0 230536 860001

23-05-36-86
(40.33)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 лист Кр

+1 лист ВМ

Вариант 14

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лесных Луки Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Лесб

23-05-36-86 (40.33)

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
±	−	+	+	+	+	−	−	56
8	0	12	12	12	12	0	0	

56 (пятьдесят шесть)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

23-05-36-86 (40.33)

Если $y_1 = y_2$, все точки A, B, C, D лежат на одной прямой — тогда $\angle ADB \neq 90° \Rightarrow y_1 \neq y_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 - y_2 \neq 0 \Rightarrow$ на $(y_1 - y_2)$ можно ~~сокращать~~.

Чистовик 7

$8(y_1 - y_2) + 1 = 0 \mid \cdot \frac{1}{8} \neq 0$

$y_1 + y_2 + \frac{1}{8} = 0$

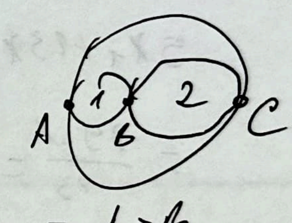
$y_1 + y_2 + 9 = 0$

$y_2 - y_1 = 9.$

6. Т.к. $CD \parallel Ox$ и $AB \parallel Ox$, то расстояние между ними равно модулю разности ~~координат~~ их точек.

$\rho(CD, AB) = |y_2 - y_1| = 9.$

Ответ: 9.



Задача 4.

~~1. Пусть было совершено x_1' перемещений $A \to B$, $x_2' - B \to A$, $y_1' - B \to C$, $y_2' - C \to B$, $z_1' - A \to C$, $z_2' - C \to A$.~~

1. Заметим, что при перемещении из A в C автомобиль совершает некоторое количество целых кругов по окружностям с диаметрами AB и BC и либо перемещение $A \to B \to C$ (по дугам AB и BC), либо $A \to C$ (по дуге AC), а из C в A — наоборот.

На каждое перемещение из A в C должно приходиться одно перемещение из C в A.

В таком случае пусть всего было сделано x_1 целых кругов по окружности 1, x_2 — по окр. 2, y_1 перемещений $A \to B \to C$ и $C \to B \to A$ и y_2 перемещений $A \to C$ и $C \to A$. Тогда $y_1 + y_2$ чётно.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Это заняло $2\cdot 5\cdot x_1+2\cdot 13\cdot x_2+(5+13)\cdot y_1+19\cdot y_2$ минут, что ~~вообще~~ это равно 1ч 35 мин, т.е. 95 минут.

$$10x_1+26x_2+18y_1+19y_2=95\ (x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z};\ x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0).$$

Если y_2 чётно, то вся сумма слева чётна, т.к. 95 нечётно, то y_2 должно быть нечётно.

Рассмотрим случаи:

Чистовик 8

I. $y_2=1$.

$10x_1+26x_2+18y_1+19=95$

$10x_1+26x_2+18y_1=76$

$5x_1+13x_2+9y_1=38$. $13x_2\leq 38\Rightarrow x_2\leq\frac{38}{13}=$

$=\frac{39-1}{13}=3-\frac{1}{13}<3\Rightarrow x_2=0,$ ~~или~~ $x_2=1$ или $x_2=2$.

1) $x_2=0$. $5x_1+9y_2=38$. $9y_2\leq 38\Rightarrow y_2\leq\frac{38}{9}<$

$<\frac{45}{9}=5\Rightarrow y_1\in\{0,1,2,3,4\}$. При

$-y_1=0$ $x_2=\frac{38}{5}\notin\mathbb{Z}$

$-y_1=1$ $x_1=\frac{29}{5}\notin\mathbb{Z}$

$-y_1=2$ $x_1=\frac{20}{5}=4\in\mathbb{Z}$; ~~$\Rightarrow$ возможен случай $x_1=4, y_1=2, x_2=0, y_2=1$.~~
но y_1+y_2 чётно, y_2 нечётно $\Rightarrow$ y_1 нечётно $\Rightarrow$
$\Rightarrow y_1\neq 2$.

