0 204303 600008

20-43-03-60
(40.28)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Малькова Ярослава Борисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Маль

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	0	12	12	12	0	12	12	68

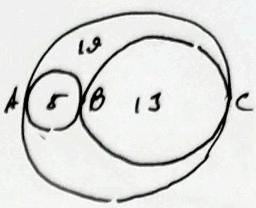
20-43-03-60
(40.28)

Черновик

3. 68 (шестьдесят восемь)

$(xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6|$

$\sqrt{y-x+16} = y-4$



5B

OA

10 AB
2 BC
1 AC

95 − 13 = 19

95 − 32 = 63

$\boxed{58}$

45

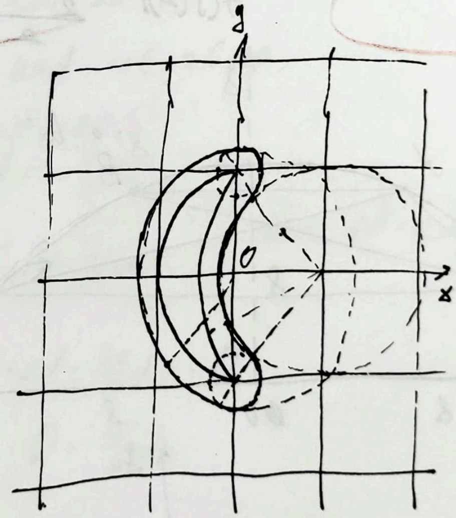
9

1 AB
4 BC
2 AC

39 = 3 · 13

$\boxed{\begin{matrix}5AB\\1BC\\3AC\end{matrix}}$

20.



$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$g'(0)$

$g'(x) = (f(f(\ldots(x))))'$

$f(0) = -\frac{1}{2}$

$\frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{2}$

$f(y) = -\frac{2}{\cancel{x}\,y+2}$ $y=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ Черновик

$\times\begin{array}{r}99\\63\end{array}$

$\frac{x-2}{x+2}=y$

$x-2=yx+2y$

$x(y-1)=-2-2y$

$\boxed{x=\frac{-2-2y}{y-1}} = -2\left(\frac{1+y}{y-1}\right)$

$\times\begin{array}{r}99\\64\\\hline 396\\594\\\hline 6336\end{array}$

(18) $\boxed{a-1}$

$-1-a = 10-a$

$10-a+a-1$

9999.....999

gfedcba

(a-1)..... 9999(10-a)

(b-1)99. . . . 99(10-b)

$f(0)=$

$f(y) = -\frac{2}{x+2} = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{-\cancel{2}\left(\frac{y+1}{y-1}\right)+\cancel{2}} = \frac{1}{\frac{y+1}{y-1}-1} = \boxed{\frac{y-1}{2}}$

