0 946030 750006

94-60-30-75
(39.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике

по ____________
профиль олимпиады

Куликова Дениса Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
94-60-30-75	64	8	4	12	8	12	12	8	0

лист 1 из 4

Чистовик

Задача 1

Если x - количество выбранных защитников из только защитников, y - соответствующее для нападающих, то способов всего выбрать $C_3^1\left(\sum_{\substack{x=0\\(x+y\geq 2)}}^{2}\sum_{y=0}^{3} C_5^x\cdot C_6^y\cdot C_3^{2-x}\cdot C_{x+y}^{3-y}\right)$

посчитаем отдельно выражение в скобках:

$C_5^0\cdot C_6^2\cdot C_3^2\cdot C_1^1 + C_5^0\cdot C_6^3\cdot C_3^2\cdot C_1^0 + C_5^1\cdot C_6^1\cdot C_3^1\cdot C_2^2 + C_5^1\cdot C_6^2\cdot C_3^1\cdot C_2^1 + C_5^1\cdot C_6^3\cdot C_3^1\cdot C_2^0 + C_5^2\cdot C_6^0\cdot C_3^0\cdot C_3^3 + C_5^2\cdot C_6^1\cdot C_3^0\cdot C_3^2 + C_5^2\cdot C_6^2\cdot C_3^0\cdot C_3^1 + C_5^2\cdot C_6^3\cdot C_3^0\cdot C_3^0 = 15\cdot 3 + 20\cdot 3 + 5\cdot 6\cdot 3 + 5\cdot 15\cdot 3\cdot 2 + 5\cdot 20\cdot 3 + 10 + 10\cdot 6\cdot 3 + 10\cdot 15\cdot 3 + 10\cdot 20 = 45 + 60 + 90 + 450 + 300 + 10 + 180 + 450 + 200 = 105 + 850 + 830 = 1785$

Ответ: 1785

Задача 3.

$|x^3+y^3-19| + |x^2y+xy^2+6| + \frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} = 0;$

$x;y \neq 0;$ $\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} = sign(y) - sign(x) + 2$;

что может принимать значения 4, 2, 0 => т.к. модуль ≥ 0,

все получается система $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2=-6 \\ x>0; y<0 \end{cases}$ =>

=> $(x+y)^3 = 19 - 3\cdot 6 = 1$ => $x+y=1$ =>

$x^2y+xy^2 = xy = -6$ => $x=3$, $y=-2$

Ответ: $x=3; y=-2$

лист 2 из 4

Чистовик

Задача 5.

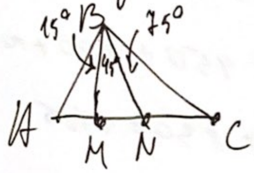
$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\dots = 3-(a+b+c)+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}$

Б.О.О. $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow$ По транснеравенству $\frac{ab}{a}+\frac{ac}{c}+\frac{bc}{b} \geq \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \Rightarrow \frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\dots \geq$

$3-(a+b+c)+(a+b+c)=3$ — минимальное значение, достигается при $a=b=c$

Ответ: 3

Задача 4



заметим, что т.к $15° < 45°$, то точки стоят именно в таком порядке: A, M, N, C;

$3 = S_{ABM}\cdot S_{BNC} = \frac{1}{4} AB\cdot BM\cdot NB\cdot BC\cdot \sin 15°\cdot \sin 75° =$

$= \frac{1}{4} S_{ABC}\cdot S_{MBN} : \frac{\sin 45°\cdot \sin(15°+45°+75°)}{\sin(15°)\cdot \sin(75°)} =$

$= \frac{1}{4}\cdot S_{ABC}\cdot S_{MBN} : \frac{\sin^2 45°}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 15°\cos 15°} =$

$= \frac{1}{4} S_{ABC}\cdot S_{MBN} : \frac{4}{\sin 30°} = \frac{1}{8} S_{ABC}\cdot S_{MBN} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC}\cdot S_{MBN} = 24$; $S_{MBN} = S_{ABC} - (S_{ABM}+S_{BNC}) =$

$= S_{ABC} - 5 \Rightarrow \frac{24}{S_{ABC}} = S_{ABC} - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = 8$ или $-3 \Rightarrow S_{ABC} = 8$

Ответ: $S_{ABC} = 8$

лист 3 из 4

Чистовик

Задача 6.