$-y_2=3$ $x_1=\frac{11}{5}\notin\mathbb{Z}$

$-y_2=4$ $x_1=\frac{2}{5}\notin\mathbb{Z}$.

23-05-36-86 (40.33)

Черновик

1. 3в, 5г, 6н, 3 у = 31н

$$3\cdot\begin{pmatrix} 3x = 30 \\ 3y = 15 \\ yx = 18 \\ yy = 6 \end{pmatrix} = 3\cdot(45+24) = 369 = 210 - 3 = 207.$$

3.
$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)\,|y-x-8| = (x-4)\,|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3. \end{cases}$$

1) $xy+4x-y-4 = x(y+4)-1(y+4) = (x-1)(y+4)$

I. $(x-1)(y+4) \geq 0,\ y-x-8 \geq 0.$

$(x-1)(y+4)(y-x-8-x+4) = 0$

$(x-1)(y+4)(y-2x-4) = 0$

1. $x=1.$ $y-9 \geq 0 \Rightarrow y \geq 9.$

$\sqrt{y+9} = y-3$

$y+9 = y^2 - 2y + 9$

$y^2 - 3y = 0$

$\cancel{y=-3}$

$\cancel{y=0}$

2. $y=-4.$ $-12-x \geq 0 \Rightarrow x \leq -12.$

$\cancel{\sqrt{-x+6} = y-3 = -7}$

3. $y-2x-4=0 \Rightarrow y = 2x+4$

$2x+4-x-8 \geq 0$

$x \geq 4.$

$\sqrt{x+14} = 2x+1$

$x+14 = 4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

1) $y+10 \geq x$

2) $y \geq 3$

$(x-1)(y+4)$

1. $x-1 \geq 0,\ y-x-8 \geq 0.$

$y-8 \geq x$

$(x+1)(y+4)(y-x-8-x+4) \geq 0$

$-x+1 = 0 \Rightarrow x=-1$

$y+9 = y^2-6y+9$

$y^2-7y=0$

$\cancel{y=0}$

$y=7$ +

$-3+\sqrt{217} \geq 32$

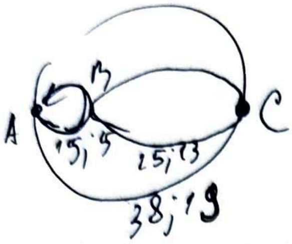
$\cancel{\sqrt{219} \geq 35}$

$D = 9+208 =$
$= 217$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$

черновик

5.



$\pi r_1 + \pi r_2 = 38$

$r_1 + r_2 = \frac{38}{\pi} \Rightarrow \pi R = \pi(r_1+r_2) = 38$

$a - bx^2$ - max.

$a - b \cdot 0 = 9$

$a = 9$

1) ~~$5x_1 + 13x_2 = 95$~~

$196 \le 217 \le 225$

$14 \le \sqrt{217} \le 15$

неч. неч.

$x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 26 + 18 \cdot y_1 + 19 \cdot y_2 = 95$

$9 - b(9)^2 = 0$

$81b = 9$

$b = \frac{1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 9 - \frac{1}{9}x^2$

1
3
5

$y = 2x + 4 = \frac{-3+\sqrt{217}}{4} + 4 =$

$= \frac{13+\sqrt{217}}{4}$ неч.

1) $y_2 = 1$

$A(\;\; y_1)$

$2(5x_1 + 13x_2 + 9y_1) = 76$

$y_1 = a - bx^2$

$x = \sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$

$5x_1 + 13x_2 + 9y_1 = 38$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$

$1 \to 2 \quad +1 \quad +2$

$2 \to 4 \to 6 \quad +3$

3

$4 \to 8 \quad + 4$

$5 \to 10 \quad -4$

$6 \to 12 \quad -3$

$7 \to 14 \quad -2$

$8 \to 16 \quad -1$

$9 \to 18 \quad 0$

1. $x_2 = 1$

$5x_1 + 9y_2 = 25$

~~$5 \quad 0$~~

$\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}} - \sqrt{\frac{a-y_1}{b}};\ y_1 - y_2\right)$

