0 819038 230002

81-90-38-23
(40.57)

Дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 16

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Логинова Тимофея Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

Дата
«25» 02 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	8	8	12	12	0	0	12	56

81-90-38-23
(40.57)

Черновик 56 (пятьдесят шесть)

В 3 Н Ч Н, не В
2 5 6 3

$90 \cdot 8 = 720$ $42 \cdot 3 = 126$ $60 \cdot 7 = 420$

$\cancel{21 \cdot 8 \cdot 7}$ $\frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 3 \cdot 7 \cdot 6$

$\frac{\cancel{16} \cdot \cancel{15} \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6}}$ $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 2} = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $\frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8$

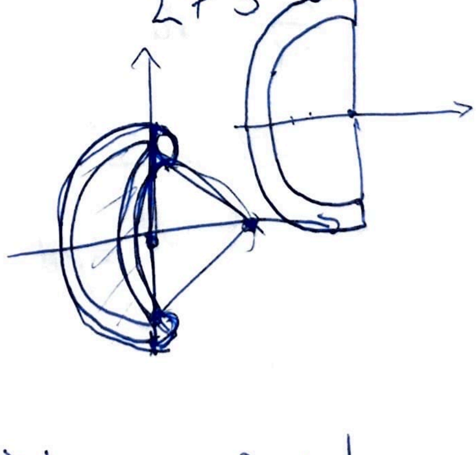
1266

$\frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}!} = 6 \cdot 5 \cdot 7$ $\frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}!} = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7$

$\frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{9} \cdot 8 \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}!} = 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7$

$28 \cdot 60 = 1680$ 210 $28 \cdot 30 = 840$

$14 \cdot 13 = 182$ $182 \cdot 4 = 728$ $728 \cdot 11 = 8008$ $1050 + 1680 = 2730$



№3

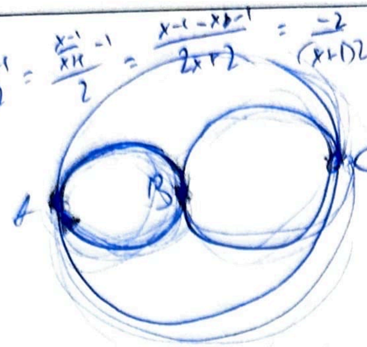
$(xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y|$

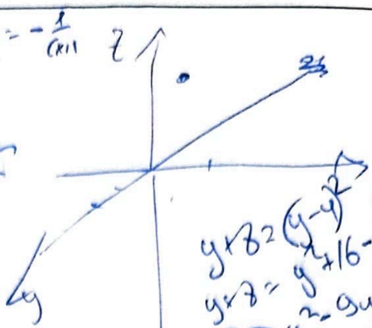
$\sqrt{y-x+9} = y-4$ $(y-4)^2 - 18$ $-(y+3)+x(y+3)$

Черновик

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\, 13 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array}$$

$\frac{x-1}{2} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{2} = \frac{x-1-x-1}{2x+2} = \frac{-2}{(x+1)2} = -\frac{1}{(x+1)}$