т.к. AC – диаметр большей окружности, то сумма радиусов окружностей (AB) и (BC) (в скобках я отмечаю окружность, построенная на данном отрезке, как на диаметре) равняется радиусу (AC), соответственно $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 40$ км.

1 час 25 мин $= 85$ мин $= 17 \cdot 5 = 7 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 17 =$
$= 5 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 17$, но из точки A автомобиль попал в A $\Rightarrow$ 5 раз по AC он не мог ездить и 1 раз по 7, 4 раза по 11, 2 раза по 17 – также, а третий вариант подходит $\Rightarrow$ проехала машина соответственно $5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 = 75 + 75 + 40 = 190$ км

Ответ: 190 км

Задача 7

Если высота тунеля $= 18 \Rightarrow a = 18$ в уравнении $y = a - bx^2$

ширина $= 24 = \left| \frac{\sqrt{D}}{-2b} - \frac{-\sqrt{D}}{2b} \right| = \frac{\sqrt{4ab}}{b} = \frac{\sqrt{4 \cdot 18 \cdot b}}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 18 - \frac{x^2}{8}$; пусть $A = (-c; 18 - \frac{c^2}{8})$;

$D = (d; 18 - \frac{d^2}{8})$; $B = (c; 18 - \frac{c^2}{8}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BD} = 0$; $\overline{AD} = (d + c; -\frac{1}{8}(c^2 - d^2))$;

$\overline{BD} = (d - c; -\frac{1}{8}(c^2 - d^2)) \Rightarrow d^2 - c^2 = -\frac{1}{64}(c^2 - d^2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{8}(c^2 - d^2) = \rho(AB; CD) = \frac{1}{8}$

Ответ: $\frac{1}{8}$

лист 4 из 4 Чистовик

Задача 2

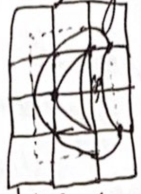


рис. 1

Заметим, что ~~площадь~~ фигура цельная, границы ее следующие: полуокружность из 0,0 с радиусом 1,5; четверть окружности радиуса 0,5 из (0,1); смещенная на 0,5 меньшая дуга и четверть окружности радиуса 0,5 в точке (0;-1) $\Rightarrow$ площадь фигуры $= \frac{\pi \cdot (1{,}5)^2}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (0{,}5)^2 + \left(0{,}5 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \frac{(\sqrt{2})^2}{2}\right)\right) =$

$$= \frac{\pi \cdot (2{,}25 + 0{,}25)}{2} + \left(1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 2{,}5}{2} + 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(2{,}5 - 1)}{2} + 2 = \frac{1{,}5\pi}{2} + 2$$

Ответ: $\frac{1{,}5\pi}{2} + 2$

Задача 8

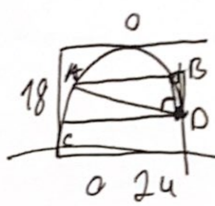
Черновик

$S(n) = S(mn)\ \forall m < n;\ m, n \in \mathbb{N};\ 10^{100} \le n < 10^{101}$

$S(n)$

Черновик

$(2x)^2$

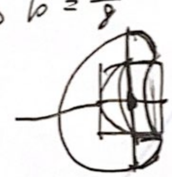


$= |x_1 - x_2| = 24$

$18 \quad \frac{\sqrt{4ab}}{2b} \quad \frac{\sqrt{4ab}}{b} = 24$

$\frac{\sqrt{4 \cdot 18 b}}{b} = 24 \Rightarrow 6\sqrt{\frac{2}{b}} = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{b}} = 4 \Rightarrow \frac{2}{b} = 16 \Rightarrow b = \frac{1}{8}$



$18 - \frac{1}{8}x^2$

$c ; -c$

$d ; -d$

$c ; 18$

$\overline{AD} = \left(d+c ; -\frac{1}{8}(d^2 - c^2)\right)$

$\overline{BD} = \left(d-c ; -\frac{1}{8}(d^2 - c^2)\right)$

$\sqrt{d^2-c^2} \quad \frac{1}{8}(d^2+c^2)$

$64 = c^2 - d^2$

$v - u = \frac{1}{64}(v^2+u^2+2vu) \Rightarrow$

$\Rightarrow v^2+u^2+2vu-64v+64u = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (v-32)^2 + (u+32)^2$

