊔ ⊔ ⊔

C_3^1 C_4^1 C_9^3 т.к. осталось 2 У и есть 7 Н

число способов выбрать 1 универсала и 1 защитника

③ З З ⊔ ⊔ ⊔ ← C_{10}^3 число способов выбрать троих из 7 Н и 3 У

C_4^2 число способов выбрать 2 защитников

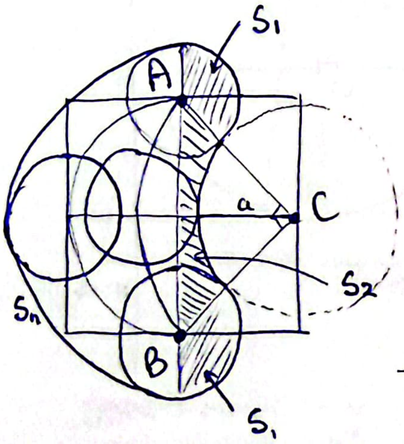
Всего способов выбрать игроков:

$$\underbrace{2}_{\text{вратарь}}\left(C_3^2\cdot C_8^3 + C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_9^3 + C_4^2\cdot C_{10}^3\right) = 2\left(3\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} + 3\cdot4\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2} + \frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}\right)$$

$$= 2(3\cdot56 + 12\cdot84 + 6\cdot120) = 2(168+1008+720) = 3792$$

Ответ: 3792

№2



$S = S_п + S_1\cdot 2 + S_2$

$S_п = \frac{1}{2}\pi R^2$ $\quad R = 1{,}5$

$S_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{8}\pi r^2$ $\quad r = 0{,}5$

$S_2 = S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{окр} = S_{ABC} - \frac{1}{4}\cdot\pi a^2$

$a = r_c - r = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 + 2\cdot\frac{3}{8}\pi r^2 + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{4}\cdot\pi a^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}\pi + \frac{3}{16}\pi + 1 - \frac{1}{4}\pi\left(2\frac{1}{4} - \sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{21}{16}\pi + 1 - \frac{9}{16}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi = \frac{3+\sqrt{2}}{4}\pi + 1$$

