0 500098 290005

50-00-98-29
(40.25)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Малышкина Алексея Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	8	12	12	12	0	12	4	72

50-00-98-29 (40.25)

№1 72 (семьдесят два)

2 вар. выбр. гр.

$C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

$C_6^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 20$ $= 400$ (без 3)

$2\cdot (C_8^2 \cdot C_9^3 -$

вар., где 5 или 4 или 4 универ.

1) $2 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3$ 0 ун.

2) $2\cdot (5\cancel{4}) \cdot C_8^3$ 1 ун.

3) $2 \cdot C_7^3$ 2 ун.

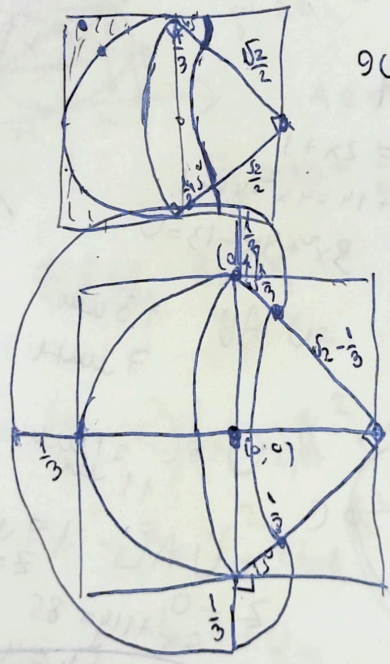
$2\cdot 10\cdot \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 2} = 20\cdot 12\cdot 7 = 20\cdot 84 = 1680$

$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}\cdot 10\cdot 2 = 56\cdot 10 = 560$

$\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6}\cdot 2 = 70$

$1680 + 630 =$
$= 2310$

№2.



90

$\sqrt2$

$S = \frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}\pi = \frac{8}{9}\pi$

$\frac{1}{2}\sqrt2\cdot\sqrt2 = 1$

$1 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt2 - \frac{1}{3}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{4}\pi\left(2 - \frac{2\sqrt2}{3} + \frac{1}{9}\right)$

$\frac{135}{360}\pi\frac{1}{9} = \frac{\pi}{24}$

$\frac{8}{9}\pi + \frac{\pi}{24} + 1 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt2 - \frac{1}{3}\right)^2$

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8|=(x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10}=y-3\end{cases}$$

$xy+4x-y-4=(x-1)(y+4)$

$y \geq 3$

1) $x < 4$

$$\begin{cases} |y-x-8| = 4-x \\ \sqrt{y-x+10}=y-3 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} y-\cancel{x}-8=4-\cancel{x} \\ y-x-8=x-4 \end{array}\right.$

$y=12$ $\sqrt{22-x}=9$ $22-x=81$ $x=-59$

$y \geq x+8$

$y-\cancel{x}-8=4-\cancel{x}$

$y=12$

$\sqrt{22-x}=9$

$22-x=81$

$x=-59$

$\begin{cases}x=-59 \\ y=12\end{cases}$ V

$y=2x+4$

$\sqrt{x+14}=2x+1$

$x+14=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$D=9+16\cdot13=217$

$160+48=208$

$x=$

$y<x+8$

$y=2x+4$

$\sqrt{x+14}=2x+1$

$x^2+14=4x^2+4x+1$

$3x^2+4x-13=0$

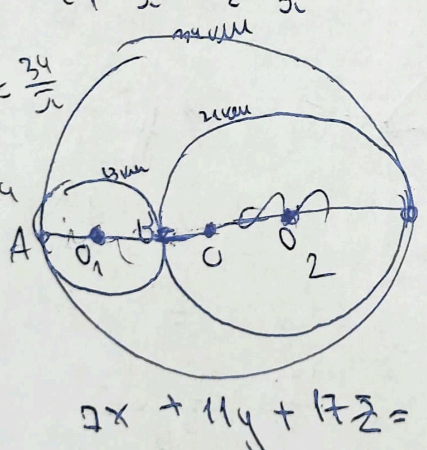
$13+\frac{84}{42}+\frac{68}{0}$ 0 -68 -42 -84

