47-65-71-75
(39.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лашина Михаила Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
47-65-71-75	80	12	8	12	0	12	12	12	12

80 (восемьдесят)

47-65-71-75
(39.4)

№1.

Пусть среди выбранных защитников:

• 0 универсалов:

3 вар выбрать вратаря;

$C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2}$ вариантов выбрать 2 зап.

$C_{6+3}^3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{6}$ вар. выбрать 3 защ (6+3 т.к. универсалы могут стать только зап.)

Вар. независимы ⇒

⇒ всего $3\cdot5\cdot2\cdot\cancel{4}3\cdot4\cdot7$ вар. = 2520

• 1 универсал

3 вар. вратаря

3 вар. выбрать 1 из универсалов на поз. зап.

5 вар. выбрать 1 зап.

$C_{6+2}^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{6}$ вар выбрать 3 защ (+2 т.к. осталось лишь 2 универсала (в защ.))

Всего: $3\cdot3\cdot5\cdot8\cdot7 = 2520$

• 2 универсала

3 вар. врат.

C_3^2 вар выбрать 2 зап. из универсалов

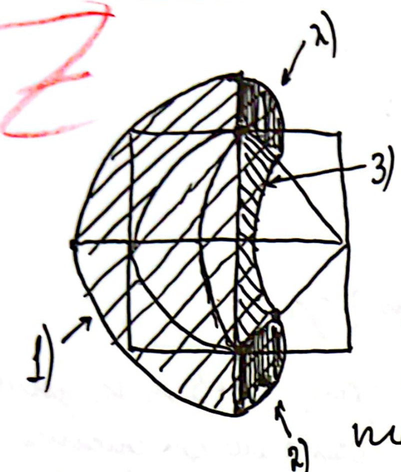
$C_{6+1}^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{6}$ вар. выбрать 3 нап (+1 т.к. остался 1 универсал (в защ.))

Всего: $\cancel{2}3\cdot\frac{3\cdot2}{2}\cdot7\cdot5 = 315$

Тогда в сумме: 2520+2520+315=5355

Ответ: 5355

№2.



~~1)~~ Заметим, что ~~как~~ если провести перпендикуляр к кас. к дуге, то длина отрезка, не лежащего в фигуре изначально, но лежащего в конечной фигуре и с концом в точке касания равна 0,5 (задание окружности „расплывания". ~~Теперь разобьём фигуру на 4 части: дуга окр. с центром в (0;0) и радиусом 1 перейдёт в дугу 1) половина окр. с центром в (0;0) и R = 1+0,5 = 1,5; 2) части кругов с центром в (0;1) и (0;-1) между прямой Oy и прямыми через точки (0;1) и (1;0), (1;0) и (0;-1) соотв. (вниз.)~~

Разобьём фигуру на 3 части

1) – половина круга радиуса $1+0,5=1,5$

2) – 2 части от окр радиуса $0,5$ (угл $=135^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{8}$ от окр. каждая)

3) $S_{\text{прямоуг. треуг}} - \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot S_{\text{окр. с } r=\sqrt{2}-0,5}$ т.к. ~~…~~ расст. от $(0;1)$ до $(1;0) = \sqrt{2}$, а радиус „растекания" $= 0,5$. =

$$S_1 = \pi r^2 = 2,25\pi = \frac{9\pi}{4}$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi r^2 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{0,75\pi}{4}$$

$S_3 = S_0 - \frac{1}{4} \cdot \pi(\sqrt{2}-0,5)^2$, $S_0 = \frac{1}{2}$ от прямоуг с верш. в $(0;1), (1;1), (0;-1), (1;-1)$ $= 1$

$$S_3 = 1 - \frac{\pi(2+0,25-\sqrt{2})}{4} = \frac{4-(2,25-\sqrt{2})\pi}{4}$$

47-65-71-75 (39.4)

$S_1+S_2+S_3=\dfrac{9\pi+0{,}75\pi+4-2{,}25\pi+\sqrt{2}\pi}{4}=\dfrac{(7{,}5+\sqrt{2})\pi}{4}+1$

Ответ: $\dfrac{(7{,}5+\sqrt{2})\pi}{4}+1$

№3.

$\dfrac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\dfrac{|y|}{y}-\dfrac{|x|}{x}+2$, т.к. другие 2 слагаемых ≥ 0 (т.к. модули), то $\dfrac{|y|}{y}-\dfrac{|x|}{x}+2\leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y<0;\ x>0$ (~~иначе~~ $\dfrac{|y|}{y}=\pm 1;\ \dfrac{|x|}{x}=\pm 1$) $\Rightarrow \dfrac{|y|}{y}=-1;\ \dfrac{|x|}{x}=1 \Rightarrow y<0;\ x>0$ и это слаг. $=0$.