Ответ: $\frac{(3+\sqrt{2})\pi}{4} + 1$

Чистовик

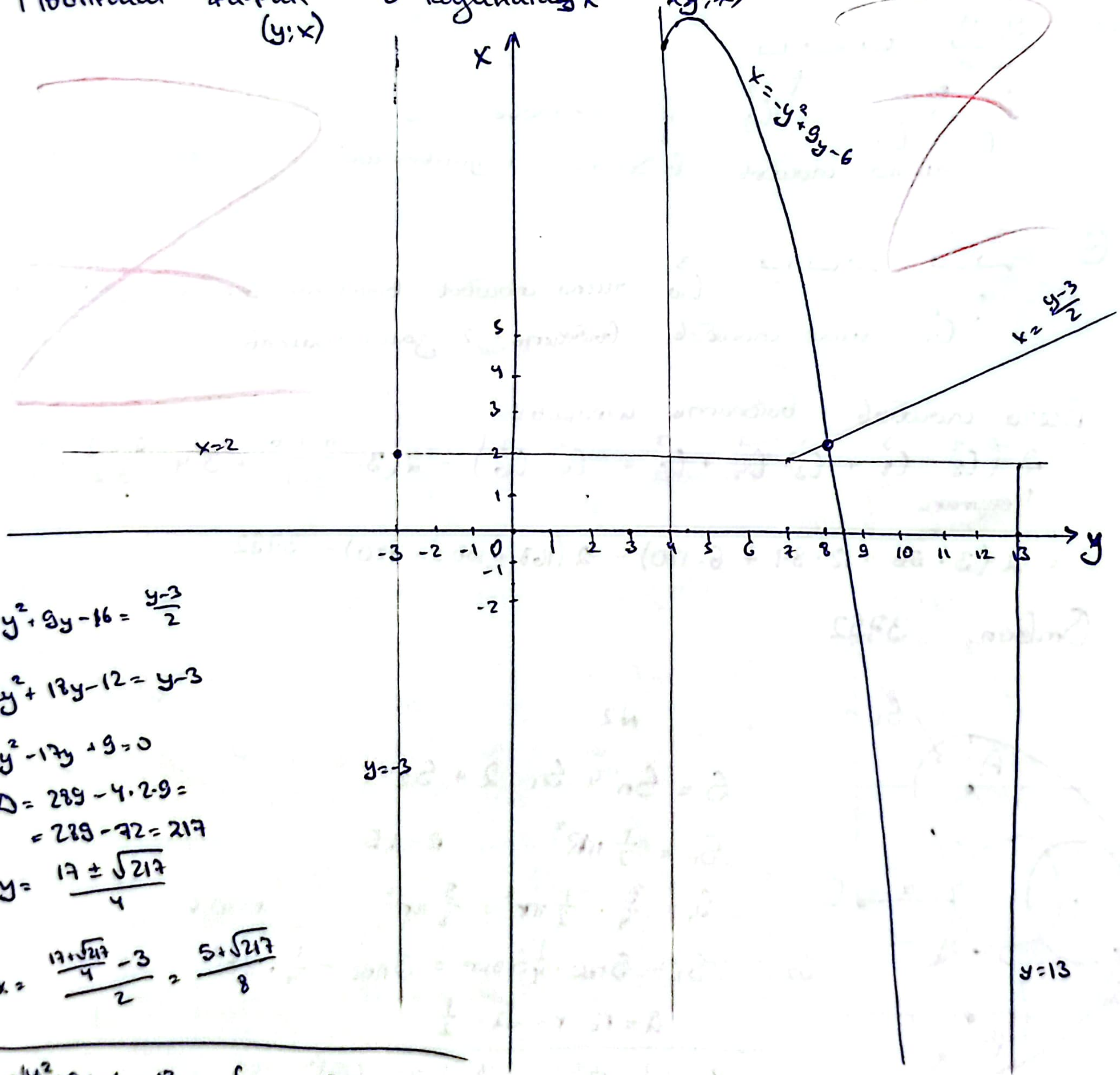
№3

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} xy+3x-2y-6=0 \\ \begin{cases} xy+3x-2y-6>0 \\ y-x-8=x-5 \end{cases} \\ \begin{cases} xy+3x-2y-6<0 \\ y-x-8=5-x \end{cases} \end{array} \right. \\ y-4\geq 0 \\ y-x+10 = y^2-8y+16 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (x-2)(y+3)=0 \\ \begin{cases} (x-2)(y+3)>0 \\ x=\frac{y-3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)(y+3)<0 \\ y=13 \end{cases} \end{array} \right. \\ y\geq 4 \\ x=-y^2+9y-6 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ $\cancel{x_0=\frac{9}{2}}$ $\cancel{y_0=14\frac{1}{4}}$ $y_0=\frac{9}{2}$ $x_0=14\frac{1}{4}$

Построим график в кодинатах $\cancel{(y;x)}$ $(y;x)$



$-y^2+9y-16 = \frac{y-3}{2}$

$-2y^2+18y-12 = y-3$

$2y^2-17y+9=0$

$D = 289-4\cdot 2\cdot 9 = 289-72 = 217$

$y = \frac{17\pm\sqrt{217}}{4}$

$x = \frac{\frac{17+\sqrt{217}}{4}-3}{2} = \frac{5+\sqrt{217}}{8}$

$-y^2+9y-6=13$

$\cancel{y^2-9y+19=0}$

$\begin{cases} x=-y^2+9y-6 \\ y=13 \end{cases}$

$x = -13^2+9\cdot 13-6 = -52-6 = -58$

Ответ: $(-58;\ 13)$, $\left(\frac{5+\sqrt{217}}{8};\ \frac{17+\sqrt{217}}{4}\right)$

Чистовик

№5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$

$f\left(1+\frac{4}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$

$x:=x+2$ $\quad f\left(1+\frac{4}{x}\right)=\frac{2}{x}$

$x:=\frac{1}{x}$ $\quad f(1+4x)=2x$

$x:=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ $\quad \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$

$g(x)=\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots)}_{12}$ $\qquad k=?$

$x=0$

$g(x)=f(f(f(\dots(f(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}))\dots=f(f\dots(f(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2})\dots=$

$=f(f(\dots(f(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2})-\frac{1}{2})\dots=$