$x=\pi r=13\cdot\pi$

$r_1=\frac{13}{\pi}$ $r_2=\frac{21}{\pi}$

$r_3=\frac{34}{\pi}$

AC = 34



∪ AB 13 км

7 мин

∪ BC 21 км

11 мк

∪ AC 17 мк

$z=1$

$\begin{cases}x=9 \\ y=2 \\ z=0\end{cases}$

$z=0$

$7x+11y=85$

$\begin{cases}y=4 \\ x=1 \\ z=2\end{cases}$

$7x+11y+17z=85$

$z=5$

$z=1$

$\begin{cases}7x+11y=68\end{cases}$

$y=3$

$x=5$

$\begin{cases}x=5 \\ y=3 \\ z=1\end{cases}$ V

$z=4$ $68+7x+11y=85$ $17x$

$z=3$ $7x+11y=34$

$z<2$ $7x+11y=51$

50-00-98-29
(40.25)

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$$

$$f\left(1-\frac{2}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$$

$$t = 1-\frac{2}{x+1}$$

$$\frac{t-1}{2} = -\frac{1}{x+1}$$

$$f(t) = \frac{t-1}{2}$$

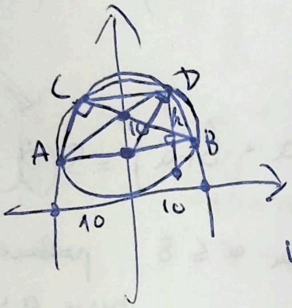
$$g(x) = \frac{\frac{t-1}{2}-1}{2} \ldots = \frac{t}{2^9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^9} =$$

$$= 2^{-9}t - 2^{-9}(2^8 + 2^7 + \ldots + 1)$$

$$2^9 - 1$$

$$= 2^{-9}t - 1 + 2^{-9}$$

$$g'(t) = 2^{-9}$$



$\rho(AB, CD) = h$

$ABDC$ - пр. трап.

$$y = 10 - \frac{1}{10}x^2$$

$B_x = x_1$

$D_x = x_2$

$$10 - \frac{1}{10}x_2^2 - \left(10 - \frac{1}{10}x_1^2\right) =$$

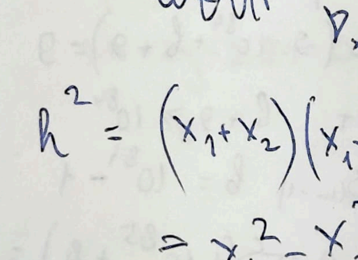
$$h = \frac{1}{10}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

$$h^2 = (x_1+x_2)(x_1-x_2) \qquad h^2 + (x_1-x_2)^2 = x_1^2$$

$$h^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 10h$$

$$h = 10$$



$D\left(x_2, 10 - \frac{1}{10}x_2^2\right)$

$B\left(x_1, 10 - \frac{1}{10}x_1^2\right)$

$$h^2 = (x_1+x_2)(x_1-x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 10h$$

$$h = \frac{1}{10}\left(x_1^2 - x_2^2\right) \qquad h = 10 \quad h = 0$$

$s(n)$ — сумма цифр n

85-зн. n $n \to \max$.

$\forall m: 1 \le m \le n$

$S(mn) = S(n)$

$n = 10^{84} \cdot a + b$, $b < 10^{84}$

$S(n) = S(a) + S(b)$

$m = 10^{84} + 1$

$nm = 10^{168} a + 10^{84} b + 10^{84} a + b$

$11 \cdot 17 = 170 + 17$

$= 10^{168} \cdot a + 10^{84}(a+b) + b$

$S(nm) = S(b) + S(10^{84} a + b + a)$

$S(10^{84} a + b + a) = S(a)$

$m-1 = a_{84} \cdot 10^{84} + a_{83} \cdot 10^{83} + \ldots + a_0$

$a_i \in \{0 \ldots 9\}$

при $a \le 8$ равенства в.

при $a + b = 0$ ✗

при $a = 9$

$S(9 \cdot 10^{84} + b + 9) = 9$

$S(99\ldots9 - (m-1)) + S(m-1)$

$b + 9 \geq 10^{84}$

$b = 10^{84} - 1$

$\sum_{i=0}^{84} 9 - a_i$ $\sum_{i=0}^{84} a_i = S(a)$ $9 \cdot 85$

$S(1 \cdot 10^{85} + 8) = 9$

$85 \cdot 9 = 765$

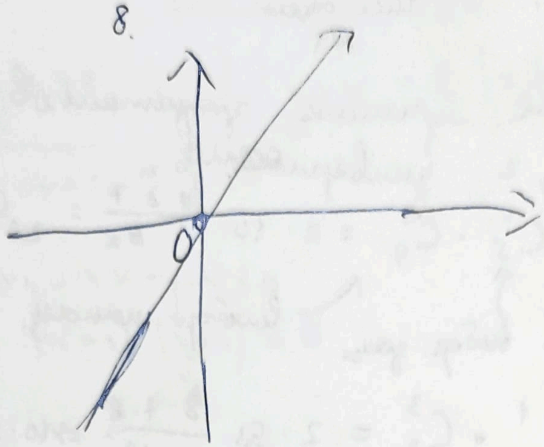
⇒ предп. $n = 9 \cdot 10^{84} + 10^{84} - 1 = 10^{85} - 1$

$S(nm) = S(10^{85} m - m) =$

$S(10^{85}(m-1) + 10^{85} - m) = S(m-1) + S(10^{85} - m)$

50-00-98-29 (40.25)

8.



