



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 13

Место проведения Москва  
город

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Ляхова Виктора Андреевича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

*Ляхов*

Дата  
«25» февраля 2024 года

Подпись участника  
Ляхов

Итоговая оценка:

| 1  | 2             | 3 | 4  | 5  | 6  | 7 | 8 | $\Sigma$ |
|----|---------------|---|----|----|----|---|---|----------|
| 12 | <del>12</del> | 0 | 12 | 12 | 12 | 0 | 0 | 60       |

12

0

60 (шестьдесят)

Черновики.

4.7

4.10 + 9 + 8 + 7

в.

4.10 + 3.9 +

$$\frac{\frac{1-1}{2} - 1}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{79} = \frac{3 \cdot 48}{79 \cdot 48} = \frac{144}{3792}$$

$$\frac{316}{3792}$$



f(1+)

$$\frac{x-2+y}{x-2} = 1 + \frac{y}{x-2}$$

$$f(+)=\frac{1-1}{2}$$



$$f\left(\frac{x-2+y}{x-2}\right) = f\left(1 + \frac{y}{x-2}\right)$$

$$f\left(1 + \frac{y}{x-2}\right) = \frac{y}{x-2}$$

$$\frac{8}{18} + \frac{3\sqrt{2}}{18}$$

$$\frac{\frac{1-1}{2} - 1}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$2 \left( C_4^2 \cdot C_{10}^3 + 3 \cdot 4 \cdot C_9^5 + C_3^2 \cdot C_8^3 \right)$$

$$\frac{\pi(8+3\sqrt{2}) \cdot 18}{18}$$

3.4

$y \geq 4$

17 → 18

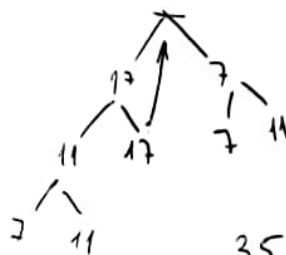
+ 14

+ 22

$-\frac{3}{2}$

$$y - x + 10 = y^2 - 8y + 16$$

$$x = -y^2 + 9y - 6$$



$-\frac{3}{4}$

$-\frac{7}{4}$

78  
34

17.2

17.5

35

+ 36

+ 14

+ 22

+ 34

(50)

36, 14  
14, 14, 22

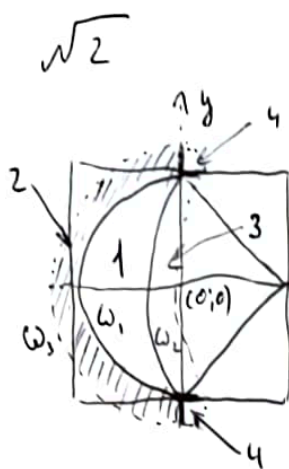
1024

2048

4096



# Листовик I.



Разделим образующую фигуру на области:

1) Изометрический полумесяц.

2) Фигура, полученная растяжением, слева от полумесяца до прямой  $x=0$ .

3) Фигура, полученная сдвигом правой стороны полумесяца на  $\frac{1}{3}$ .

4) 2 четверти окружности на концах (сверху и снизу полумесяца).

$\omega_1$  - окружность, образующая контур полумесяца с центром в  $(0;0)$ ;  $\omega_2$  - с центром в  $(1;0)$

$$R_{\omega_1} = 1; R_{\omega_2} = \sqrt{2}$$

$$S_1 = S_{\omega_1}/2 - (S_{\omega_2}/4 - S_{\Delta(0;1)(0;-1)(1;0)}) =$$

$$= \pi \cdot 1^2/2 - \pi \cdot (\sqrt{2})^2/4 + \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$\omega_3$  - окружность, часть которой - внешний контур фигуры (2)  $R_{\omega_3} = R_{\omega_1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$S_2 = S_{\omega_3}/2 - S_{\omega_1}/2 = \frac{\pi \cdot (\frac{4}{3})^2 - \pi \cdot 1^2}{2} = \pi \cdot \frac{7}{9 \cdot 2}$$

$$S_3 = R_{\omega_2}/4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi \sqrt{2}}{6}$$

Чистовик II

$$S_4 = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 / 4 = \frac{\pi}{2 \cdot 9}$$

$$S_{\text{одн}} = 1 + \frac{\pi \cdot 7}{18} + \frac{\pi \sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{18} = 1 + \pi \left( \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi(8 + 3\sqrt{2}) + 18}{18}$$

Ответ:  $\frac{\pi(8 + 3\sqrt{2}) + 18}{18}$

√1

1) Команды без защитников-универсалов:

$$C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{10}^3 = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

(2 вратаря; 4 защитника и 7+3 нападающих)

2) Есть 1 универсал-защитник:

$$C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

(2 вратаря; 1 защ. универсал; 1 защ; 3 напад.)