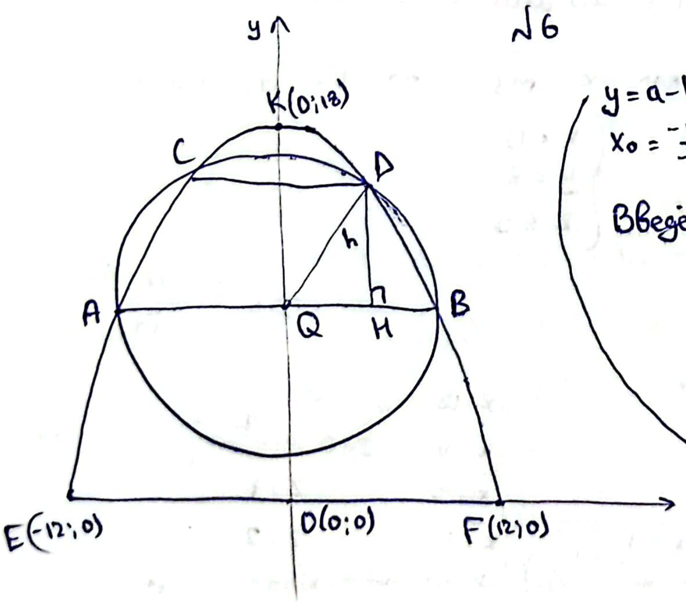
$=\underbrace{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\dots(\frac{1}{2}}_{12}x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2})\dots=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}x-\underbrace{\dots}_{const}$

$g'(x)=\frac{k}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{1}{2^{12}}$

$g'(x=0)=\frac{1}{4096}=k=tg\,\alpha$

Ответ: $\frac{1}{4096}$

№6



$y=a-bx^2$

$x_0=\frac{-0}{-2b}=0$

Введём прямоуг. сист. координат.

$O(0;0)$

$E(-12;0)$ } по усл. $EF=24$,

$F(12;0)$ } O – середина

$K(0;18)$ ← высота = 18

$\begin{cases}0=a-b\cdot 12^2\\ 18=a-b\cdot 0^2\end{cases}$ $\quad \begin{cases}a=18\\ b=\frac{1}{8}\end{cases}$

$y=18-\frac{1}{8}x^2$

$ABDC$ - трап. т.к. $CD \parallel AB \parallel Ox$

$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ => впис. трап.

} вокруг $ABDC$ можно опис. окр. с центром в Q – сер. AB, трап. $ABDC$ - р/б

} $\rho(AB;CD)=h$, радиус $=R$, ~~$Q(0;t)$~~

~~$QH=\sqrt{R^2-h^2}$ по т. Пифагора → $H(\sqrt{R^2-h^2};t)$, $B(R;t)$~~ ~~$B(\sqrt{R^2-h^2}$~~

~~Пусть $Q(0;t)$, тогда $B(R;t)$~~

см. продолжение →

Чистовик

$B(R;\ 18-\frac{1}{8}R^2)$ т.к. принадлежит параболе.

$QH=\sqrt{R^2-h^2}$ по т. Пифагора

$H(\sqrt{R^2-h^2};\ 18-\frac{1}{8}R^2)$

$D(\sqrt{R^2-h^2};\ 18-\frac{1}{8}(R^2-h^2))$ т.к. $\in$ параболе

$DH=\frac{1}{8}h^2$ но $DH=h$

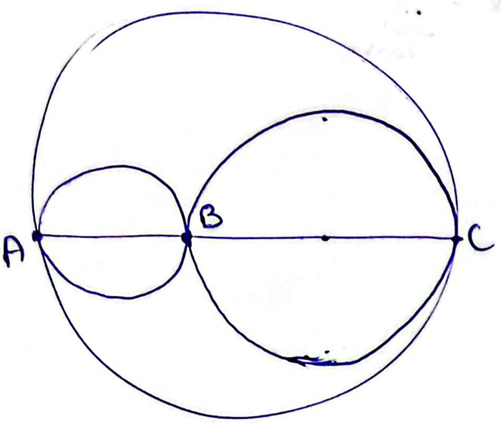
$\frac{1}{8}h^2=h$

$\left[\begin{array}{l} h=0 \\ h=8 \end{array}\right.$ не подходит

Ответ: 8

№4

	(км) длина	(мин) время
AB	13	7
BC	21	11
AC	34	17



длина $AC=\frac{1}{2}\pi D=\frac{1}{2}\pi(d_1+d_2)=$
$=\frac{1}{2}\pi d_1+\frac{1}{2}\pi d_2=|AB|+|BC|=13+21=34$

1 ч 25 мин = 85 мин

Пусть по AB он проезжал x раз, по BC – y, по AC – z

$\underbrace{7x+11y}_{\vdots 17}+\underbrace{17z}_{\vdots 17}=\underbrace{85}_{\vdots 17}$