$y+8=(y-4)^2$

$y+8=y^2+16-8y$

$y^2-9y+8=0$

$y=1$

$y=8$

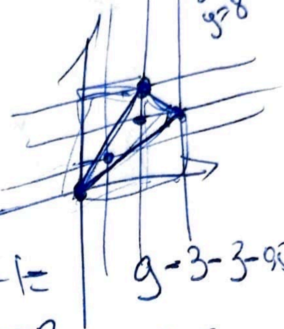
$5\cdot a+13\cdot b+19\cdot c=95$

$c=1 \quad 5a+13b=76 \quad a=10;\ b=2;$

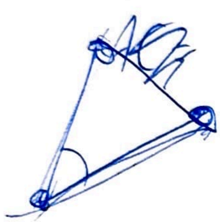
$c=2 \quad 5a+13b=57 \quad a=1;\ b=4$

$c=3 \quad 5a+13b=38 \quad a=5;\ b=1$

$c=4 \quad 5a+13b=19$ мимо



$3-\frac{2}{2}-1=$ $\quad 9-3-3-95=$

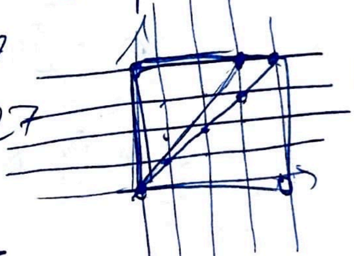


$13=\frac{2\pi R_1}{2} \qquad 27=\frac{2\pi R_2}{2} \qquad =2,5$

$AC=\frac{2\pi R_1+2\pi R_2}{2}=40$

$3+\frac{2}{1}-1=1$

6



$40+130+54 \quad 4$

$120+65+27$

$80+13+108$

$3-1$

$5 \quad 6 \quad 3-$

$\frac{x-1}{x+1}=0 \quad x-1$

$f(f(x)) \qquad f(y)=-\frac{1}{\frac{y+1}{y-1}+1}=-\frac{y-1}{2y}=$

$-\frac{1}{2}$

$y=\frac{x-1}{x+1} \qquad xy+y=x-1$

$y=x(1-y)-1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1} \qquad =-\frac{y-1}{2y}$

$f(x)=-\frac{x-1}{2x} \Rightarrow f(f(x))=f\left(-\frac{x-1}{2x}\right)=-\frac{\frac{x-1}{2x}-1}{\frac{x-1}{x}}=$

$=-\frac{\frac{x-1}{2}-x}{x-1}=-\frac{x-1-2x}{2(x-1)}=\frac{x+1}{2(x-1)}$

$f(f(f(x)))=f\left(\frac{x+1}{2(x-1)}\right)=-\frac{\frac{x+1}{2(x-1)}-1}{\frac{x+1}{(x-1)}}=-\frac{\frac{x+1}{2}-x+1}{x+1}=-x$

Чистовик

Задача 1

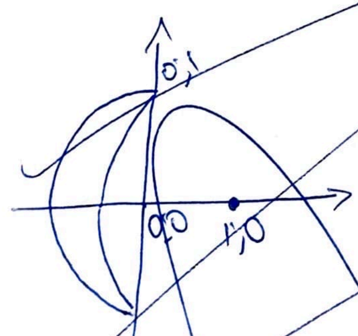
Вратарей: 2
Защитников: 5
Нападающих: 6
Универсалов: 3

1) Нам не важен порядок.
2) Рассмотрим 3 случая. Когда 2 защитника из универсалов, когда 1 и когда 0

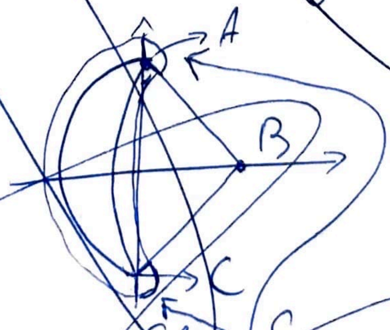
$$\Rightarrow \frac{2\cdot(3\cdot2)\cdot(7\cdot6\cdot5)}{1!\cdot2!\cdot3!}+\frac{2\cdot(3\cdot5)\cdot(8\cdot7\cdot6)}{1!\cdot2!\cdot3!}+\frac{2\cdot(5\cdot4)\cdot(9\cdot8\cdot7)}{1!\cdot2!\cdot3!}=7\cdot6\cdot5+3\cdot5\cdot8\cdot7+5\cdot4\cdot3\cdot4\cdot7=30\cdot7+30\cdot28+30\cdot56=30\cdot(7+28+56)=30\cdot91=2730$$

Ответ: 2730

Задача 2



Закрашенная часть — это то сколько прибавилось площади.

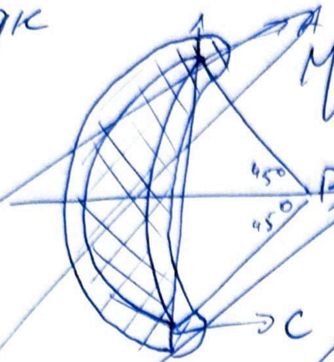


Найдём всю площадь:

Найдём площадь полукруга с центром (0;0), вычтем часть круга с центром (1;0), прибавим $S_{\triangle ABC}$ и прибавим ещё маленькие сектора кругов

~~Чистовик~~

Тогда:



Черновик

$S_{\triangle ABC} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$

$S_{w_1} = \frac{\pi\cdot(1,25)^2}{2}$

$S_{w_2} = \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4}$

19-3

19+8=27

$2S_{w_3} = 2\cdot \pi\cdot(0,25)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\pi(0,25)^2$

$\frac{3}{8}$ так как сектор этих кругов выделяется углом 135°

$\Rightarrow S = S_{w_1} - S_{w_2} + S_{\triangle ABC} + 2S_{w_3} =$

$= \frac{\pi\cdot 25}{16\cdot 2} - \frac{\pi\cdot 2}{4} + 1 + \frac{3}{4}\pi\cdot\frac{1}{16} =$

