0 434009 570002

43-40-09-57
(40.47)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход.
13:58 – 14:02

Вариант 15

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ластенко Александра Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	8	12	12	12	12	0	0	56

56 (непроверено шесть)

43-40-09-57 (40.17)

Черновик

$x=0 \quad f(-1) = -1$

$x=2 \quad f(0) = -\frac{1}{2} \qquad f(0) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3} \quad f\left(\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{2}{7} \quad f\left(\frac{-\frac{12}{7}}{\frac{16}{7}}\right) = f\left(-\frac{3}{4}\right) =$

$\frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{2}$

$4-2x = x+2$

$x = \frac{2}{3}$

$\frac{x-2}{x+2} = -\frac{3}{4}$

$8-4x = 3x+6$

$x = \frac{2}{7}$

$f(f(x)) = f\left(\frac{-\frac{2}{x+2}+2}{-\frac{2}{x+2}+2}\right) = f\left(\frac{-6-2x}{2+2x}\right) = -\frac{2}{-\frac{3}{x+2}+2} = -\frac{x+2}{x+1} = -1-\frac{1}{x+1}$

$t = xy + 2x - y - 2$

$\sqrt{y-x+8} = y-5$

$y-x+8 = y^2-10y+25 \quad y \geq 5$

$y^2 - 11y + 17 + x = 0$

$D = 121 - 68 - 4x = 53 - 4x$

$53 \geq 4x \quad x \leq \frac{53}{4}$

$t|y-x-10| = (x-4)|t|$

$x(y+2) - (y+2) = 0$

$(x-1)(y+2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} xy+2x-y-2=0 \\ \begin{cases} xy+2x-y-2>0 \\ |y-x-10| = x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} |y-x-10| = 4-x \\ xy+2x-y-2<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x>1 \\ |y-x-10| = x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} |y-x-10| = 4-x \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x>4 \\ \left[\begin{array}{l} y-x-10 = x-4 \\ y-x-10 = 4-x \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y-x-10 = 4-x \\ y-x-10 = x-4 \end{array}\right. \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x>4 \\ \left[\begin{array}{l} 2x = y-6 \\ y = 14 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 14 \\ 2x = y-6 \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right.$

$x=1: \quad y^2 - 11y + 18 = 0$

$D = 121 - 72 = 49$

$y = \frac{11 \pm 7}{2} = 9; 2 \quad$ но $y \geq 5$

$y = 9$

$x>4: \quad 2x = y-6$

$2y^2 - 21y + 28 = 0$

$D = 441 - 224 = 217$

$y = \frac{21 \pm \sqrt{217}}{2}$

$y = \frac{21+\sqrt{217}}{2}$

$2y^2 - 21y + 34 + 6 = 0$

$2y^2 = 21y$

$\begin{array}{r} 353 \\ -26 \\ \hline 93 \end{array} \quad 353 | 12$

$\begin{array}{r} 441 \\ -88 \\ \hline 353 \end{array}$

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 4 \\ \hline 224 \end{array}$

$\begin{array}{r} 441 \\ -224 \\ \hline 217 \end{array}$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 196 \end{array}$

$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 441 \end{array}$

1 2 3

В 3 Н

3

$C_4^2 \cdot C_7^3 + C_5^1 \cdot C_4^3 + C_6^2 \cdot C_7^3 +$

$+ C_4^3 \cdot C_7^3 =$

$= \frac{10 \cdot 4! \cdot 2}{2 \cdot 3!}$

$C_4^2 \cdot C_{10}^3 + 3 \cdot 4 \cdot 7 +$

~~$y=14: \quad x = 11y - 17 - y^2 = 254 - 17 - 196 = 41$~~

~~$y^2 - 11y + 53 = 0 \quad D = 121 - 4 \cdot 53 < 0$~~

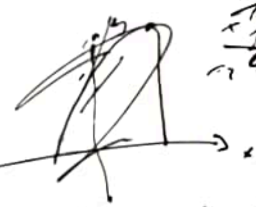
$y = 14: \quad 196 - 254 + 58 = 0$

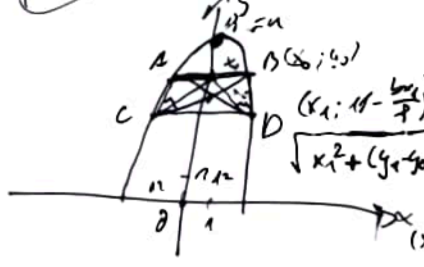
$y = 14: \quad x = 154 - 17 - 196 = -59$