Тогда сумма $=0$ тогда и только тогда, когда второе слаг. $=0 \rightarrow$

$\begin{cases} x^3+y^3=19 & (1)\\ x^2y+xy^2=-6 & (2)\\ x>0\\ y<0\end{cases}$ Сложим (1) и $3\cdot$(2):

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=19-18$

$(x+y)^3=1$

$x+y=1$ (3)

Вынесем (2):

$x^2y+xy^2=-6$

$xy(x+y)=-6$; Подставим (3)

$\begin{cases} xy=-6\\ x+y=1\\ x>0\\ y<0\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(3;-2)$ – подходит в систему

Ответ: $(3;-2)$

№5.

$\dfrac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\dfrac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\dfrac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\right)-$

$-(a+b+c)+3$. Для положительных $(x,y,z)=(ab^{>0},ac^{>0},bc^{>0})$ известно, что

$x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz \Rightarrow a^2bc+ab^2c+abc^2\leq a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$.

Разделим это на abc. $a+b+c\leq \dfrac{ab}{c}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{bc}{a} \Rightarrow$

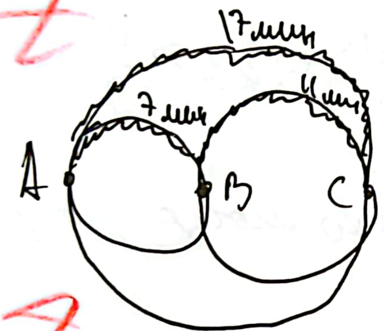
$\Rightarrow \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}-(a+b+c)\geq 0 \Rightarrow$ минимальное значение $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}-(a+b+c)+3=3$.

Пример: $a, b, c = 1$.

$$\frac{2-2+2}{2}+\frac{2-2+2}{2}+\frac{2-2+2}{2}=3$$

Ответ: 3

№6.



1) Назовём циклом такой путь, ~~[illegible]~~ из A в A (не проезжая A в середине), где машина проехала хотя бы 1 раз по дуге AC. Тогда время цикла равна $17\cdot 2$ (=34 мин) + сколько-то полных кругов по маленьким окр. (если по 2 дугам AC), или $17+7+11=35$ (если по дуге AC, дуге AB и дуге BC) + сколько-то полных кругов по мал. окр. (во время цикла A встречается только в начале и конце).

Пусть циклов было ≥ 3: время $\geq 34\cdot 3 > 85$ мин $\Rightarrow$ не подходит

Пусть циклов 2: от 68 мин до 70 мин + полные циклы по 14 и 22 мин, но 2 цикла слишком много ($14+14+68>85$), а 1 — слишком мало ($70+22<85$) $\Rightarrow$ не подходит.

Пусть ~~[illegible]~~ цикл 1: от 34 мин до 35 мин + полные циклы. 4 цикла $\geq 34+14\cdot 4 > 85$ мин, 2 цикла $\leq 35+22\cdot 2 < 85$ мин, 3 цикла подходит только 35 мин + 14 мин $\cdot 2$ + 22 мин = 85 мин $\Rightarrow$

47-65-71-75 (39.4)

$\Rightarrow \underbrace{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}_{35\text{ мин}} + \underbrace{4\overset{\frown}{AB}}_{14\cdot 2\text{ мин}} + \underbrace{2\overset{\frown}{BC}}_{22\text{ мин}}$;

$\overset{\frown}{AC} = \pi AC = \pi AB + \pi BC = 15$ км $+ 25$ км $= 40$ км $\Rightarrow$

$\Rightarrow 40$ км $+ 5\cdot 15$ км $+ 3\cdot 25$ км $= 190$ км

Если циклов нет:

$14x + 22y = 85$; x, y – полож. целые

~~$y = 0$: $14x = 85$; $x = \frac{85}{14}$ – не целое.~~

~~$y = 1$: $14x = 63$~~

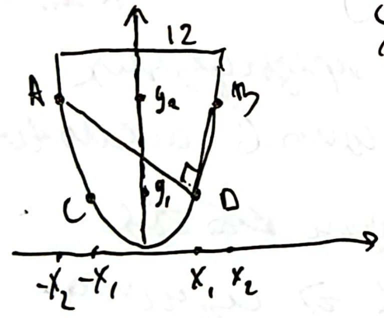
Но $2(7x + 11y)$ – четное, а 85 – нечет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет реш.