$= \frac{25\pi}{32} - \frac{16\pi}{32} + \frac{32}{32} + \frac{1,5\pi}{32} = \frac{42,5\pi}{32} =$

$= \frac{85}{64}\pi$

Ответ

~~Чистовик~~:

Задача №3

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)\,|y-x-9| = (x-4)\,|xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \quad \Rightarrow y \ge 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+3)\,|y-x-9| = (x-4)\,|(x-1)(y+3)| \\ y-x-9 = (y-4)^2-18 \end{cases}$$

81-90-38-23
(40.57)

Черновик

$(x-1)(y+3)$

1) $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -3 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(y+3)(y-x-9-x+4)=0$

$\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ y-2x-5=0 \Rightarrow y=2x+5 \end{cases}$

$y-x-9=(y-4)^2-18$

$x-4=(2x+1)^2-18 \Rightarrow 4x^2+4x+1+4-18-x=0$

$\Rightarrow 4x^2+3x-13=0$

Из ~~первого пункта~~

$D=9+208=217 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$

$x \geq 1 \Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}$

$y \geq 4$ по ОДЗ $\Rightarrow y \neq -3$

Получается $\begin{cases} x=1;\ y=19 \\ x=\frac{-3+\sqrt{217}}{8};\ y=2x+5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq -3 \end{cases} \rightarrow \text{но } y \geq 4 \Rightarrow \text{только 1 случай} \end{cases}$

$(x-1)(y+3)(y-x-9+x-4)=0 \Rightarrow (x-1)(y+3)(y-13)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \text{ т.к. } y \geq 4 \\ y=13 \end{cases}$

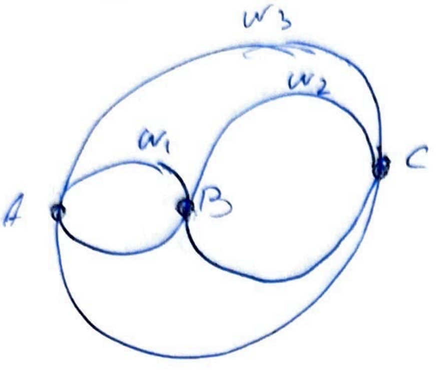
$x=1 \Rightarrow y=19$

$y=13 \Rightarrow x=-99$

Ответ: $(x;y)$ $(1;19)$; $(-99;13)$; $\left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8};\ \frac{-6+2\sqrt{217}}{8}+5\right)$

Чистовик

Задача 4



R_1 - радиус w_1 $R_3 = R_1 + R_2$

R_2 - радиус w_2 $\smile AB = \frac{2\pi R_1}{2}$

R_3 - радиус w_3

$\smile BC = \frac{2\pi R_2}{2}$

$\smile AC = \frac{2\pi R_3}{2} = \frac{2\pi R_1 + 2\pi R_2}{2}$

$\Rightarrow \smile AC = 13_{км} + 27_{км} = 40км$

Пусть a раз он ехал по $\smile AB$; b раз по $\smile BC$ и c раз по $\smile AC$ $\Rightarrow 5a + 13b + 19c = 95$

$c=1 \Rightarrow a=10;\ b=2$
$c=2 \Rightarrow a=1;\ b=4$
$c=3 \Rightarrow a=5;\ b=1$
$c=4 \Rightarrow 5a+13b=19$ ж

$\rightarrow$ если он первый свой путь идёт через AC, то тогда он ~~начнёт~~ окажется в C $\Rightarrow$ так как $b=2$, то он должен будет вернуться в C, а от туда уже не сможет попасть в A $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ этот вариант не подходит.

$c=2;\ a=1;\ b=4$; если первым ходом он идёт в B, то так как $b=4$, то он должен будет снова оказаться в B при этом ~~обя~~ в C и A он походить не сможет, тогда первым ходом он идёт в C. Тогда ~~у него~~ ему нужно пройтись по AB и AC, а тут только два варианта: из C в A и из A в B или из B в A и из A в C, в обоих случаях он не сможет вернуться в A.