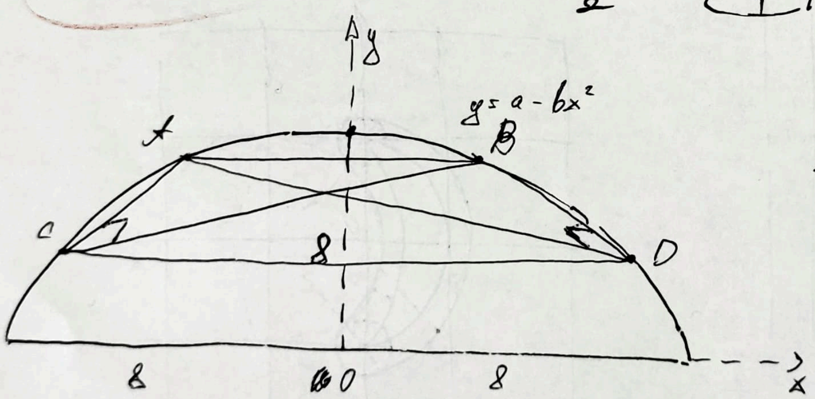
$10-a = 10-a$

$9+10-b = 9-b$

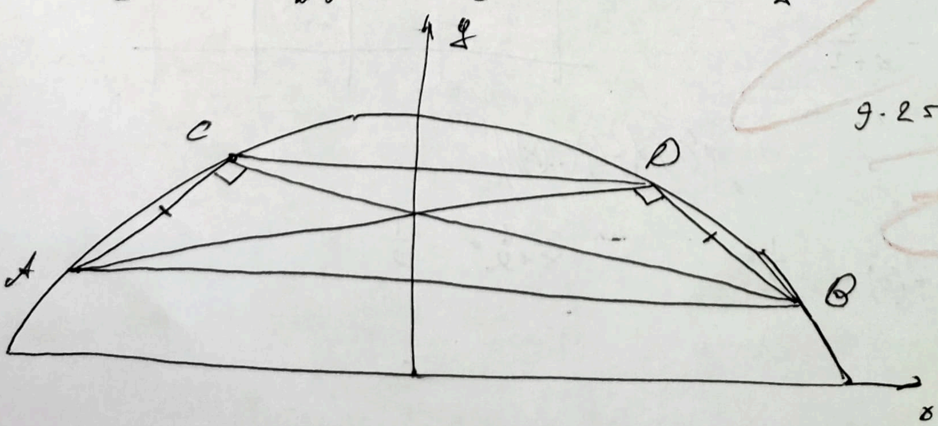
$9+9+10-c=$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \boxed{\frac{x-3}{4}}$



$\times\begin{array}{r}99\\x\\\hline 9x9x\end{array}$



$9\cdot 2=18$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

20-43-03-60 (40.28)

Черновик.

$(10-a)+($

$\overbrace{1000\ldots0}^{75}$

$\overbrace{11000\ldots0}^{75}$

$\times\ 100$
68
6800

$\times\ 100$
64
6400
64
6336

$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots$

$a_1\ldots a_m000\ldots00$
$a_1a_2a_3\ldots a_{m-1}a_m$

$9-a_{m-1}10-a_m$

$Ax+By+Cz+D=0$

$-7A+4B+3C+D=0$
$A+5B+9C+D=0$
$-5A+8B+7C+D=0$

$8A+B+6C=0$
$B=-8A-6C$

~~$-5A-64A-48C+7C$~~

$-6A+3B-2C=0$

$-6A-24A-18C-2C=0$

$-30A=20C$
$A=-\frac{2}{3}C$

$B=-8A+9A=A$

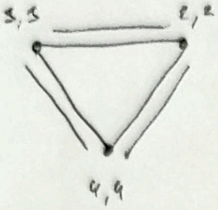
$C=-\frac{3}{2}A$

$C_k^n\quad C_n^k$

$C_1^3\quad \boxed{C_3^1}$

$A+5A-\frac{27}{2}A=-D$
$D=\frac{15}{2}A$

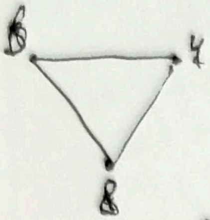
Черновик.



$4+3+2$

$12 \cdot 35 =$

$$\begin{array}{r} \times\ 35 \\ 18 \\ \hline 280 \\ 35 \\ \hline 630 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 54 \\ 21 \\ \hline 54 \\ 108 \\ \hline 1134 \end{array}$$



$a+b+c = \frac{6+4+8}{2}$

$$\begin{array}{r} \times\ 72 \\ 21 \\ \hline 72 \\ 144 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 7 \\ \hline 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 216 \\ 36 \\ \hline 252 \end{array}$$

$\frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{2}$

$x-2 = -\frac{1}{2}x - 1$

$\frac{3}{2}x = 1$

$x = \frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r} -\ 210 \\ 21 \\ \hline 189 \end{array}$$

$-\frac{2}{\frac{2}{3}+2} = \frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r} \times\ 21 \\ 12 \\ \hline 42 \\ 21 \\ \hline 252 \end{array}$$

$x-2 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{8}$

$-\frac{2}{\frac{2}{7}+2} = -\frac{7}{8}$

$\frac{7}{4}x = \frac{1}{8}$ $\quad x =$

$\frac{x-2}{x+2} = -\frac{3}{4}$ $\qquad x-2 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

$\frac{7}{4}x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{2}{7}$

20-43-03-60
(40.28)

Чистовик

Задача № 1.

Рассмотрим кол-во способов при различном выборе среди "универсалов".