Ответ: 190 км.

№7.

Переместим сист. коорд. так, что парабола выражается так $y = kx^2$, и $k > 0$ (перевернём рисунок).



Тогда половина поля $= x$, высота $= y \Rightarrow k = \frac{18}{12^2} = \frac{1}{8}$

$AD^2 + BD^2 = AB^2$

$(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2(y_2 - y_1)^2 = 4x_2^2$

$2(y_2 - y_1)^2 + 2x_1^2 - 2x_2^2 = 0$

$x_1^2 = \frac{y_1}{k}$; $x_2^2 = \frac{y_2}{k} \Rightarrow$ Пусть $(y_2 - y_1) = t$.

$\Rightarrow t^2 - 8t = 0$; $t > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 8$ – и есть расстояние между балками AB и CD

Ответ: 8

№8.

Ответ: $\underbrace{9999\ldots99}_{100\ \text{девяток}}$

Очевидно, что это число — наибольшее из 100значных.

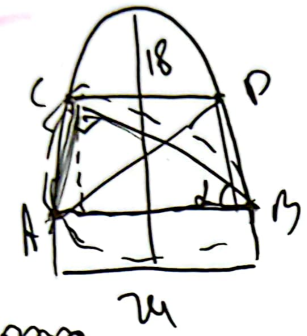
Умножать число X на $\underbrace{99\ldots9}_{100}$ значит умножить на 10^{100} и вычесть X. После умножения ~~на~~ мы приписали к числу X 100 нулей, а ~~при~~

Чтоб ~~вычесть~~ умножить на 99 X (у которого ≤ 100 знаков), надо $(X-1)\cdot 10^{100}+10^{100}-X$

$$X\cdot 99\ldots9 = X\cdot 10^{100}-X = (X-1)\cdot 10^{100} + (10^{100}-X),$$

а т.к. 2 выделенные части не пересекаются в знаках, то и сумма цифр у них сложится ($S(x\cdot 99\ldots9) = S((X-1)\cdot 10^{100}) + S(10^{100}-X)$).

Найдём I справа ненулевой разряд числа X. В нём цифры уменьш. на 1, в предыдущих станет $0\to 9$. Тогда очевидно, что в аналогичных разрядах числа $10^{100}-X$ будет ~~...~~ 9 — то, что в разряде X $\Rightarrow$ сумма цифр $= S(9\ldots9)$ ч.т.д.



2000999999

900009

999999

$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+$

$+(y_2+y_1)^2+(x_2-x_1)^2=$

$\frac{1}{8}x_1^2$ $\quad 4\cdot 12^2=18$ $\quad = 4x_2^2$

$2\cdot2\cdot3\cdot3$ $\quad 3\cdot3\cdot2$

$2x_1^2+\cancel{x_2^2}+2y_1^2+y_2^2=$

$k=\frac{1}{8}$ $\quad =2x_2^2$

$2(y_1-y_2)^2+(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2$ $\quad x_1^2+y_1^2+y_2^2=x_2^2$

99 $\quad 9_x+99_p$ $\quad 2y_1^2+2y_2^2-4y_1y_2$ $\quad 2x_1^2+\cancel{2x_2^2}$ $\quad =4x_2^2$