$= 0$

$\frac{a-y_1}{b} - \frac{a-y_2}{b} + y_1^2 - y_2^2 = 0$

$81 - 9y_1 - 81 + 9y_2 +$
$+ y_1^2 - y_2^2 = 0$

0. $x_2 = 0$

$5x_1 + 9y_2 = 38$

~~1~~

~~2~~

~~3~~

~~4 2~~

5 7

~~$x_1 = 4$~~, $x_2 = 0$,

$y_1 = 2$

2. $x_2 = 2$

~~$5x_1 + 9y_2 = 12$~~

$y_1 + y_2 =$

2) $y_2 = 3$

$2x + 4 \ge 3$

$-3 + \sqrt{217}$

$2(5x_1 + 13x_2 + 9y_1) = 38$

$5x_1 + 13x_2 + 9y_1 = 19$

0 $x_2 = 0$

$5x_1 + 9y_4 = 19$

2 1

$x_1 = 2, x_2 = 0, y_1 = 1, y_2 = 3$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

23-05-36-86
(40.33)

черновик

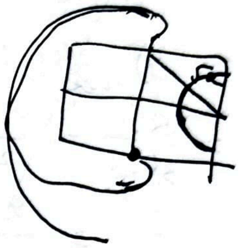
$x_2 = 1$

~~$5x_1+9y_2=6$~~

$x_1=2,\ x_2=0,\ y_1=1,\ y_2=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 2\cdot 15 + 40\cdot 1 + 38\cdot 3 = 60+40+114 = 214.$

ответ: 214.



$f\left(x+\frac{2}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$x = \frac{y+1}{y-1}$

$xy - x = y+1$

$y(x-1) = x+1$

$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = \frac{1}{y-1} = \frac{x-1}{x+1-(x-1)} =$

$= \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$g'(x) = (\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{10})' = f'(\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{9}) \cdot (\underbrace{f(f\ldots f(x)))}_{9})'$

	x	0
1	$f(x)$	$-\frac{1}{2}$
2	$f(f(x))$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$
3	$f(f(f(x)))$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$
4	$f(f(f(f(x))))$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$

$\underbrace{f\ldots f(x)))}_{n} = -\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) = -\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}-1$

~~Чистовик~~ Черновик

Задача 1.

1. Заметим, что вне зависимости от защитников и нападающих выбрать вратаря можно 5 способами.

2. Рассмотрим конфигурации выбора защитников и нападающих в зависимости от участия универсалов - будем обозначать $(x; y)$ случай, когда x защитников и y нападающих - универсалы.

1) $(0; 0)$. Остается выбрать 2 защитников из 5 $C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$ способами и 3 нападающих из 6 $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ способами - всего $10\cdot 20 = \underline{200}$ способов.

2) $(1; 0)$. $C_3^1 = 3$ способа выбрать универсала-защитника, $C_5^1 = 5$ способов выбрать защитника, $C_6^3 = 20$ способов выбрать нападающего - всего $3\cdot 5\cdot 20 = \underline{300}$.

3) $(2; 0)$. $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ способа выбрать 2 универсалов защитников, $C_6^3 = 20$ способов выбрать 3 нападающих, всего $3\cdot 20 = \underline{60}$.

4) $(0; 1)$. $C_5^2 = 10$ способов выбрать 2 защитников, $C_3^1 = 3$ способа выбрать универсала-нападающего, $C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ способов выбрать 2 нападающих - всего $10\cdot 3\cdot 15 = \underline{450}$.

5) $(1; 1)$. $C_3^1 = 3$ способа выбрать 1 универсала-защитника (далее - у/з.), $C_5^1 = 5$ способов выбрать 1 защитника (далее з.), $C_2^1 = 2$ способа выбрать универсала-нападающего (далее - у/н.) (из 2, т.к. один универсал уже защитник), $C_6^2 = 15$ способов выбрать нападающего (далее - н.), всего $3\cdot 5\cdot 2\cdot 15 = \underline{450}$ способов.