Чистовик

Задача 6 продолжение

$x^2 + (-bx^2 + a - c)^2 = R^2$ $\quad A(-R; c)$

$x^2 + (-\frac{1}{8}x^2 + 8 - c)^2 = R^2$ $\quad B(R; c)$

$\Rightarrow R^2 + (-\frac{1}{8}R^2 + 8 - c)^2 = R^2 \Rightarrow -\frac{1}{8}R^2 + 8 - c = 0$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{8}R^2 + 8$

$D(x;y) \Rightarrow DM = \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = R$

$\Rightarrow x^2 + (y-c)^2 = R^2$

$x^2 + (-\frac{1}{8}x^2 + 8 - 8 + \frac{1}{8}R^2)^2 = R^2$

$x^2 + \frac{1}{64}(x^2 - R^2)^2 = R^2 \Rightarrow \frac{1}{64}(x-R)^2(x+R)^2 = (R-x)(R+x)$

$\Rightarrow -\frac{1}{64}(x-R)(x+R) = 1 \Rightarrow x^2 - R^2 = -64$

$\Rightarrow x^2 = R^2 - 64$

То есть мы выразили координаты A и B через R, также надо сделать и с C и D, но я не успел.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

$c=3$; $a=5$; $b=1$ пример: $A \to B \to C \to A \to$
$\to C \to A \to B \to A \to B \to A$

$\Rightarrow$ Путь $= 3 \cdot 40км + 5 \cdot 13км + 1 \cdot 27км = 120км + 65км +$
$+ 27км = (185+27)км = 212км$

Ответ: 212км

Задача №5

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$; $k = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow kx + k = x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow k+1 = x(1-k) \Rightarrow x = \frac{k+1}{1-k} \Rightarrow f(k) = -\frac{1}{\frac{k+1}{1-k}+1} =$
$= -\frac{1(1-k)}{k+1+1-k} = \frac{k-1}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-7}{8}$; $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{9} = \frac{x-2^9+1}{2^9}$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2^9} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2^9} = tg\alpha$ Ответ: $\frac{1}{2^9}$

Задача №8

Идея: спроецировать треугольник на XOY.
Все точки с целочисленными координатами спроецируются в узлы клеток 1x1 на XOY, НО это не значит, что все узлы будут удовлетворять нашим условиям.

$A(1;1;3)$ Зададим (ABC): $ax+by+cz+d=0$

$B(7;2;11)$

$C(5;5;5)$

$$\begin{cases} a+b+3c+d=0 & (1) \\ 7a+2b+11c+d=0 & (2) \\ 5a+5b+5c+d=0 & (3) \end{cases}$$

Чистовик

$(1)\cdot 2+(3) \Rightarrow 7a+7b+11c+3d=0$

$(2): 7a+2b+11c+d=0$

$\Rightarrow 5b+2d=0 \Rightarrow d=-2{,}5b$

$$\begin{cases} a-1{,}5b+3c=0 & (4) \\ 7a-0{,}5b+11c=0 & (5) \\ 5a+2{,}5b+5c=0 & (6) \end{cases}$$

$(4)+2\cdot(5) \Rightarrow 15a-2{,}5b+25c=0$

$(6): 5a+2{,}5b+5c=0$

$\Rightarrow 20a+30c=0$

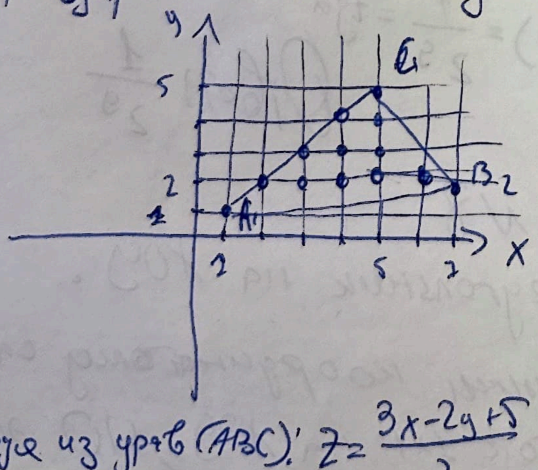
$\Rightarrow a=-1{,}5c$

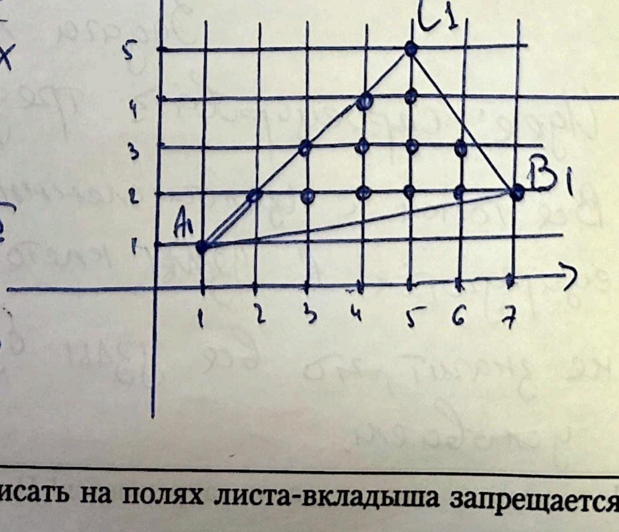
$\Rightarrow a-1{,}5b+3c=-1{,}5b+1{,}5c=0$