$8y_1$ $\quad 8y_2$

$a(a+8)$

$999_p+9_x\cdot 000$

$\boxed{y=\frac{1}{8}x^2}$

$x^2=8y$

$\boxed{}\,000-x$ $\quad 2(y_1-y_2)^2+16y_1=16y_2$

$y_1-y_2=t$

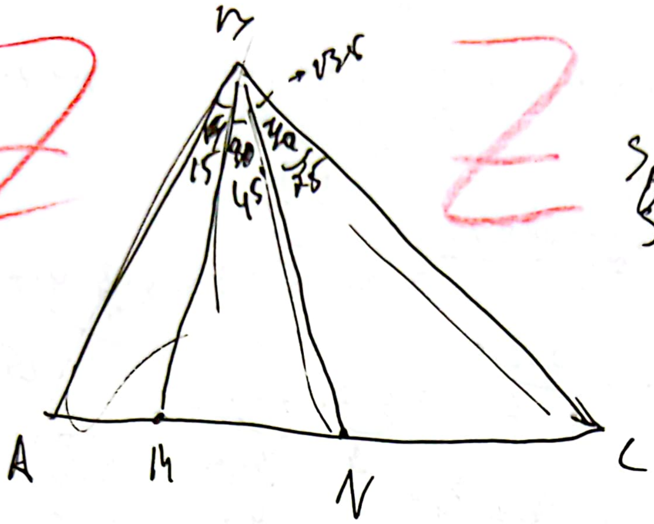
$10\cdot 99=990$ $\quad t^2-16t=0$

$1000-10=990$

$2\cdot 55$

$200\cdot 7$

198



$AM = a$

$NC = b$

$h(a+b) = 3$

$h^2 ab = 3$

$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a}$

$\frac{bc - a^2 + a}{a} =$

$\frac{bc}{a} - a + 1$

$\frac{ab \sin\alpha}{2}$

$ab \cdot \sin 15^\circ + cb \cdot \sin 75^\circ = 5$

$ab \cdot \sin 15 \cdot cb \cdot \sin 75 = 3$

60 / 51

$-(a+b+c) + \underbrace{\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}$

28+22

$bc \cdot \sin 45 + 5 =$

$= a \cdot b \cdot \sin 45^\circ$

$4+2+4 \geq 3\sqrt{abc}$ $a \geq b \geq c$

$\frac{bc}{a} - a$ $\frac{bc}{a} \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2\ldots$

$60+25 = 85$

$b^2c^2 - a^2bc = bc(bc - a^2)$

ab
bc
ac

$34 + 14 = 48 + 14$ 1 2 3

$a+b+c \geq \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$

$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

17 7 11

$35 - 34$; $6 + 12 + 18$ 4 9 36

51

$a^2 + b^2 + c^2$

$\geq ab + ac + bc$

14 50 36

34

$28+7 = 35$

22 62 … 70

$17+17$

$17+7+11$ 63 +2 88

$63+14 = 52$

$70+14 = 84$

34 … 35

$68 + 22 =$

6
1 вран
2 3
3 чел

36
53
6н
3у $\xrightarrow{33}$ н

0 зад - учит:

$\frac{3\cdot5\cdot4}{2}\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{6}=3\cdot5\cdot2\cdot3\cdot4\cdot7=3\cdot3\cdot4\cdot7\cdot10$

$\times\frac{36}{7}$ 2520

1 зад - учит:

$3\cdot3\cdot5\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{6}=3\cdot3\cdot5\cdot8\cdot7=3\cdot3\cdot4\cdot7\cdot10$

2 зад - уч

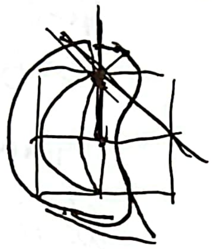
$3\cdot\frac{3\cdot2}{2}\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{6}=3\cdot3\cdot7\cdot5=$

2520

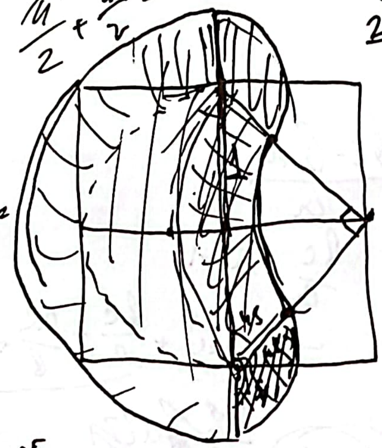
35 × 9 = 315

315

2520 + 2520 = 5040 + 315 = 5355



$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$



2π

360
135
175°

$14x+22y=-85$

2,7

5·17 $\frac{125}{2}=50+10+2,5$ 62,5

× 15
225

$4\cdot1,5^2\cdot\pi$

$\frac{1,25\pi}{2}=$

50 + 25 = $\frac{0,25\pi\cdot3}{8}$ 0,625

75

60+15=75 0,125

$\frac{2\pi-\pi(\sqrt{2}-0,5)^2}{4}$

$\frac{0,375\pi}{4}$

$\frac{1,25\pi}{2}=\frac{2,5\pi}{4}$ $2+0,25-\sqrt{2}$

+125
3
375

$(2,25-\sqrt{2})\pi$

$\frac{0,75\pi}{4}$

$\frac{(\sqrt{2}-0,25)\pi}{4}$

$|x^3+y^3-19|+$
$|x^2y+xy^2+6|+$
$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}$

$x,y\neq0$

$x>0$

$x>0$
$y<0$ $x,y\neq0$

$xy>0$ $yx<0$ $y<0$

$x^3+y^3+x^2y+xy^2=x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x+y)(x^2+y^2)$ $\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2$

$+2x^2y+2xy^2$

$2xy(x+y)$ $(x^2+y^2+2xy)(x+y)=(x+y)^3$