23-05-36-86
(40.33)

~~б) (2; 1). C_3^2 способов выбрать у. з.,~~ ~~C_6^1~~ $C_1^1 = 1$ способ ~~выбрать~~ Задача 1. Чистовик 1

1) Рассмотрим случай, когда x защитников (з.) универсалы (у.) и y нападающих (н) тоже у.. Выбрать n игроков из k (с одинаковыми навыками) способов $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Тогда способов выбрать (без учёта вратарей) игроков так, чтобы x з. были у. и y н. были у.,

$C_3^x \cdot C_5^{2-x} \cdot C_{3-x}^y \cdot C_6^{3-y}$. Заметим, что для корректности $x \leq 3$, $y \leq 6$ и $x + y \leq 3$, при этом $x, y \in \mathbb{Z}$ (целые) и $x, y \geq 0$.

2) Переберём все пары $(x; y)$.

- $(0; 0)$ – способов $C_3^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^0 \cdot C_6^3 = 1 \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 1 \cdot \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{20}{2} \cdot \frac{120}{6} = 10 \cdot 20 = 200$
- $(1; 0)$ – $C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^0 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 20 = 300$.
- $(2; 0)$ – $C_3^2 \cdot C_5^0 \cdot C_1^0 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 20 = 60$
- $(0; 1)$ – $C_3^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 = 1 \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 30 \cdot \frac{5\cdot 6}{2} = 450$.
- $(1; 1)$ – $C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^1 \cdot C_6^2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 15 = 450$.
- $(2; 1)$ – $C_3^2 \cdot C_5^0 \cdot C_1^1 \cdot C_6^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 15 = 45$.
- $(0; 2)$ – $C_3^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_6^1 = 1 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 6 = 180$.
- $(1; 2)$ – $C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^2 \cdot C_6^1 = 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 = 90$.
- $(0; 3)$ – $C_3^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot C_6^0 = 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$.

Итого $200 + 300 + 60 + 450 + 450 + 45 + 180 + 90 + 10 = 500 + 960 + 325 = 1460 + 325 = 1785$.

3) Вне зависимости от з. и у. существует $C_5^1 = 5$ способов выбрать вратаря $\Rightarrow$ собрать команду $5 \cdot 1785 = 8500 + 425 = 8925$ способов. Ответ: 8925.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик 2) задача 3.

1. $\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3.\end{cases}$

Выпишем ОДЗ - подкоренное выражение ≥ 0 и выражение, равное корню, ≥ 0: $\begin{cases} y-x+10\geq 0 \\ y-3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+10\geq x \\ y\geq 3.\end{cases}$

2. $xy+4x-y-4 = x(y+4)-1(y+4) = (x-1)(y+4)$. $y\geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y+4\geq 7>0 \Rightarrow$ ~~$|xy+4x-y-4|$~~ ~~знак выражения~~

$xy+4x-y-4\geq 0$ тогда и только тогда, когда $x-1\geq 0$,

$xy+4x-y-4<0$ тогда и только тогда, когда ~~...~~ $x-1<0$.

Рассмотрим возможные ~~значения~~ значения модулей:

Ⅰ. $xy+4x-y-4\geq 0$, $y-x-8\geq 0$. Тогда $x-1\geq 0$,

$|xy+4x-y-4| = xy+4x-y-4$, $|y-x-8| = y-x-8$.

$(xy+4x-y-4)(y-x-8) = (x-4)(xy+4x-y-4)$

$(xy+4x-y-4)(y-x-8-x+4)=0$

$(x-1)(y+4)(y-2x-4)=0$ - произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие существуют. $y+4>0$.

Рассмотрим случаи.

1) $x-1=0 \Leftrightarrow x=+1$. Рассмотрим 2-е уравнение

$\sqrt{y-x+10} = y-3 \overset{\text{на ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} y-x+10 = y^2-6y+9$

~~$y+11 = y^2-6y+9$~~

~~$y^2-7y-2=0$~~

Чистовик 3

~~$D=(-7)^2+4\cdot1\cdot(-2)=49+8=57 \Rightarrow$~~

$y+9=y^2-6y+9$

$y^2-7y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=7 \end{array}\right.$. $y=0$ не удовлетворяет

ОДЗ: $y\geq3$. А при $x=1$ и $y=7$ выполнены

ОДЗ ($y=7\geq3$, $y-x+10=7-1+10=16>0$) и условие о модулях ($xy+4x-y-4\geq0$, $y-x-8\geq0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (1;7)$ - решение.