$\Rightarrow b=c=-\frac{2}{5}d \Rightarrow a=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}d=\frac{3}{5}d$

$\Rightarrow \frac{3}{5}dx-\frac{2}{5}dy-\frac{2}{5}dz+d=0 \Rightarrow 3x-2y-2z+5=0$

Спроецировав A, B, C получаем: $A_1(1;1;0)$, $B_1(7;2;0)$, $C_1(5;5;0)$





Исходя из ур-я (ABC): $z=\frac{3x-2y+5}{2}$

$\Rightarrow$ если, $x;y \in \mathbb{Z}$ и x – нечет, то

z тоже целое

Чистовик

Тогда нам подходят точки на xOy такие:

$(x;y)$: $(3;2)$; $(3;3)$; $(5;2)$; $(5;3)$; $(5;4)$; $(5;5)$

$(7;2)$ 7 точек Ответ: 7

Задача №3

$xy-3+3x-y = x(y+3)-(y+3) = (y+3)(x-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} (y+3)(x-1)\,|y-x-9| = (x-4)\,|(x-1)(y+3)| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \Rightarrow y-x-9 = (y-4)^2-18 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} y \geq 4 \\ y-x+9 \geq 0 \end{cases}$

$y \geq 4 \Rightarrow$ знак $(y+3)(x-1)$ зависит от x.

1) $x \geq 1 \Rightarrow (y+3)(x-1)(|y-x-9|-x+4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y=-3 \text{ и } y\geq 4 \\ x=1 \\ |\cancel{(y-4)^2-18}| = x-4 \\ \quad y-x-9 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y = \left[\begin{array}{l}1 \text{ и } y\geq 4\\ 8\end{array}\right. \\ |\cancel{(y-4)^2-18}| = x-4 \Rightarrow x \geq 4 \\ \quad y-x-9 \end{array}\right.$

~~$\Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow (y-4)^2 \geq 18 \Rightarrow (y-4)^2 = x+14 \Rightarrow x = y^2+16-8y-14 = y^2+8y-14$~~

~~$y-x+9 \geq 0 \Rightarrow y-y^2-8y+14+9 \geq 0 \Rightarrow -y^2-7y+23 \geq 0$~~

① $y-x-9 \geq 0 \Rightarrow y-x-9 = x-4 \Rightarrow y = 2x+5 \Rightarrow x \geq 4$

$\Rightarrow \sqrt{y-x+9} = y-4 \Rightarrow \sqrt{x+14} = 2x+1$

$x+14 = 4x^2+1+4x \Rightarrow 4x^2+3x-13=0 \Rightarrow$ нет реш.

② $y-x-9 \leq 0 \Rightarrow -y+x+9 = x-4 \Rightarrow y=5 \Rightarrow \sqrt{y-x+9} = y-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{5-x+9} = 1 \Rightarrow x=13 \Rightarrow 5-13-9 \leq 0$ верно!

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ y=8 \\ x=13;\ y=5 \end{array}\right.$ убеждаемся, что это корни ещё раз, просто подставив.

2) $x \leq 1 \Rightarrow (y+3)(x-1)(|y-x-9|+x-4)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$ прошлые случае $x=1;\ y=8$

$|y-x-9|=4-x \Rightarrow x\leq 4$

Чистовик

① $y-x-9\geq 0 \Rightarrow y-x-9=4-x \Rightarrow y=13$

$\Rightarrow \sqrt{y-x+9}=y-4 \Rightarrow \sqrt{22-x}=9 \Rightarrow 22-x=81$

$\Rightarrow x=-59 \quad y-x-9=13+59-9\geq 0$

$-59\leq 1$ верно

② $y-x-9\leq 0 \Rightarrow y-x-9=-4+x \Rightarrow y=2x+5 \Rightarrow x\leq 4$

$\Rightarrow \sqrt{y-x+9}=y-4 \Rightarrow 4x^2+3x-13=0$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16\cdot 13}}{8}$ Оба корня не подходят.