$\begin{cases} x<12 \\ y<8 \\ z\le 5 \end{cases}$

$7x+11y \underset{17}{\equiv} 0$

$z=\frac{85-7x-11y}{17}$

$7x \underset{17}{\equiv} 6y$

$y=1$	$7x\equiv 6$	$7x\equiv 6$	$x=13$	$\varnothing$
$y=2$	$7x\equiv 12$	$7x\equiv 12$	$x=9$	$z=0$ ~~$z=\frac{85-7x-11y}{17}$~~
$y=3$	$7x\equiv 18$	$7x\equiv 1$	$x=5$	$z=1$
$y=4$	$7x\equiv 24$	~~$7x\equiv 7$~~ $x\equiv 1$	$x=1$	$z=2$
$y=5$	$7x\equiv 30$	$7x\equiv 13$	~~$x=14$~~ ~~$x=7$~~ $x=14$	$\varnothing$
$y=6$	$7x\equiv 36$	$7x\equiv 2$	$x=10$	$z<0$
$y=7$	$7x\equiv 42$	$x\equiv 6$	$x=6$	$z<0$

(9; 2; 0) → невозможно, (5; 3; 1) → возможно, (1; 4; 2) → невозможно

→ $S=13x+21y+34z=13\cdot 5+21\cdot 3+34\cdot 1=$
$=65+63+34=$ ~~135~~ 162

Ответ: ~~159 км~~ 162 км

Чистовик

№7

$S(mn) = S(n) \quad \forall m \in [1, n]$ 75-значное

$n = 10^{\cancel{76}\,75} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{75}$ $\quad S = 9 \cdot 75$

$mn = m(10^{\cancel{76}\,75} - 1) = m \cdot 10^{\cancel{76}\,75} - m$ → если $m \vdots 10$ вынесем $10^{v_{10}(m)}$ за скобки т.к. сумма нулей $= 0$, и будем рассматривать оставшееся выражение

↓

посчитаем в столбик

$$\begin{array}{r} \underbrace{\boxed{1}}_{m}\ 0000\ldots0 \\ - \qquad\qquad\qquad \boxed{m} \\ \hline \underbrace{\boxed{1}}_{m-1}\ \Big|\ \underbrace{999\ldots}_{k}\ \Big|\ \boxed{10^{\cancel{75}-k} - m} \end{array}$$

↑ сумма чисел $S(m-1)$ ↑ $\cancel{S(\ldots)}$ $S(9^k)$ ↑ $S(10^{76-k} - m)$

$$S(mn) = S(m-1) \cancel{+S(9^k)} + S(10^{\cancel{7}5-k} - m) + S(\underbrace{99\ldots9}_{k})$$

Лемма: ~~$S(t)+S(10^x-t)$~~ при $\overline{t \vdots 10}$:

$$S(t-1) + S(10^x - t) = 9x$$

$10^x - t = \underbrace{9\ldots9}_{x} + 1 - t$

$t = \overline{t_1 \ldots t_k}$

$$\begin{array}{r} 99\ldots9 \\ - \quad t_1\ldots t_k \\ \hline \underbrace{99}_{c}\boxed{9-t_1}\boxed{9-t_2}\ldots\boxed{9-t_k} \\ + \qquad\qquad\qquad 1 \\ \hline \underbrace{99\ldots}_{c}\boxed{9-t_1}\ldots\boxed{9-t_{k-1}}\boxed{10-t_k} \end{array}$$

$S(10^x - t) = 9c + 9 - t_1 + 9 - t_2 + \ldots + 10 - t_k =$

$= 9c + 9 \cdot (x - c) + 1 - t_1 - t_2 - \ldots - t_k = 9x + 1 - S(t)$

при $\overline{t \vdots 10}$ $\quad S(t-1) = S(t) - 1$

Значит, $S(t-1) + S(10^x - t) = S(t-1) + 9x + 1 - S(t) = 9x$

ЧТД.

$S(mn) = S(m-1) + \overset{9k}{\cancel{S(9^k)}} + S(10^{7\overset{5}{6}-k} - m) = 9k + 9(75-k) =$

$= 9k + 9 \cdot 75 - 9k = 9 \cdot 75 = S(n)$ $\Rightarrow$ $n = \underbrace{99\ldots9}_{75}$ подходит, и это наиб. число

Ответ: $\underbrace{999\ldots9}_{75} \cancel{= 10^{76} - 1} = 10^{75} - 1$