2) $y-2x-4=0 \Leftrightarrow y=2x+4$.

$\sqrt{y-x+10}=y-3 \overset{\text{на ОДЗ}}{\Leftrightarrow} y-x+10=(y-3)^2$

$2x+4-x+10=(2x+1)^2$

$x+14=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$. $D=3^2-4\cdot4\cdot(-13)=9+208=217 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{2\cdot4}=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$. Т.к. $y-x-8\geq0$,

то $(2x+4)-x-8\geq0$

$x\geq4$. $\frac{-3-\sqrt{217}}{8}<0<4$; $217<225 \Rightarrow \sqrt{217}<15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-3+\sqrt{217}}{8}<\frac{-3+15}{8}=\frac{12}{8}=1{,}5<4 \Rightarrow$ оба x не подходят по условию.

II. $xy+4x-y-4\geq0$, $y-x-8<0$. Тогда $x-1\geq0$, $|xy+4x-y-4|=$
$=xy+4x-y-4$, $|y-x-8|=-(y-x-8)=x+8-y$.

$(x-1)(y+4)(x+8-y)=(x-4)(x-1)(y+4)$

$(x-1)(y+4)(x+8-y-x+4)=0$

$(x-1)(y+4)(-y+12)=0$ $\cdot(-1)\neq0$

~~$(x-1)(y+4)^2=0$~~

~~1) $x-1=0 \Rightarrow x=1$. $\sqrt{y-x+10}=y-3 \overset{\text{на ОДЗ}}{\Leftrightarrow} y-x+10=(y-3)^2$~~

~~$y+9=y^2-6y+9 \Leftrightarrow y^2-7y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=7. \end{array}\right.$~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

~~черновик~~

~~$y=0$ не удовлетворяет условию,~~

1) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Тогда $xy+4x-y-4=(x-1)(y+4)=0$ - условие не выполнено.

2) $(y+4)^2=0 \Leftrightarrow y=-4$. ~~$\sqrt{y-x+10}=y-3 \Leftrightarrow$~~

$\Leftrightarrow y-x+10=(y-3)^2$

$-x+7=(-7)^2$

$-x=49-7=42 \Rightarrow x=-42, y=-4$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$,

$(f(f(x)))'=f'(f(x))\cdot f(x)=$

$=$

$y \geq 3$ по ОДЗ - условие не выполнено.

$\frac{1}{2}-1$

III. $xy+4x-y-4<0$, $y-x-8\geq 0$. Тогда $x+1<0$,

$|xy+4x-y-4|=-(xy+4x-y-4)$, $|y-x-8|=y-x-8$. $\frac{1}{2}-1$

$(xy+4x-y-4)(y-x-8)=(x-4)\cdot-(xy+4x-y-4)$

$(x-1)(y+4)(y-x-8-(-1)(x-4))=0$ черновик

$(x-1)(y+4)(y-x-8+x-4$ $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^k}-1\right)\cdot$

$A\left(-\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}, y_1\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}, y_1\right)$, $D\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}, y_2\right)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}+\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}, y_2-y_1\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}-\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}, y_2-y_1\right)=0$

$\frac{a-y_2-a+y_1}{b}+(y_2-y_1)^2=0$.

$(y_1-y_2)+b(y_1-y_2)^2=0$

$y_1-y_2=b$

$(x-1)(y+4)(-y+12)=0$ (Числовицу

~~1) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Тогда $xy+4x-y-4=0$ — усл. не выполнено.~~

1) $y+4=0 \Leftrightarrow y=-4$. Тогда $y<3$ — усл. не выполнено.

2) $-y+12=0 \Leftrightarrow y=12$. $\sqrt{y-x+10}=y-3 \Leftrightarrow$ на ОДЗ $y-x+10=(y-3)^2$

$22-x=9^2$

$x=22-81=-59$. $y-x-8=12+59-2=71-2=69>0$ —

условие не выполнено.

3) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Тогда аналогично п. I. 1)

$y=0$ или $y=7$. При $y=0$ $y<3$, при $y=7$ $x-y-8=$

$=0\geq 0 \Rightarrow$ в обоих сл. усл. не выполнено.

