0 541044 490001

54-10-44-49
(38.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мельниковой Татьяны Антоновны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
54-10-44-49	80	15	15	15	15	0	15	5	

54-10-44-49 (38.2)

80 (восемьдесят)

Черновик

№ 1

x^2+ax+b

$a, b \in \mathbb{Z}$

$m, n \in \mathbb{Z}$

$$\left(x+2-\frac{1}{m}\right)\left(x+2-\frac{1}{n}\right)=0$$

$$x^2+2x-\frac{x}{n}+2x+4-\frac{2}{n}-\frac{x}{m}-\frac{2}{m}+\frac{1}{mn}=0$$

$$x^2+\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+4-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+\frac{1}{mn}=0$$

$$a+b=4-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+4-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+\frac{1}{mn}=$$

$$=8-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}+\frac{1}{mn}=$$

$$=\frac{8mn-3m-3n+1}{mn}$$

Ответ: 1, 15, 7

$n=3$ (пр)

$$2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy+3}{\sqrt{xyz}}\right)$$

$1+1+1-1-1-1$

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$

$x^2-xy-yz-xz+y^2+z^2 \geq 0$

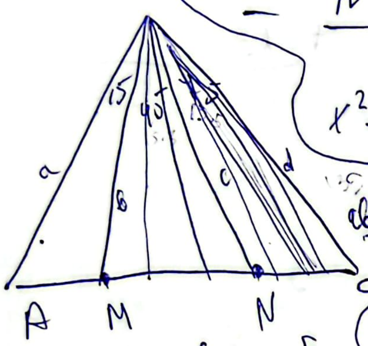
$x^2-xy-yz-xz+y^2+z^2+y^2-2yz+z^2 \geq 0$

$x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2 \geq 0$

$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$

6

$ab\sin 15+bc\sin 45+cd\sin 15$



$\frac{ab\sin 15}{2}\cdot\frac{cd\sin 15}{2}=3$

$abcd\sin 15\cos 15=24$

$abcd=48$

$\frac{ab\sin 15+cd\sin 15}{2}=5$

$ab\sin 15+cd\cos 15=10$

$S_{ABM}+S_{NBC}=5$

$S_{ABM}\cdot S_{NBC}=3$

$S_{ABM}^2+S_{NBC}^2=25-6=19$

$(S_{ABM}-S_{NBC})^2=13$

$\sin 30=2\sin 15\cos 15=\frac{1}{2}$

$\sin 15\cos 15=\frac{1}{4}$

$48\sin 15+cd^2\cos 15-10cd+\ldots$

$t^2\cos 15-10t+48\sin 15$

$=0$

$\sin(\sqrt{\ldots})=\frac{1}{4}$

$\sin^2 15-\sin^4 15-\frac{1}{16}=0$

$m^2-m+\frac{1}{16}=0$

$m=\frac{1\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$

$\sin^2 15=\frac{1\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$

$\sin 15=\sqrt{\ldots}$

$$4-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{n}+\frac{1}{m}\in\mathbb{Z}$$

$$\underbrace{4-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}}_{\in\mathbb{Z}}+\frac{1}{mn}\in\mathbb{Z}$$