$x=\dfrac{-3+\sqrt{9+16\cdot 13}}{8}>1$, а $x\leq 1$

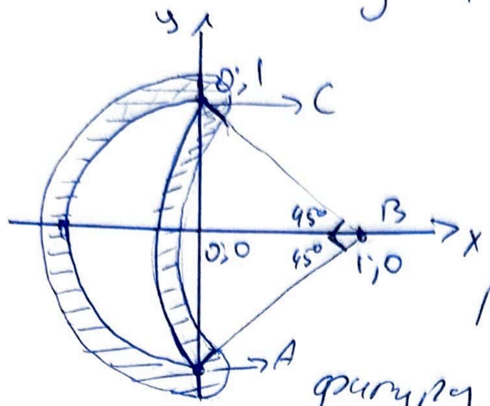
$x=\dfrac{-3-\sqrt{9+16\cdot 13}}{8} \Rightarrow y=2x+5<4$, но $y\geq 4$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ y=8 \\ x=-59;\ y=13 \end{array}\right.$ убеждаемся, что это корни ещё раз, просто подставив.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=1;\ y=8 \\ x=13;\ y=5 \\ x=-59;\ y=13 \end{array}\right.$

Чистовик

Задача №2



Заштрихованное — что то что прибавилось.
Найдём всю площадь!
Разобьём нашу сплошную фигуру на простые!

(1) (2) (3)

$$S_{(1)} = \frac{\pi\cdot(1,25)^2}{2} - \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{2,25\pi - \pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$S_{(2)} = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} - \pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1$$

так как сектор ограничен углом 90°

$S_{\triangle ABC}$

$$S_{(3)} = \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\pi\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)^2}{4} = \frac{2\pi - \pi\left(2+\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\pi\left(2-2-\frac{1}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{16}\right)}{4} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{8}\right)}{8}$$

$$S_{(4)} = S_{(5)} = \pi\cdot(0,25)^2\cdot\frac{3}{8} = \frac{\frac{3}{16}\pi}{8}$$

так как сектор круга ограничен 135°

Чистовик

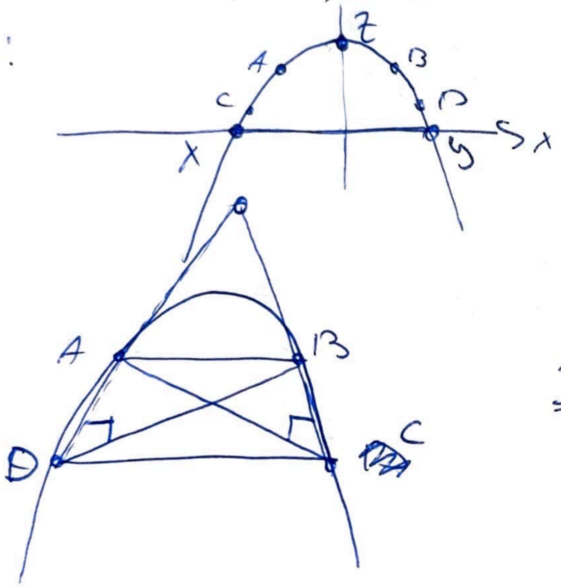
Тогда: $S_{общее} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = \frac{5\pi}{8} + 1 + \frac{\pi(\sqrt{2} - \frac{1}{8})}{8} +$

$+ \frac{\frac{3}{8}\pi}{8} = \frac{5\pi + 8 + \pi(\sqrt{2} - \frac{1}{8}) + \frac{3}{8}\pi}{8} = \frac{\pi(5 + \sqrt{2} + \frac{1}{4}) + 8}{8}$

$\Rightarrow S_{общее} = \frac{\pi(5{,}25 + \sqrt{2})}{8} + 1$

Задача 6

Если я правильно понял, то тунель выглядит так:



XY - ширина

высота из Z на XY есть высота тунеля

~~Пусть X(0;0) => Y(16;0) => Z(8;8) $y = -bx^2 + a$ => 8 = -64b + a~~

$y = -bx^2 + a \Rightarrow Z(0;8); X(-8;0); Y(8;0)$

$\Rightarrow a = 8; b = \frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}x^2 + 8$

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ - можно вписать при чём AB - диаметр. Пусть M - середина $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow M(0; c)$. Пусть окружность радиуса $R \Rightarrow$

уравнение окружности: $x^2 + (y - c)^2 = R^2$