III. $xy+4x-y-4<0$, $y-x-8\geq 0$. Тогда $x+1<0$, $|xy+4x-y-4|=$

$=-(xy+4x-y-4)$, $|y-x-8|=y-x-8$.

$(xy+4x-y-4)(y-x-8)=(x-4)\cdot -(xy+4x-y-4)$

$(x-1)(y+4)(y-x-8+x-4)=0$

$(x-1)(y+4)(y-12)=0$

1) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. $xy+4x-y-4=0$ — усл. не выполнено.

2) $y+4=0 \Leftrightarrow y=-4$. $y<3$ — усл. не выполнено.

3) $y-12=0 \Leftrightarrow y=12$. $\sqrt{y-x+10}=y-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y-x+10=(y-3)^2$

$22-x=9^2 \Rightarrow x=22-81=-59$. ОДЗ выполнено

$(y-x+10=12+59+10=81>0$, $y-3=9\geq 0)$ и усл.

по модулю тоже $\Rightarrow (12;-59)$ — решение.

Чисовниц 4

IV $xy+4x-y-4<0$, $y-x-8<0$.

$$(\cancel{x}y+4x-y-4)\cdot -(y-x-8) = (x-4)\cdot -(xy+4x-y-4) \,\Big|\cdot(-1) > 0$$

$$(x-1)(y+4)\cdot(y-x-8) = (x-1)(y+4)(x-4)$$

$$(x-1)(y+4)\cdot(y-x-8-x+4)=0$$

$$(x-1)(y+4)(y-2x-4)=0$$

1) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. $xy+4x-y-4 \geq 0$ – усл. не выполнено.

2) $y+4=0 \Leftrightarrow y=-4$. $y<3$ – усл. не выполнено.

3) $y-2x-4=0 \Leftrightarrow y=2x+4$. $\sqrt{y-x+10} = y-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y-x+10 = (y-3)^2$

$x+14 = (2x+1)^2$

$x+14 = 4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$. $D = 9-4\cdot4(-13) = 217 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$, $y = 2x+4 = \dfrac{-3\pm\sqrt{217}}{4}+4 =$

$= \dfrac{13\pm\sqrt{217}}{4}$. $\cancel{\sqrt{217} \geq 0;\ 2121\ \sqrt{217} \geq 0 \Rightarrow}$

$\Rightarrow \cancel{\dfrac{13-\sqrt{217}}{4}\ \ 13}$ $196<217<225 \Rightarrow 14<\sqrt{217}<15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3+\sqrt{217}}{8} > \dfrac{-3+14}{8} = \dfrac{11}{8} = 1\dfrac{3}{8} > 1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy+4x-y-4>0$ – усл. не выполнено при $x = \dfrac{-3+\sqrt{217}}{8}$,

$y = \dfrac{13-\sqrt{217}}{4} < \dfrac{13-14}{4} < 0 < 3$ – усл. не выполнено при

$y = \dfrac{13-\sqrt{217}}{4} \Rightarrow$ в этом сл. решений нет.

Итого 2 решения – $(1;7)$ и $(12;-59)$

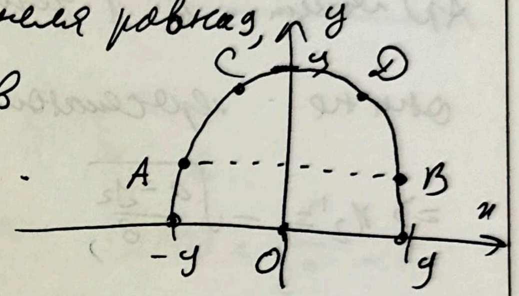
Ответ: $(1;7)$; $(12;-59)$.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№6. Чистовик 5

1. Назовём стандартным видом уравнения параболы вида $a_1x^2+b_1x+c_1$. Т.к. ур-ие параболы туннеля — $y=a-bx^2$, то $a_1=-b$, $b_1=0$, $c_1=a$. ~~Т.к.~~ Вершина имеет абсциссу $-\frac{b_1}{2a_1}=-\frac{0}{2(-b)}=0$.