I. Не выбран ни один:

$\cancel{C_3^1 \cdot C}$ $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 6 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 18 \cdot 35 = \boxed{630}$

II. Выбран 1 универсал на роль защитника:

$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 \cdot C_3^1 = 3 \cdot 4 \cdot 35 \cdot 3 = 36 \cdot 35 = \boxed{1260}$

III. Выбран 1 на роль нап.:

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2 \cdot C_3^1 = 3 \cdot 6 \cdot 21 \cdot 3 = 54 \cdot 21 = \boxed{1134}$

IV. Выбрано 2 на роль защ.:

$C_3^1 \cdot C_7^3 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 35 \cdot 3 = 3 \cdot 105 = \boxed{315}$

V. Выбраны 1 на роль защ. и 1 на роль нап.:

$C_3^2 \cdot C_7^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 2 = 72 \cdot 21 = \boxed{1512}$

VI Выбраны 2 на роль нап.:

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 36 \cdot 7 = \boxed{252}$

VII Выбраны 2 на роль защ. и 1 на роль нап.:

$C_3^1 \cdot C_7^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 3 \cdot 21 \cdot 3 = 9 \cdot 21 = \boxed{189}$

VIII Выбраны 1 на роль защ. и 2 на роль нап.:

$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 12 \cdot 21 = \boxed{252}$

IX Выбраны 3 на роль нап.:

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^3 = 3 \cdot 6 = \boxed{18}$

$$
\begin{array}{r}
630 \\
+1260 \\ \hline
1890 \\
+1134 \\ \hline
3024 \\
+315 \\ \hline
3339 \\
+1512 \\ \hline
4851 \\
+252 \\ \hline
5103 \\
+189 \\ \hline
5292 \\
+252 \\ \hline
5544 \\
+18 \\ \hline
5562
\end{array}
$$

Ответ: $\boxed{5562}$.

Чистовик.

Задача №4.

автомобиль должен быть в пути 95 минут, а значит он должен проехать какую-либо ~~дугу~~ дугу нечётное кол-во раз.

Обозначим кол-во проездов дуги $AB = a$; $BC = b$ и $CA = c$.

Рассмотрим отрезок движения автомобиля, когда он выехал из точки A, и когда он после этого впервые попал в неё снова. Такой отрезок точно сущ. т.к. автомобиль начал и закончил движение в т. A.

Вначале автомобиль поехал к одной из точек B или C. ~~он~~ без ограничений общности пусть к точке B.

Тогда он мог вернуться через то же ребро или через другое.

Если автомобиль вернулся через то же ребро, то он проехал дуги:

$a = 2$; $b = 2x$; $c = 0$

Если через другое, то:

$a = 1$; $b = 2y + 1$; $c = 1$.

В обоих случаях $a \equiv_2 b \equiv_2 c$.

Это выполняется для всех отрезков с нач. в A и "первым" концом в A. Разобьём весь путь на такие отрезки и тогда для всего пути вып., что:

$a \equiv_2 b \equiv_2 c$.

Также, хотя бы один из них неч., следов.:

$a \equiv_2 b \equiv_2 c \equiv_2 1$.

Также:

$5a + 13b + 19c = 95$.

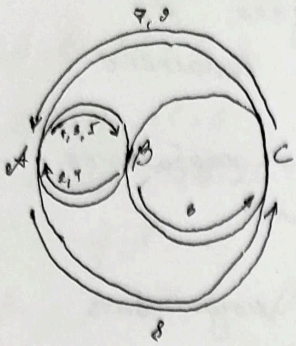
Перебором получаем, что нам подходят значения:

$a = 5$; $b = 1$; $c = 3$

$25 + 13 + 57 = 95$.

Предложим один из вар. перемещения, при таких данных:

Чистовик:



(Здесь на стрелках написан порядок, в котором можно перемещ.)

Итого, ответ $= 5\cdot 15 + 1\cdot 25 + 3\cdot x$ где x длина дуги AC.

$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} \Rightarrow C_{AC} = 2\pi(R_{AB} + R_{BC}) = C_{AB} + C_{BC} = 40.$

Ответ: $\boxed{220}$

Задача №5.