3) 2 универсала-защитника:

$$C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_8^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 6 \cdot 7 \cdot 8$$

(2 вратаря; 2 защ. универсала; 3 напад.)

Всего:

$$2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8 \cdot 6 (30 + 42 + 7) =$$

$$= 48 \cdot 79 = 3792$$

Ответ: 3792

Л4 Чистовик III

Автомобиль может попасть из  
 А в С без упилов 2-мя спо-  
 собами: АС; АВС. АС: 17 мин  
 АМС:  $7+11=18$  мин.

Циклы: АВА = ВАВ =  $7 \cdot 2 = 14$  мин  
 ВСВ = ВСВ =  $11 \cdot 2 = 22$  мин.

Всего: 85 мин  $\div 2 \Rightarrow$  кол-во проездов  
 АС нечётно (все остальные движения  
 выполняются за чётное кол-во минут)  
 $17 \cdot 5 = 85$ , но в таком случае через  
 85 мин автомобиль окажется в С.

Если автомобиль остановился в А,  
<sup>сумма</sup>  
~~кол-во~~ проходов АС (17 мин) и АМС (18 мин)  
 чётна. (АС = СА и АВС = САА)

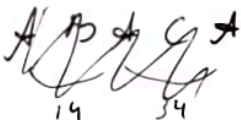
Так как кол-во проездов АС нечётно,  
 то кол-во или 1, или 3, то  
 есть существует хотя бы один проезд  
 АМС. (иначе он не вернётся в А)  
 $17+18=35$   $85-35=50$  мин - занимают остав-  
 шиеся проезды АС, АВС и циклы.

Варианты заполнения: +36 (2 АВС =  $11 \cdot 2$ )  
 +34 (2 АС =  $17 \cdot 2$ )  
 +22 (2 ВСВ =  $11 \cdot 2$ )  
 +14 (2 АВА =  $7 \cdot 2$ )



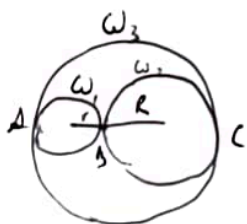
I) Числовые IV  
 $50 = 36 + 14$

II)  $50 = 22 + 14 + 14$

I) маршрут: 

$\underbrace{A \rightarrow B}_{14} \rightarrow \underbrace{B \rightarrow C}_{18} \rightarrow \underbrace{C \rightarrow B}_{18} \rightarrow \underbrace{B \rightarrow A}_{18} = 85$

II)  $\underbrace{A \rightarrow B}_{14} \rightarrow \underbrace{B \rightarrow A}_{14} \rightarrow \underbrace{C \rightarrow B}_{22} \rightarrow \underbrace{B \rightarrow A}_{18} = 85$



$$P_{\omega_1/2} = 15 = 2\pi r/2$$

$$P_{\omega_2/2} = 25 = 2\pi R/2$$

$$P_{\omega_3/2} = \frac{2\pi(R+r)}{2} = 40 \text{ км}$$

$$15 = \pi r \quad 25 = \pi R$$

I)  $15 \cdot 2 + 40 + 40 + 40 + 40 = 190 \text{ км}$

II)  $15 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 40 + 25 \cdot 2 + 40 = 190 \text{ км}$

Ответ: 190 км

$\sqrt{5}$

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = f\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right) = f\left(1 + \frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$$

$$1 + \frac{4}{x-2} = t \Rightarrow f(t) = \frac{t-1}{2}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \quad \text{Поэтому при}$$

применении  $f(x)$ , мы вычитаем из чис-

Числовни  $\nabla$ литра  
личибаемзнаменатель, а потом уве-  
знаменатель в 2 раза.