$A(-5,-5,-5)$
$B(1,3,-4)$
$C(-1,-3,-1)$

$Ax+By+Cz+d=0$
$-5(A+B+C)+d=0$
$A+3B-4C+d=0$
$-A-3B-C+d=0$
$-5C+2d=0$
$C=\frac{2}{3}d$

$-\frac{3d}{5}x+\frac{2d}{5}y+\frac{2d}{5}z+d=0$

$3x-2y-2z-5=0$

$-15+20-5=0$

$3-6+8-5=0$

$-3+6+2-5=0$

$(A+B+C)5=(A+B)\cdot5+$

$+2d=d-d$

$A+B=-\frac{d}{5}$

$-\frac{d}{5}+2B-\frac{8}{5}d+d=0$

$2B=\frac{9d}{5}-d=\frac{4d}{5}$

$B=\frac{2d}{5}$

$A=-\frac{3d}{5}$

$3x-2y-2z-5=0$

$x/2$

$z\in\{-5,-4,-3,-2,-1\}$

$x\in\{-5\ldots1\}$ $-5\ -3\ -1\ 1$

$y\in\{-5\ldots3\}$

$x=-1$
$y+z+4=0$
$(-5,1),(-$

$x=-5$
$-20-2y-2z=0$
$y+z+10=0$
$\begin{cases}-5\\-5\end{cases}$ V 1 реш.

$x=-3$
$2y+2z+14=0$
$y+z+7=0$
$(-5,-2),(-4,-3),$ 4 реш
$(-3,-4),(-2,-5)$

Чистовик

№1.

В качестве лучших защитников могли выбрать 0, 1, 2 ~~универсалов~~ универсалов

0 ун: $2 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3 = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{\cancel{6}} = 20 \cdot 84 = 1680$ ← выбор напад.

вар. выбора вр. выбор. защ.

1 ун: $2 \cdot C_3^1 C_5^1 \cdot C_8^3 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 3 \cdot 10 \cdot 56 = \cancel{560}\ 1680$

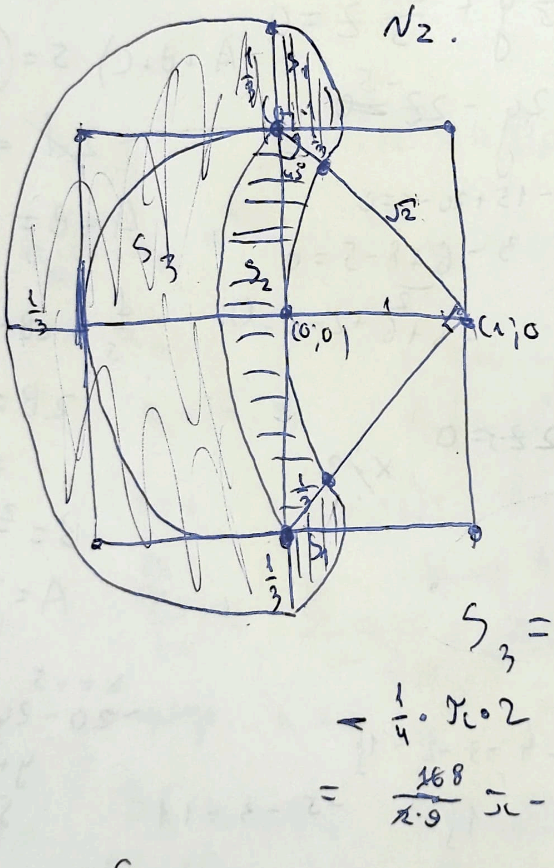
2 ун: $2 \cdot C_3^2 C_5^0 \cdot C_7^3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 21 \cdot 10 =$

$= 210$

$1680 \cdot 2 + 210 = 3360 + 210 = 3570$

Ответ: 3570 вариантов

№2.