$x = -59$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 11 \\ \hline 154 \end{array}$

$\begin{array}{r} 196 \\ +17 \\ \hline 213 \\ -154 \\ \hline 59 \end{array}$





$y^2 = x$

$B(x_0; y_0)$

$(x_1; 18 - \frac{6x_1^2}{7})$

$\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y_0)^2} = x_0$

$y = 18 - \frac{6}{7}x^2 \qquad y = 18 - 6x^2$

$x_1^2 - x_0^2 + (y_1 - y_0)^2 = 0$

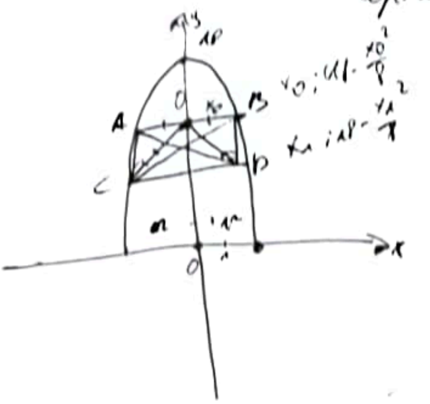
$(x_1^2 - x_0^2) + (18 - \frac{6x_1^2}{7} - 18 + \frac{6x_0^2}{7}) = 0$

$x_1^2 - x_0^2 = f(x_1 - x_0)^2 = 0$

$k \cdot 12^2 = 18$

$k = \frac{18}{12^2} = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$

Черновик



$18 = b \cdot 12^2$

$b = \frac{18}{12^2} = \frac{1}{8}$

$O(0; \frac{18 \cdot x_0^2}{8})$

$x_0 = \sqrt{x_1^2 - (\frac{x_1^2}{8} - \frac{x_0^2}{8})^2}$

$x_0^2 - x_1^2 = \frac{1}{64}(x_1^2 - x_0^2)^2$

$64 = x_1^2 - x_0^2$

$x_1^2 = 64 + x_0^2$

$\rho(AB; CP) = y_1 - y_0 = \frac{1}{8}(x_0^2 - x_1^2) = 8$

при $x=2$: $f(0) = -\frac{1}{2}$

$7x + 11y + 19z = 85$

$\frac{\frac{k-1}{2} - 1}{2} = \frac{k-3}{4}$

$\pi r = 4$

$\pi R = 11$

$f(1 - \frac{4}{x+2}) = -\frac{2}{x+2}$

$V_r = \frac{13}{7}$

$V_R = \frac{21}{11}$

$\pi r = 13 \quad r = \frac{13}{\pi}$

$\pi R = 21 \quad r = \frac{21}{\pi}$

$R + r = \frac{34}{\pi} \Rightarrow AC = 34$ км

$V_{R+r} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$

$3 - 2x \quad 3 \cdot$

$7x + 11y = 85$

$34 \cdot 5 = 170$ км

$f(0) = -\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

$f(-\frac{3}{4}) = -\frac{7}{8}$

$f(-\frac{7}{8}) = -\frac{15}{16}$

$f(-\frac{15}{16}) = -\frac{31}{32}$

$f(-\frac{31}{32})$

$11n \equiv 4n$

$4n = 1$

$n = 2$

$f(k) = \frac{k-1}{2}$

$85 \equiv 1$

$11 \equiv 4$

$7x + 11(y-1) = 57$

$k = 1 + 2t$

$t = \frac{k-1}{2}$

$f(1 + 2t) = t$

$f(k) = \frac{k-1}{2}$

43-40-09-57 (40.47)

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2| \quad (I) \\ y^2-11y+17+x=0 \quad (II) \\ y \geq 5 \end{cases}$$

Рассмотрим I ур-е с условием $y \geq 5$.