~~$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$~~

~~$g(x) = \frac{x^{-1} - 1}{2}$~~

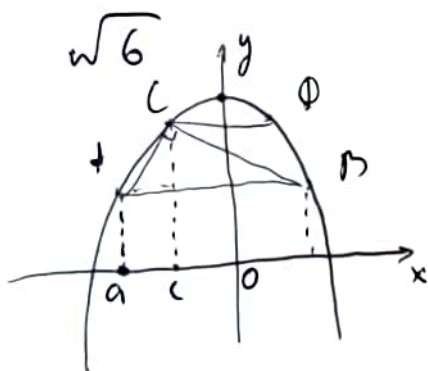


~~$\frac{\dots - 1}{2}$~~

$$g(x) = x \cdot 2^{-12} + C$$

$$g'(x) = 2^{-12} = \frac{1}{4096}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4096}$$



$$y = a - bx^2$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 10; x_2 = -\frac{10}{2} = -10$$

$$a = 10 \text{ (высота)}$$

$$y = 10 - 0,1x^2$$

$$A(a; 10 - 0,1a^2) \quad C(c; 10 - 0,1c^2)$$

$$B(-a; 10 - 0,1a^2) \quad D(-c; 10 - 0,1c^2)$$

$$\vec{AC} = (c - a; 0,1(a^2 - c^2))$$

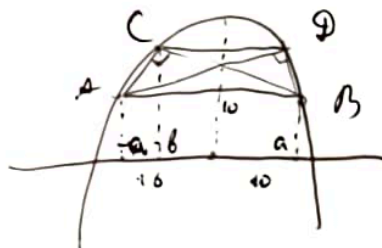
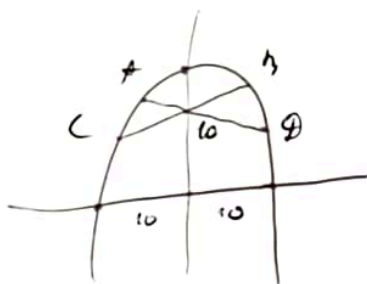
$$\vec{BD} = (c + a; 0,1(a^2 - c^2))$$

$$\frac{\vec{AC}}{c-a} = (1; -0,1(c+a)) \quad \frac{\vec{BD}}{c+a} = (1; 0,1(a-c))$$





черновики



$$-6x^2 + 0x + 10$$

$$-0,1x^2 + 10$$

$$a=1$$

$$100 \cdot 0,1$$

$$ax + by + cz = 0$$

- (0; 0; 0)
- (8; 6; 1)
- (2; 4; 5)

$$a + 8 + 6b + c = 0$$

$$-\frac{5c}{12}$$

$$2 + 4b + 3c = 0$$

$$c = -8 - 6b = -8 + \frac{66}{2} = -\frac{122}{2} = \frac{10}{2}$$

$$2 + 4b - 24 - 18b = 0$$

$$-14b = 22$$

$$b = -\frac{22}{14} = -\frac{11}{7}$$

\*r

$$x - \frac{11}{2}y + \frac{10}{2}z = 0$$

$$7x - 11y - 12z = 0$$

$$7x - 11y + 10z = 0$$

$$14y - x - 81 = 1x - 5$$

$$x = 5$$

$$-x + 5 - 13 + y$$

$$\begin{cases} -13y = 0 \\ -13y = \pm(2x - 10) \end{cases}$$

$$y = 15$$

$$+17y = 15$$

$$-13y = 2x - 10$$

$$-13y = -2x + 10$$



Числовина VI

Эти вектора перпендикулярны, значит

$$1 \rightarrow 0, 0, 1(a^2 - c^2) = 0$$

$$a^2 - c^2 = 100$$

Максимальное значение  $a^2 = (10)^2 = 100$

минимальное значение  $c^2 = 0^2 = 0$

⇓

$$a = -10; c = 0$$

⇓

расстояние от земли до  $AB = 10 - 0,1(-10)^2 = 0$

а до  $CD = 10 - 0,1(0)^2 = 10$

⇓

расстояние между балками = 10

Ответ: 10.

$\sqrt{3}$

$$\begin{cases} (xy + 3x - 2y - 6) | y - x - 8 | = (x - 5) | xy + 3x - 2y - 6 | \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 4 \end{cases}$$

$$\sqrt{y - x + 10} = y - 4$$

$$|y - x - 8| = |x - 5|$$

$$\begin{cases} y = 13 \\ -13 + y = 2x - 10 \\ -13 + y = -2x + 10 \end{cases} \begin{cases} y = 13 \quad (1) \\ y = 2x + 3 \quad (2) \\ y = -2x + 23 \quad (3) \end{cases}$$

$$1) \quad 13 - x + 10 = 81 \\ x = -58$$

$$2) \quad 2x + 3 - x + 10 = 4x^2 + 1 - 2x \\ 4x^2 - 3x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{8}$$

Чистовик VII

$$3) -3x + 33 = 4x^2 - 76x + 361$$