2. Без ограничения общности будем считать, что ветви параболы направлены вниз: $-b<0 \Rightarrow b>0$. Тогда в вершине достигается максимум. Т.к. высота туннеля равна 9, то значение ф-ии $a-bx^2$ в вершине равно 9:



$$a-b\cdot 0^2=9$$

$a=9$. Т.к. ширина, то есть расстояние между корнями кв. ф-ии $f(x)=a-bx^2$, равна 18, а корни лежат на равных расстояниях от вершины, то корни параболы лежат в точках -9 и 9:

$$f(9)=0$$

$$a-b(-9)^2=0$$

$9-81b=0 \Leftrightarrow b=\frac{1}{9} \Rightarrow$ ф-ия имеет вид

$f(x)=-\frac{1}{9}x^2+9$.

3. Т.к. $AB\parallel Ox$, то у A и B одна ордината $y_1>0$. Т.к. $CD\parallel Ox$ — у C и D одна ордината $y_2>0$. Т.к. A и B лежат на параболе, то их абсциссы x_1' и x_1'' — корни уравнения

$a-bx^2=y_1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$. Без ограничения общности положим, что $x_1'=-\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$, $x_1''=\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

~~4. Т.к. парабола симметрична относительно прямой, проходящей через вершину и парал-лельной~~

Аналогично и абсциссы x_2' и x_2'' точек C и D – корни уравнения $a - bx^2 = y_2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$.

Если $x_2'' = -\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$ и $x_2' = \sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$, отрезок AD лежит в II четверти, а BC – в I, тогда они не пересекаются. Противоречие с условием $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2' = -\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$, $x_2'' = \sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$.

4. Координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ – $(x_2'' - x_1'; y_2 - y_1) =$
$= \left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}} + \sqrt{\frac{a-y_1}{b}}; y_2 - y_1\right)$, вектора $\overrightarrow{BD}$ –
$(x_2'' - x_1''; y_2 - y_1) = \left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}} - \sqrt{\frac{a-y_1}{b}}; y_2 - y_1\right)$.

5. Т.к. $\angle ADB = 90°$, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD}$ равно 0:

$$\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}} + \sqrt{\frac{a-y_1}{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}} - \sqrt{\frac{a-y_1}{b}}\right) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$$ Черновик

$$\frac{a-y_2}{b} - \frac{a-y_1}{b} + (y_1 - y_2)^2 = 0 \quad | \cdot b \neq 0$$

$$a - y_2 - a + y_1 + (b(y_1 - y_2))(y_1 - y_2) = 0$$

$$(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)(b(y_1 - y_2)) = 0$$

$$(y_1 - y_2)(b(y_1 - y_2) + 1) = 0.$$

23-05-36-86 (40.33)

2. ~~Рассмотрим~~ Пусть $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n}$. Тогда рассмотрим значение $f_n(x)$ в зависимости от n в точке 0

Черновик 1

n	$f_n(x)$
1	$\frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$
2	$\frac{-\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$
3	$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1}{2} = -\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$
4	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$.

Докажем по индукции, что $f_n(0) = \frac{1}{2^n} - 1$.

База: для $n=1$ верно $-$ $f_1(0) = f_1(0) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2^1} - 1$.

Шаг. Пусть $f_k(0) = \frac{1}{2^k} - 1$. $f_{k+1}(0) =$

$$= f(f_k(0)) = \frac{\frac{1}{2^k} - 1 - 1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}} - 1.$$

По индукции утв. верно $\Rightarrow$ $f_n(0) = \frac{1}{2^n} - 1$.

3. Докажем по индукции, что $f_n'(x) = \frac{1}{2^n}$.

База: для $n=1$ верно $-$ $f_1'(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)' = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$.

Шаг. Пусть $f_k(x) = \frac{1}{2^k} - 1$. Тогда $f_{k+1}'(x) =$

$$= (f(f_k(x)))' = f_1'(f_k(x)) \cdot (f_k(x))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

4. Таким образом, $g'(0) = f_{10}'(0) = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$.