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{-2}{x+2}$ $\qquad \frac{x-2}{x+2} = y$

$f(y) = \frac{-2}{x+2}$

$x - 2 = yx + 2y \qquad x(y-1) = -2y - 2 \qquad x = \frac{-2(y+1)}{y-1}$

$f(y) = \frac{-2}{\frac{-2(y+1)}{y-1} + 2} = \frac{y-1}{y+1-(y-1)} = \frac{y-1}{2}$

Итого, начальная функция представима в виде:

$f(y) = \frac{y-1}{2}$. $\left(f(x) = \frac{x-1}{2}\right)$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$.

Док. по индукции, что $\underbrace{f(f(\ldots(x)))}_{n} = \frac{x - 2^n + 1}{2^n}$

Пусть для m верно, тогда

$\underbrace{f(f(\ldots(x)))}_{m+1} = f\left(\underbrace{f(f(\ldots(x)))}_{m}\right) = f\left(\frac{x-2^m+1}{2^m}\right) = \frac{\frac{x-2^m+1}{2^m} - 1}{2} = \frac{x - 2^{m+1} + 1}{2^{m+1}}.$

Тогда $g(x) = \frac{x - 2^{11} + 1}{2^{11}}$; $g'(x) = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$ $\qquad g'(0) = \frac{1}{2048}$

Ответ: $\frac{1}{2048}$

Чистовик

Задача №7.

Докажем, что для числа $\underbrace{999\ldots99}_{75}$ выполнено данное условие. Так как данное число — наибольшее 75 — значное число, оно будет искомым.

Представим $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{75}}$ ($a_1, a_2 \ldots$ могут быть нулями)

Тогда $n \cdot m = 999\ldots9 \cdot m = (100\ldots00 - 1) \cdot m = \underbrace{1000\ldots00}_{75} m - m.$

$1000\ldots00m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{75} \underbrace{000\ldots00}_{75}}$

Предположим $a_{75} \neq 0$:

$$\begin{array}{r} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_{75} 000\ldots00} \\ \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{74} a_{75}} \\ \hline a_1 a_2 \ldots (a_{75}-1) \ldots (9-a_{74})(10-a_{75}) \end{array}$$

Т.к. $a_{75} \neq 0$, то все $(10-a_{75})$; $(9-a_i)$; $(a_{75}-1)$; a_i являются цифрами.

Сумма цифр итогового числа $=$

$a_1 + a_2 + \ldots + (a_{75}-1) + (9-a_1) + \ldots + (10-a_{75}) = 9+9+9\ldots+9 = 9 \cdot 75 = S(n).$

Если $a_{75} = 0$, то представим m в виде $10^k \cdot q$, где ~~цифр~~ q не оканчивается на 0. Тогда:

$n \cdot m = n \cdot 10^k \cdot q = 10^k (n \cdot q)$ $\quad q \in [1; n] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(nq) = S(n)$, а умножение на 10^k не меняет сумму цифр. $\Rightarrow S(nm) = S(n)$.

Таким образом $999\ldots99$ подходит под условие $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ оно искомое.

Задача №8.

Напишем уравнение плоскости Δ:

$$\begin{cases} -7A + 4B + 3C + D = 0 \\ A + 5B + 9C + D = 0 \\ -5A + 8B + 7C + D = 0 \end{cases}$$

Черновик:

$8A + B + 6C = 0$ $\quad B = -8A - 6C$

$-6A + 3B - 2C = 0$

$-6A - 24A - 18C - 2C = 0$

$C = -\frac{3}{2}A.$ $\quad B = -8A + 9A = A$

$A + 5A + \frac{27}{2}A = -D$

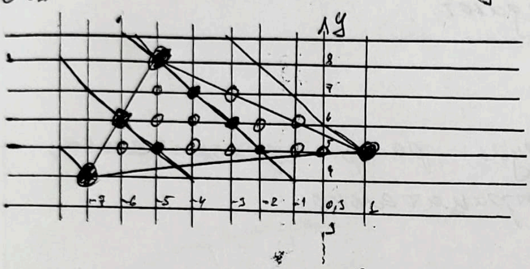
$D = \frac{15}{2}A.$

Итого, уравнение плоскости:

$Ax + Ay - \frac{3}{2}Az + \frac{15}{2}A = 0$

$2x + 2y - 3z + 15 = 0$

Рассмотрим проекцию Δ на плоскость Oxy.
Рассмотрим все целочисл. точки, которые лежат внутри проекции и из уравнения плоскости проверим ~~лежит~~ ли точка на данн. Δ на целочисл. коорд. z:



Рассмотрим, как выражается z через x и y:

~~$z = -2x - 2y +$~~ $\quad z = \frac{2x+2y+15}{3} = \frac{2x+2y}{3} + 5.$

Следовательно, чтобы $z \in \mathbb{Z}$ $x+y$ должен делиться на 3.