$S_1 = \frac{135°}{360°} \pi \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{\overset{3}{\cancel{135}}}{\underset{8}{\cancel{360}}} \cdot \frac{\pi}{\underset{3}{\cancel{9}}} =$

$= \frac{\pi}{24}$

$S_2 = \frac{1}{4}\left(\pi \cdot 2 - \pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2\right)$

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 =$

$= \frac{16\ 8}{\cancel{2} \cdot 9}\pi - \frac{1}{2}\pi + 1$

$S = 2S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{18} + 1 + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{(14 + 3 + 18)\pi}{36} + 1 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{35\pi}{36} - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + 1$

Ответ: $\frac{35}{36}\pi - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + 1$

Чист. №3.

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8|=(x-4)|xy+4x-y-4|\\ \sqrt{y-x+10}=y-3\end{cases}$$

ОДЗ: $y\geq 3$
$x\leq 10+y$

1) $xy+4x-y-4<0$

$(x-1)(y+4)<0$

$x<1$

$|y-x-8|=4-x$

1.1) $y\geq x+8$

$y-\cancel{x}-8=4-\cancel{x}$

$y=12$

$\sqrt{22-x}=9$

$22-x=81$

$x=-59$

$\begin{cases}x=-59\\ y=12\end{cases}$

1.2) $y<x+8$

$y-x-8=x-4$

$y=2x+4$

$\sqrt{x+14}=2x+1$

$x+14=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$D=9+16\cdot 13=217$

$\underset{\underset{208}{\parallel}}{160+48}$

$x_1=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}$

$y_1=\frac{-3-\sqrt{217}}{4}+4=\frac{13-\sqrt{217}}{4}<0$ – не уд. ОДЗ

$x_2=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}>1$ – не уд. ОДЗ

3) $x>1$

$|y-x-8|=x-4$

3.1) $y\geq x+8$

$y=2x+4$

(из П1) $x_1=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}<1$

– не уд. ОДЗ

$x_2=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}$

$y_2=\frac{13+\sqrt{217}}{4}<\frac{13+15}{4}=7$

$x_2+8=\frac{61+\sqrt{217}}{8}>$

$>\frac{75}{8}>7\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не уд. ОДЗ

3.2) $y<x+8$

$y-\cancel{x}-8=4-\cancel{x}$

$y=12$ – уже реш.

2) ~~$x-y+4$~~ $(x-1)(y+4)=0$

$x=1$

$\sqrt{y+9}=y-3$

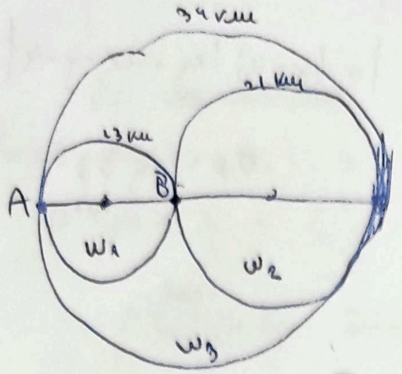
$y+\cancel{9}=y^2-6y+\cancel{9}$

$y\neq 0$ $y=7$

$\begin{cases}x=1\\ y=7\end{cases}$

Ответ: $(-59;12)$; $(1;7)$

4. Числ.



По условию осев AB, BC – диаметры (рав-во дуг)

=> AC тоже диам.

$\cup AC = 13 + 21 = 34$

Пусть x раз авто проезжало $\cup AB$, y раз $\cup BC$, z раз

$$7x + 11y + 17z = 85$$

$x, y, z \in \mathbb{Z}_+$

Перебором получаем реш.

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

∃ пример, 2 полных круга ω_1, $\cup AB$, 1 полн круг ω_2 $\cup BC$, $\cup AC$

~~тогда~~ $x + z$ должно быть чётным, иначе бы авто не завершило путь в A (кол-во выездов из A равно кол-ву въездов)

$5 \cdot 13 + 3 \cdot 21 + 34 = 65 + 63 + 34 = 128 + 34 = 162$ км

Ответ: 162 км.

5. Чист.

$y = f(x)$

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$f\left(1-\frac{2}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$t = 1-\frac{2}{x+1}$

$\frac{t-1}{2} = -\frac{1}{x+1}$

$f(t) = \frac{t-1}{2}$

$g(x) = \cancel{f(t)} = \underbrace{f(f\dots f(x)))}_{9} = \underbrace{\frac{\frac{\frac{\cancel{x}-1}{2}-1}{2}-1}{2}\dots}_{9}$

$= \frac{x}{2^9} + C$

$g'(x) = \frac{1}{2^9}$

$g'(0) = \frac{1}{2^9}$

Ответ: $\frac{1}{2^9}$

7.