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|(x-1)(y+2)| \\ y \geq 5 \Rightarrow y+2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x>1 \\ |y-x-10| = x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ |y-x-10| = 4-x \end{cases} \end{array}\right. \\ y \geq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} 2x=y-6 \\ y=14 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ y=14 \\ 2x=y-6 \end{cases} \end{array}\right. \\ y \geq 5 \end{cases}$$

Подставим каждый случай в систему для проверки и дорешивания:

$$\begin{cases} x=1 \\ y^2-11y+18=0 \\ y \geq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{11 \pm 7}{2} \\ y \geq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$$

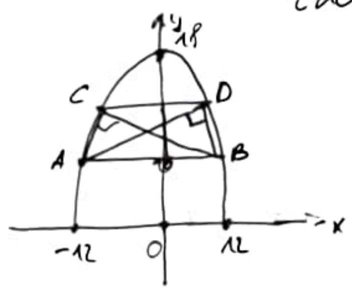
$$\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 5 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y^2-21y+28=0 \\ x=\frac{y-6}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=154-14-17 \\ y=14 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 5 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{21 \pm \sqrt{217}}{4} \\ x=\frac{y-6}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-59 \\ y=14 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 5 \\ y=\frac{21+\sqrt{217}}{4} \\ x=\frac{\sqrt{217}-3}{8} < 4 \end{cases}$$

Нет решений

$$\begin{cases} x<1 \\ y \geq 5 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=14 \\ x=-59 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{21+\sqrt{217}}{4} \\ x=\frac{\sqrt{217}-3}{8} > 1 \Rightarrow \text{не подх.} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y=14 \\ x=-59 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 9)$, $(-59; 14)$

Чистовик №6



$y=a-bx^2$ вершина этой параболы находится в точке $-\frac{0}{2}=0$. Высота хода 18, и значит $a-b\cdot0^2=18$ $a=18$, Пол имеет ширину 24 и является отрезком на оси Ox ⇒ т.к. графиком – парабола с вершиной в $(0;18)$, то пол это отрезок $[-12;12]$, и значит $18-b\cdot12^2=0$ $b=\frac{18}{144}=\frac{1}{8}$. Получаем параболу $y=18-\frac{1}{8}x^2$. На AB опираются $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ ⇒ ABCD – вписанный и AB – диаметр окружности. И т.к. $AB \parallel CD \parallel Ox$, то ABCD – р/б вписанная трапеция (не квадрат, т.к. A, B, C, D – разные точки на параболе). Пусть у точки B координаты $(x_0;y_0)$ $y_0=18-\frac{x_0^2}{8}$, тогда возьмём точку O – середину AB и центр окружности, описанной вокруг ABCD, её координаты будут $(0;y_0)$, т.к. парабола симметрична относительно Oy. Тогда OB=OD – радиусы. Пусть у D координаты $(x_1;y_1)$ $y_1=18-\frac{x_1^2}{8}$. OB=OD $x_0=\sqrt{x_1^2+(y_1-y_0)^2}$

$x_0^2-x_1^2=(18-\frac{1}{8}x_1^2-18+\frac{1}{8}x_0^2)^2$

$x_0^2-x_1^2=\frac{1}{64}(x_0^2-x_1^2)^2$ $(:(x_0^2-x_1^2)$, т.к. $x_0\neq x_1$

$64=x_0^2-x_1^2$

$\rho(AB;CD)=y_1-y_0=18-\frac{1}{8}x_1^2-18+\frac{1}{8}x_0^2=\frac{1}{8}(x_0^2-x_1^2)=\frac{64}{8}=8$

! AB не может располагаться выше CD, т.к. иначе у трапеции диаметром описанной окружности будет меньшее основание, чего не может быть

Ответ: 8.

№4

Пусть у окружности с дугой AB радиус r, у окружности с дугой BC радиус R, тогда у большой окружности с дугой AC радиус R+r

$\pi r=13$ км $r=\frac{13\text{км}}{\pi}$

$\pi R=21$ км $R=\frac{21\text{км}}{\pi}$

$R+r=\frac{34\text{км}}{\pi}$ ⇒ длина дуги AC равна $\pi(R+r)=34$ км.

1 час 25 мин = 85 мин

$85=17\cdot5$ ⇒ автомобиль мог 5 раз просто проехать по AC дуге, но тогда бы он не вернулся в A.

43-40-09-57
(40.47)

Чистовик

№6. Продолжение

Но рассмотрим другие случаи:
Пусть автомобиль проехал n раз дугу AC, x дугу AB, y дугу BC:
$n=0$: $7x+11y=85$

Видно частное решение $x=9, y=2$ $7x+11y=7\cdot 9+2\cdot 11$
$7(x-9)=11(2-y)$

$\begin{cases} x=11k+9 \\ y=2-7k \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

Кроме $x=2; y=9$ не подходят решения, т.к. $x,y\in\mathbb{N}_0$
$n=0; x=9; y=2$ тоже не подходит, т.к. получается, что автомобиль

5 раз выехал из точки A и 4 раза в неё въехал $\Rightarrow$ не вернулся.