Проведем линии, для ц.ч. коорд. которых выполнено:

~~$x \equiv y$~~ $\quad x \equiv_3 -y$

Всего 8 точек внутри Δ попали на данные линии, а значит в изначальном Δ всего 8 точек с целочисл координатами:

Все вершины + $(-6,6,5), (-5,5,5), (-5,8,7), (-4,7,7), (-3,6,7), (-2,5,7)$

Ответ: 8.

Чистовик.

Задача №3.

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x+2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

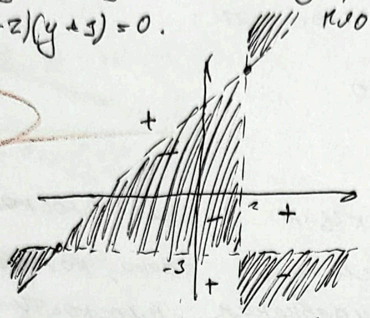
Рассм. когда $(xy+3x-2y-6)=0$ и $(y-x-8)=0$

1) $xy+3x-2y-6=0$ $\qquad y-x-8=0$

$x(y+3)=2y+6$ $\qquad y=x+8$

$x=\frac{2(y+3)}{(y+3)} \Rightarrow x(y+3)=2(y+3)$ Изобразим на плоскости:

$(x-2)(y+3)=0.$



Обозначим за A мн. всех точек, где знаки обоих выр. совпадают.

$|xy+3x+2y-6|(\pm|y-x-8|-x+5)=0$

Если $(x,y)\in A$, то модуль раскр. положительно, иначе отрицательно.

I. $|(x-2)(y+3)|(y-x-8-x+5)=0$

$x=2$; $y=-3$; $y-2x-3=0$

$y=2x+3$ $\qquad x=\frac{y-3}{2}$

II. $|(x-2)(y+3)|(x-y+8-x+5)=0$

$x=2$; $y=-3$; $y=13$.

Подстав. во втор. уравн.:

$y-x+10=y^2-8y+16$ $\qquad (y-4\geq 0)$

I: ~~$y^2-9y+8=0$ $y=8$ ✓ $y=1$ ∅~~ y^2-9y-8 $y=8$ ✓ $y=1$ ∅

II: $y=-3$ ∅

III: $y^2-8{,}5y-4{,}5=0$

$2y^2-17y-9=0$

$D=289+72=361=19^2$ $\qquad$ (но точка $(3,9)\notin A$)

$y=\frac{17\pm19}{4}$ $\qquad y=9$ ∅ $\qquad y=-\frac{1}{2}$ ∅

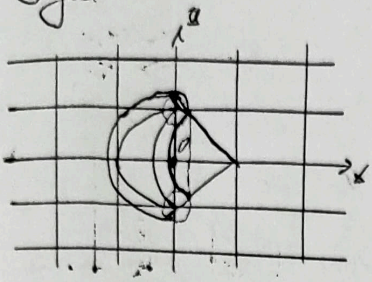
Чистовик.

IV. $x = 23 + 8 \cdot 13 - 13 \cdot 13 - 16$

$x = 23 - 5 \cdot 13 - 16 = -58$ $\quad (-58; 13) \in A$ ✓

Ответ: $(2, 8); (-58; 13)$.
$(2, 8)$

Задача № 2.



Проведём R в I окр.
продлим его на 0,25.
Все точки $\in$ окр. с ц. (0,0) и $R = 1,25$
не $\in$ получ. фигуре.

Также и с внутр. окр.
Итого:

$$S = \frac{S_{\bigcirc}}{2} + \frac{S_{\circ}}{4} + S_{\Delta} + S_{\circ} \cdot 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{\pi \cdot 1{,}25^2}{2} -$$