Пусть $n = 10^{85}-1$ (больше сто быть не может)

$m-1 = a_{84}\cdot 10^{84} + \dots + a_0 \qquad a_i \in \{0..9\}$

$10^{85} \vee$

$S(mn) = S(10^{85}m - m) = S(10^{85}(m-1) + (10^{85}-m))$

$= S(10^{85}(m-1)) + S(10^{85}-1-(m-1)) = \sum_{i=0}^{84} a_i + \sum_{i=0}^{84} 9-a_i$

$\underline{-\underbrace{99\dots9}_{m-1}} \qquad = 9\cdot 85$

$S(n) = 9\cdot 85 = S(mn)$ ч.т.д.

Ответ: $10^{85}-1$.

8. числ.

$P(-5,-5,-5)$

$Q(1,3,-4) \in \alpha \quad Ax+By+Cz+d=0$

$R(-1,3,-1)$

$$-5(A+B+C)+d=0$$
$$A+3B-4C+d=0$$
$$-A-3B-C+d=0$$
$$-5C+2d=0$$
$$C=\frac{2d}{5}$$
$$5(A+B)+2d=d$$
$$A+B=-\frac{d}{5}$$
$$-\frac{d}{5}+2B-\frac{8d}{5}+d=0$$
$$B=\frac{2d}{5}$$
$$A=-\frac{3d}{5}$$
$$-\frac{3d}{5}x+\frac{2d}{5}y+\frac{2d}{5}z+d=0$$
$$3x-2y-2z-5=0$$

Очев., все точки $\in PQR$ лежат в пр. пар-пиде с гранями, параллельными XOY, XOZ, YOZ, 1 образ. PQR

$-5 \le x \le 1$

$-5 \le y \le 3$

$-5 \le z \le -1$

$3x-5 \,\vdots\, 2 \Rightarrow x \,\vdots\, 2$

1) $x=-5$

$y+z=-10$

$y=-5$

$z=-5$ 1 вар.

2) $x=-3$

$y+z=-7$

$(y,z)=(-5,-2),(-4,-3),(-3,-4),(-2,-5)$ 4 вар.

3) $x=-1$ $(y,z)=(-3,-1),(-2,-2),(-1,-3),(0,-4),(1,-5)$ 5 вар.

$y+z=-4$

4) $(y,z)=(3,-4),(2,-3),(1,-2),(0,-1)$ 4 вар.

$5+8+1=14$

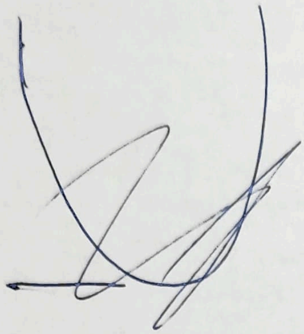
~~4)~~ $x=1$ $y+z=-1$ ~~(y,z)~~

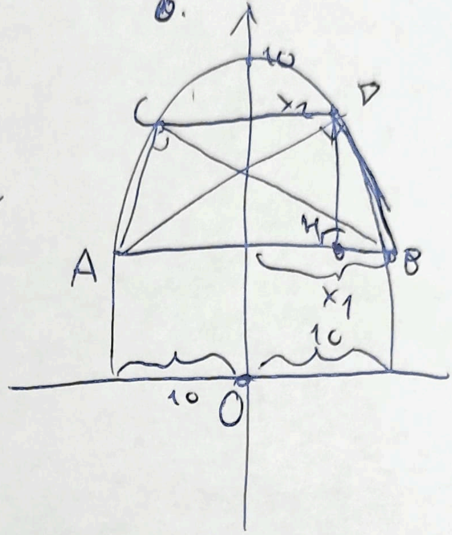
~~Ответ: 14 точек~~

Если т. крайняя по x, y или z числ. то точек с ней коорд. больше нет.

$(-5,-5,-5)$, $(-3,-4,-3)$, $(-3,\cancel{-3},-4)$,
$(-1,-3,-1)$, $(-1,-2,-2)$, $(-1,-1,-3)$,
$(1,3,-4)$, Ответ: 6 точек

6.





Из усл. $y = 10 - \frac{1}{10}x^2$

Пусть $B_x = x_1$, $D_x = x_2$

$$h = \frac{1}{10}\left(x_1^2 - x_2^2\right) = y(x_2) - y(x_1)$$

ΔADB - пр. $\Rightarrow h^2 = AH \cdot HB = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
$= x_1^2 - x_2^2 = 10h \Rightarrow h = 10 \Rightarrow$
такая констр невозможна

Ответ: невозможно.