$(d^2-c^2) + \frac{1}{64}(d^2+c^2)^2 = 0$

$x + \frac{1}{64} \qquad 64(c^2-d^2) = (d^2+c^2)^2$

$c^2 = 8$

u

Черновик

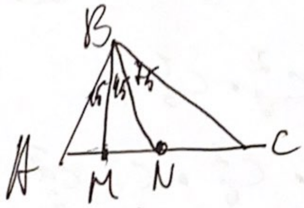
$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}$ 3

$3-(a+b+c)+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$

Если $a=b=c$

$\frac{a+b+c}{3} >$ $a \geq b \geq c$ $\frac{ab}{c}+\dots \geq$

$\geq \frac{bc}{c}+\frac{ac}{a}+\frac{ab}{b}$



$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$S_{ABM}+S_{NBC}=5$

$S_{ABC}=5+S_{BMN}$! S_{ABC}

$AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC$

$\frac{3 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 135^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ} = \frac{3 \cdot \sin^2 45^\circ}{\sin(45^\circ-30^\circ) - \sin(4}$

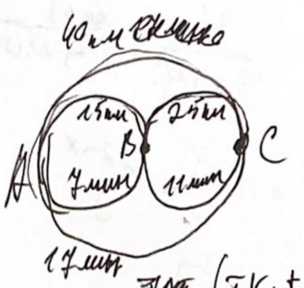
$\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ $-1-2n$ и $1+n$

$85 = 7a+11b+17c$ $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ $a+2b=3$ -3

$S_{ABC} \cdot S_{MBN} = 24$ $1-2n$ и $1+n$

$S_{ABC}-5 = S_{BMN}$ $22-21=1$ $-34-11n$ $51+7n$ 10 и 23

$-2-11n$; $3+7n$



$\frac{24}{S_{ABC}} = S_{ABC}-5 \Rightarrow S_{ABC}=8$ км -3

$7a+11b=17$

$(\pi r_1 + \pi r_2) \cdot \frac{}{\pi}$ 7 $(7, 11)$ (a, b)

$85 = 5 \cdot 17$ $(7, 4)$ $(a, b-a)$

68 $(3, 4)$ $(2a-b, b-a)$

$7+11=$ 51 $7a+11b \vdots 17$ $(3, 1)$ $(2a-b, 2b-3a)$

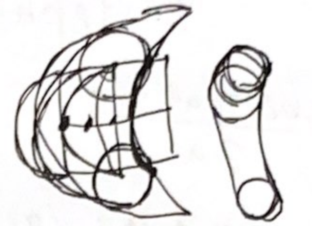
$44+7$ $33+35$ $7a \equiv_{17} 6b$ $2 \cdot 7 - 3 \cdot 11$

Черновик

1 | В
2 | З
3 | М

←

3 | В
5 | З
6 | М
3 | У – [В, З, М]



$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3 + C^1$

$C_3^1 \big(C_5^2 \cdot C_6^3 + C_5^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^1 +$

$+ C_5^0 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 + C_5^2 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 +$

$+ C_5^1 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_5^0 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 +$

$+ C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_6^1 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 + C_5^2 \cdot$

$\cdot C_6^0 \cdot C_3^3 \big)$

$C_5^x \cdot C_6^y \cdot C_3^{2-x} \cdot C_{3-(2-x)}^{3-y}$

$C_5^x \cdot C_6^y \cdot$

$$\sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} C_5^x \cdot C_{x+1}^{3-y} \cdot C_6^y \cdot C_3^{2-x}$$

$(x+y>2)$

$\frac{3!}{(3-y)!(x+y-2)!(2-x)!}$

$\boxed{3-y}\boxed{x+y-2}\boxed{2-x}$

$$\frac{5! \cdot \cancel{(x+1)!} \cdot 6! \cdot 3!}{x!(5-x)! \cdot (3-y)!(x+y-2)!\, y!(6-y)!(2-x)!\cancel{(x+1)!}}$$

$(2-x)! \cdot$

$\frac{(5-x)!}{(2-x)!} = (5-x)(4-x)(3-x)$

$\frac{3!}{(3-y)!\,y!} \cdot \frac{y!}{(x+y-2)!(2-x)!}$

$C_5^x \cdot C_6^y \cdot C_3^y \cdot C_y^{2-x}$

$C_5^x \cdot C_{x+1}^{3-y} \cdot C_3^{2-x} \cdot C_{x+1}^{y-3}$

$C_3^{2-x} \cdot C_{2-x}^{3-y}$

$\cancel{(x-y)^4}$ $\frac{x^4 + y^4}{x-y} - 13 \le 4 \Rightarrow \frac{x^4 - y^4}{x-y} \le 17$