~~Вообще заметим, что если $n\,\vdots\,2$, то $(x+y)\,\vdots\,2$ тоже, чтобы автомобиль вернулся в A, чтобы путь мог существовать и автомобиль возвращался в A, откуда и стартовал.~~

$n=1$: $7x+11y=68$

Здесь видно частное решение $x=5; y=3$
$7x+11y=7\cdot 5+11\cdot 3$ $7(x-5)=11(3-y)$

$\begin{cases} x=11k+5 \\ y=3-7k \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

Кроме $(5;3)$ ничего не подходит. Этот случай подходит. Автомобиль мог проехать $A\to B\to C\to A\to B\to C\to B\to A\to B\to A$. И проехал бы он $5\cdot 13+3\cdot 21+34=65+63+34=162$ (км)
$n=2$: $7x+11y=51$

Здесь видно частное решение $(1;4)$. Других не будет, т.к. $y\in[0;4]$ и $(51-11y)\,\vdots\,7$ только при $y=4$. Но такой случай не подходит, т.к. $n+x=3\Rightarrow$ автомобиль выехал из A не столько же раз, сколько приехал туда, чего не может быть
$n=3$: $7x+11y=34$

Здесь решений нет, т.к. при $y\in[0;3]$ $(34-11y)\not\vdots\,7$.

$n=4$: $7x+11y=17$ Нет решений, т.к. $11<17$, $7<17$, $11+7>17$ и $14<17$.
Получается, что мог быть единственный случай, где он проехал 162 км

Ответ: 162 км.

Черновик

№5

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = f\left(1-\frac{4}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$ $\quad J\ t = -\frac{2}{x+2}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$f(1+2t) = t$ $\quad$ Пусть $k = 1+2t$ $\quad t = \frac{k-1}{2}$ $\quad k\in\mathbb{R}$

$f(k) = \frac{k-1}{2}$ или же $f(x) = \frac{x-1}{2}$ $\quad x \neq -2$

$f'(x) = \frac{1}{2}$

$g'(0) = (\underbrace{f(f(\dots f(0)))}_{11})'$

Заметим, что каждый раз, когда в $f(x)$ подставляем $f(\dots f(x))$, то коэффициент при x уменьшается в 2 раза. Например $\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$. Ведь единицы вычитаются из свободного члена, а потом всё, в том числе и x, делится на 2. $\Rightarrow g(x)$ – линейная функция с коэффициентом $\frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$ при $x \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2048}$

Ответ: $\frac{1}{2048}$

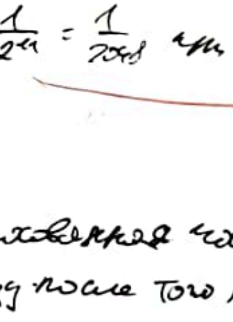
№2

Заштрихованная часть – то, что добавилось к месяцу после того, как точки превратились в круги радиуса $\frac{1}{2}$ – это полоса ширины $\frac{1}{2}$ и длиной в периметр месяца. Внутренняя незакрашенная часть – сам месяц изначальный. Площадь изначального месяца – половина площади окружности с центром в (0;0) и радиусом 1 минус четверть окружности с центром в (1;0) и радиусом $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ и плюс площадь треугольника с вершинами в (0;1), (0;-1), (1;0).

$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$ – площадь окружности с центром в O и радиусом 1

$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1 = S_{ABC}$

$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\sqrt{2}^2 = \frac{\pi}{2}$ – четверть площади окружности с центром в A и радиусом $\sqrt{2}$.



$AB = AC = \sqrt{2}$

$BC = 2 = \sqrt{AB^2 + AC^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по обрат. теореме Пифагора $\triangle ABC$ – п/у, $\angle BAC = 90°$, ~~…~~ $90 = \frac{360°}{4}$, но это мы берём $\frac{1}{4}$ окружности с центром в A

Чистовик

№2. Продолжение

Площадь изначального месяца $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1$

Периметр месяца − сумма дуг окружностей $= \pi + \frac{2\sqrt{2}\cdot\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Площадь места появившейся будет $\pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}$.

Суммарная площадь будет $1 + \frac{\pi\sqrt{2}+\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{\pi(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}+\pi+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.