0 196638 400005

19-66-38-40
(40.28)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2 Выход: 14^{00} – 14^{03}

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Маяцкого Петра Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	12	0	12	12	12	0	72

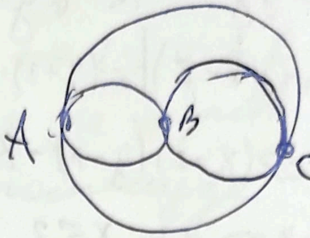
72 (семьдесят два)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

19-66-38-40
(40.28)

Черновик.

17. 35м - 95м



3 Н

2 З.

1 В.

3 В

4 З ← 3 Ч.

7 Н ↙

3 Н 4 2 З.

из

4 З 7 Н и 3 Ч.

3 сп. врат. = 7 · 3

2 из ч = 6

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

из $y\sqrt{\ }$-2 ур.; $y \geq 4$ т.к. $\sqrt{\ } \geq 0$

Чистовик

№3 преобразуем 1е $(y+3)|x\cdot(x-2)||y-x-8| =$

$= (x-5)|(y+3)(x-2)| = (y+3)\cdot|x-2|\cdot(x-5)$

т.к. $y+3 \geq 0 \Rightarrow (x-2)|y-x-8| = |x-2|(x-5)$

из 2го ур-я $\Rightarrow$ или $x=2$, и тогда $\sqrt{y+8} = y-4 \Rightarrow$

$\begin{cases} y^2-8y+16 = y+8 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-1)(y-8)=0 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=2 \\ y \geq 4 \end{cases}$

или $|y-x-8| = x-5$ при $x>2 \Rightarrow y-x-8 = \pm(x-5)$ при $x>5$

$\left[\begin{array}{l} y=13 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$ или $y-x-8 = \pm(x-5)$ при $x<2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=13 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$

Во втором $\sqrt{13-x+10} = 9 \Rightarrow x = -58$ (уд. огран.).

$\sqrt{x+13} = 2x-1 \Rightarrow 4x^2-5x-13=0$. Заметим, что $f(2) = 16-10-13<0$ и $f(5) = 4\cdot25-25-13>0 \Rightarrow$ корень $f(x) = 4x^2-5x-13$ находится на нужном промежутке а второй корень <0 по Виету

Ответ: $(2;8)$, $(-58;13)$

№5 $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$ $\quad t = \frac{x-2}{x+2} = 1-\frac{4}{x+2} \Rightarrow -\frac{4}{x+2} = t-1.$

$\Rightarrow -\frac{2}{x+2} = \frac{t-1}{2}$. тогда $f(t) = \frac{t-1}{2} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$f(f(t)) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-1}{2} - 1\right) = \frac{t}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{t}{4} - \frac{3}{4}$

$f(f(f(t))) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{4} - \frac{3}{4} - 1\right) = \frac{t}{8} - \frac{7}{8}$

...

$g(t) = \underbrace{f(f\ldots f(t))}_{11} = \frac{1}{2^{11}}\cdot t + a$, a - const.

$g'(t) = \frac{1}{2^{11}}$

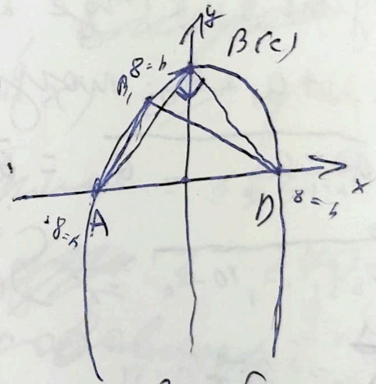
Ответ: $\frac{1}{2^{11}}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

19-66-38-40
(40.28)

Чистовик.

(№6) Докажем, что ∠=90° достигается только если B и C - одна и та же (·) и A D - пол.
От противного: В случае на картин. ∠ 90° т.к. у нас медиана к гипотенузе.
1. будем двигать угол ABD. тогда расстояние до AD будет меньше => ∠ABD будет больше => двигая ∠ABD по параболе он нигде не будет = 90°, а будет больше.
2. двигая прямую AD аналогично высота будет меньше => угол больше 90°
3 двигая прямую и угол будет ув. еще больше т.к. высот. увел. => ∠ 90° достигается только когда △BCD - треугольник, где B и C - одна и та же точка =>
высота h = ~~...~~ 8.



Ответ: 8.

(№7) Одного вратаря всегда выб. из общего кол-ва вратарей => найдем кол-во способов выбрать защитников и нападающих и домножим в конце на кол-во врат. рассматриваем случаи.
Защит. выбираем только из защ

Напад. выб. с ~~универсалов~~ чистовых + нападающих.

Защитники состоят из 1 универсала (выбираем 1 из общ. кол-во унив) и домножаем на остальных - защитника (выбираем треб. кол-во защитников - 1 из всех защ.) напад. выбираем из кол-ва нап. + кол-во универс. - 1. и т.д. увел. кол. во. унив. для защ. в конце суммируем и домножаем на кол-во вратарей $\Rightarrow$

Ответ 5688

(17) Заметим, что подойдет $n = \underbrace{99\ldots99}$. тогда $S(m) = 9\cdot 75$ при этом $mn = n\cdot 10^{75} - n$.

Пусть в и к разр., где $k \leq 75$. $n = 10^{k-1}\cdot a_{k-1} + 10^{k-2}\cdot a_{k-2} + \ldots + a_1 + a_0$. тогда $m\cdot n \geq \overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_0 0\ldots 0} - \overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_0} = \overline{a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_0 - 1, \ldots, 9, 9, 9, \ldots, 9, 9-a_{k-2}, \ldots, 10-a_0}$ $\Rightarrow S(m\cdot n) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i - 1 + 9\cdot(\cancel{75-a}) + 9k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i = 9\cdot 75$

Ответ: $\underbrace{9999\ldots99}_{75}$

№12 исходная чистовая $S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi - (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi + 1 =$
$= 1$. половина $S_{круга}$ - четверть другого + треугольник. нам нужно посмотреть какая площ. будет у фигуры если проведем по ее контуру окружность $R = 0,25$ фигура будет такой-же полумес. с окр. на концах. посчитаем $S_{пол. ок.}$ для левой части. Это $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi =$
$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{9}{16}$. аналогично для правой:
$\sqrt{2}^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{16} \cdot \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$
теперь доб. куски окружностей. тогда нам нужно найти под каким углом идут касат. к окруж. 1я касается прямой $y = 1$, вторая $y = -x$ (угол 45 град. с осью x) $\Rightarrow$ угол между векторами нормал. $= 135^\circ$
$\Rightarrow$ нужно взять 135° ~~круг~~ $\cdot 2 = 270^\circ$ от окр. че круга $\Rightarrow$ добавить $\frac{3}{4} \cdot$
$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3\pi}{64}$ итог: $1 + \frac{\pi}{16} \cdot \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) +$
$+ \frac{3\pi}{64} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{9}{16}$.