5. Т.к. производная в точке есть тангенс угла наклона касательной в ней, то тангенс

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

угла наклона в точке 0 равен $g'(x) =$

$= f_{10}'(x) = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$ чистовик 12

Ответ: $\frac{1}{1024}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

2) $x_2=1$. $5x_1+9y_1=25$. $y_1 \le \frac{25}{9} < \frac{27}{9}=3 \Rightarrow$ (Чистовик)

$\Rightarrow y_1 \in \{0,1,2\}$. При

- $y_1=0$ $x_1=\frac{25}{5}=5\in\mathbb{Z}$; но y_1+y_2 чётно, y_2 нечётно $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_1$ нечётно $\Rightarrow$ $y_1\neq 0$.

- $y_1=1$ $x_1=\frac{16}{5}\notin\mathbb{Z}$
- $y_1=2$ $x_1=\frac{7}{5}\notin\mathbb{Z}$.

3) $x_2=2$. $5x_1+9y_1=12$. $y_1\le\frac{12}{9}<\frac{18}{9}=2\Rightarrow y_1\in\{0,1\}$. При

- $y_1=0$ $x_1=\frac{12}{5}\notin\mathbb{Z}$.
- $y_1=1$ $x_1=\frac{3}{5}\notin\mathbb{Z}$.

II. $y_2=3$.

$10x_1+26x_2+18y_1+57=95$

$10x_1+26x_2+18y_1=38$

$5x_1+13x_2+9y_1=19$. $x_2\le\frac{19}{13}<\frac{26}{13}=2\Rightarrow x_2\in\{0,1\}$.

1) $x_2=0$. $5x_1+9y_1=19$. $y_1\le\frac{19}{9}<\frac{27}{9}=3\Rightarrow$

$\Rightarrow y_1\in\{0,1,2\}$. При

- $y_1=0$ $x_1=\frac{19}{5}\notin\mathbb{Z}$.
- $y_1=1$ $x_1=\frac{10}{5}=2$. Все усл. соблюдены $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ возможен случай $x_1=2, x_2=0, y_1=1, y_2=3$.

- $y_1=2$ $x_1=\frac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$.

2) $x_2=1$. $5x_1+9y_2=6$. $y_1\le\frac{6}{9}<\frac{9}{9}=1\Rightarrow y_1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=\frac{6}{5}\notin\mathbb{Z}$.

III. При $y_2\ge5$ $10x_1+26x_2+18y_1\le 95-95=0$; это невозможно, т.к. y_1 нечётно $\Rightarrow$ $\Rightarrow y_2<5$.

Таким образом, $x_1 = 2, x_2 = 0, y_1 = 1, y_2 = 13$. (По условию AB - диаметр окружности 1, BC - диаметр окружности 2 (т.к. дуги AB равны и дуги BC равны),

$AC = AB + BC$ - диаметр большой окружности.

Тогда $\frac{AB \cdot \pi}{2}$ - половина длины окружности 1, то есть дуга AB, что есть 15км $\Rightarrow AB = \frac{30}{\pi}$км;

аналогично $\frac{BC \cdot \pi}{2}$ равно дуге BC, т.е. 25км $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{50}{\pi} \Rightarrow$ дуга AC равна $\frac{AC \cdot \pi}{2} =$

$= (AB + BC) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{80}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 40$. Тогда автомобиль $x_1 = 2$ раза проехал ~~круг~~ окружности длиной 30км, $x_2 = 0$ - длиной 50км, $y_1 = 1$ - две дуги суммарной длиной 40км, $y_3 = 3$ - дугу длиной 40км $\Rightarrow$ всего проехал $(2 \cdot 30 + 0 \cdot 50 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 40)$км $=$

$= (60 + 40 + 120)$ км $= 220$км

Ответ: 220км.

Задача 5.

1. Рассмотрим значение ф-ии в точке x_1. Пусть $x_1 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ ~~Тогда~~ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 \neq 0 \\ x_0 x_1 - x_1 = x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 \neq 0 \\ x_0 (x_1 - 1) = x_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ x_0 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f\left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right) = \frac{1}{x_0 - 1} =$

$= \frac{1}{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} - 1} = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1 - x_1 + 1} = \frac{x_1 - 1}{2}$.