$\frac{1}{mn}\in\mathbb{Z}$

$\frac{m+n}{mn}\in\mathbb{Z}$

$1 \vdots mn$

$m+n \vdots mn$

$m \vdots n$

$n \vdots m$

$\Rightarrow m$

~~$8-6+1=1$~~

~~$8+6+1=15$~~

$-(-8+3-3+1)=7$

$-(-8-3+3+1)=7$

$(5!)^2$

$5\cdot4\cdot3\cdot2$

120

14400

8640

$m=\pm1$

$n=\pm1$

№ 2

	2	
3	1	4
	5	
	6	

1. → 3 → 5; 4 → 6; 5 → 6; 3 → 6; 4 → 5; 4 → 6; 5 → 6

8

2. → 3 → 5, 6; → 4 → 5, 6 — 4

3. → 5 → 6 — 1

4 → 5 → 6 — 1

14

№ 3

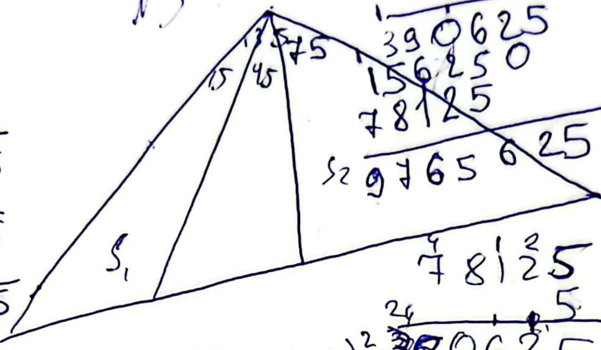
$$2\left(\frac{bc-a^2+a}{a}+\frac{ca-b^2+b}{b}+\frac{ab-c^2+c}{c}\right)=$$

$$=2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a+1-b+1-c+1\right)=2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3\right)=$$

$$=2\left(\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{abc}-a-b-c+3\right)=2\left(\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab}{abc}+3\right)=$$

Черновик

№5



$3125 \cdot 25 = 15625 + 62500 = 78125$

$78125 \cdot 125 = 390625 + 156250 + 78125 = 9765625$

$5^7 = 5^5 \cdot 25 = 3125 \cdot 5 = 15625$

$15625 + 62500 = 78125$

$78125 \cdot 125 = 9765625$

$78125 \cdot 5 = 390625$

$\begin{cases} S_1 + S_2 = 5 \\ S_1 S_2 = 3 \end{cases}$

$(S_1 + S_2)^2 = 25$

$2 S_1 S_2 = 6$

$390625 \cdot 253 = 1171875 + 1953125 + 7812500 = 98828125$

$S_1^2 + S_2^2$

$(S_1 - S_2)^2 = 13$

$\begin{cases} S_1 - S_2 = \pm\sqrt{13} \\ S_1 + S_2 = 5 \\ S_1 S_2 = 3 \end{cases}$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

№4

$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

6

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

$5^5 = 625 \cdot 5 = 3125$

$3125 \cdot 125 = 390625$

$2S_1 = 5 \pm \sqrt{13}$

$S_1 = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$S_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$

$S_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$

$10 \cdot 0{,}999 = 9{,}99$

$29 \cdot 5^5$

$\frac{1}{2}\left(\left(7+5\right)\frac{1}{2}+5\right)$

$4\frac{1}{4}$ $\quad 4\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$a < 1 \Rightarrow \frac{a}{2} < \frac{1}{2}$

$8\frac{1}{2} \to 9\frac{1}{4} \to 9\frac{5}{8} \to 9\frac{13}{16} \to 9\frac{29}{32} \to 9\frac{61}{64} \to 9\frac{125}{128}$

$9 + a$

$a_n = \frac{a_{n-1} + 10}{2}$

$4\frac{5}{8}$

$4\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + 5 = 9 + \frac{a+1}{2} = 9 + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} > 9 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$

$4\frac{1}{16}$ $\quad 4\frac{8}{16} + \frac{5}{16}$

№7

$9 + \frac{128}{256} + \frac{125}{256} = \frac{253}{}$

$m = n$

$4\frac{16}{32} + \frac{13}{32}$ $\quad 4 + \frac{32}{64} + \frac{29}{64}$ $\quad 9\frac{253}{256}$

$9 + \frac{64}{128} + \frac{61}{128}$

$9\frac{509}{512}$

85 мин =

$= 17a + 11b + 17c$

$\left(\frac{1}{m} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - 2\right)a + b = 0$

$\frac{1}{m^2} - \frac{4}{m} + 4 + \frac{a}{m} - 2a + b = 0$

$1 - 4m + 4m^2 + am - 2am^2 + bm^2 = 0$

5^9 $\quad 390625 \cdot 5 = 1953125$

$1953125 \cdot 509 = 17578125 + 9765625 = 994140625$

$7a + 11b = 0$ $\quad 17$

$7a - 66 = 0$ $\quad 17$

2^9

$\frac{256}{512} + \frac{253}{512} = \frac{509}{512}$

Чистовик

Задача 1

Дано:

$m\in\mathbb{Z}$ $\quad \frac{1}{m}-2$, $\frac{1}{n}-2$ - корни x^2+ax+b,

$n\in\mathbb{Z}$

$a\in\mathbb{Z}$ $\quad m\neq n$

$b\in\mathbb{Z}$

Найти: $a+b$

Решение. ~~Известно, что кв. ур-не имеет не более 2х корней. Тогда $\frac{1}{m}-2$~~ Известно, что квадратный трёхчлен имеет не более 2х корней. Т.к $m\neq n$, то $\frac{1}{m}-2\neq\frac{1}{n}-2$, тогда $\frac{1}{m}-2$, $\frac{1}{n}-2$ — все возм. корни $P(x)=x^2+ax+b$. Тогда по т. Безу $P(x)=\left(x+2-\frac{1}{m}\right)\left(x+2-\frac{1}{n}\right)=x^2+2x-\frac{x}{n}+2x+4-\frac{2}{n}-\frac{x}{m}-\frac{2}{m}+\frac{1}{mn}=x^2+\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+4-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+\frac{1}{mn}=$ ~~Тогда~~ x^2+ax+b.

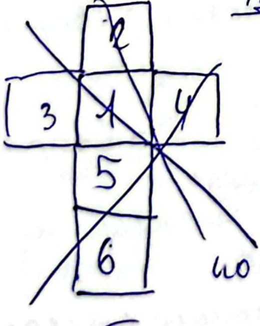
Тогда $a=4-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$, $b=4-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}+\frac{1}{mn}$. Т.к. $a\in\mathbb{Z}$, то $4-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\in\mathbb{Z}$. Т.к. $b\in\mathbb{Z}$ и $2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\in\mathbb{Z}$, то $\frac{1}{mn}\in\mathbb{Z}$.

Тогда $\begin{cases}1\,\vdots\,mn\\ \frac{m+n}{mn}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\,\vdots\,mn\ (1)\\ m+n\,\vdots\,mn\ (2)\end{cases}$. Т.к. $1\,\vdots\,mn$ и $m\neq n$, то $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=1\\ n=-1\end{cases}\\ \begin{cases}m=-1\\ n=1\end{cases}\end{array}\right.$. В обоих случаях (2) выполнено. Тогда $a+b=8-\frac{3}{n}-\frac{3}{m}+\frac{1}{mn}=8-3\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(-1)}=7-3\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$. В любом случае $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0$, тогда $a+b=7$.

Ответ: 7.

Задача 2

~~Рассмотрим такую развёртку кубика~~



Заметим, что для каждой цифры следующим перекатом можно получить любую, кроме противоположной ей. Т.к. последовательность по усл. возрастает, то варианты, при броске выпадает 5 или 6, можно не рассматривать (хотя бы 1 число из такой последовательности меньше первого). Рассмотрим остальные случаи:

Чистовик

№2 (продолжение)

1. При броске выпадает 1. Первым перекатом можно получить числа 2, 3, 4, 5 и все они подходят

а) получена 2
след. ходом можно ~~…~~ получить 1, 3, 4, 6. 1 не подходит (1<2) → 3 вар-та

б) получена 3
след. ходом можно получить 1, 2, 5, 6. 1 и 2 не подходят (1<3, 2<3) → 2 вар-та

в) получена 4
след. ходом можно получить 1, 2, 5, 6. 1 и 2 не подходят (1<4, 2<4) → 2 вар-та

г) получена 5
след. ходом можно получить 1, 3, 4, 6. 1, 3 и 4 не подх (1<5, 3<5, 4<5) → 1 варт

2. При броске выпадает 2. Первым перекатом можно получить числа 1, 3, 4, 6. 1 не подх., т.к. 1<2.

а) получена 3
след. ходом можно получить 1, 2, 5, 6. Подх. 5 и 6 (1<3, 2<3) → 2 вар-та

б) получена 4
след. ходом можно получить 1, 2, 5, 6. 1 и 2 не подх (1<2<4) → 2 вар-та

в) получена 6
след. ходом можно получить 2, 3, 4, 5. 2<3<4<5<6 ни одно не подх. → 0 вар-тов

3. При броске выпадает 3. Первым перекатом можно получить числа 1, 2, 5, 6. 1 и 2 не подх., т.к. 1<2<3.

а) получена 5
след. ходом можно получить 1, 3, 4, 6. Подх. только 6 (1<3<4<5) → 1 варт

б) получена 6
след. ходом можно получить 2, 3, 4, 5. 2<3<4<5<6 ни одно не подх. → 0 вар-тов

4. При броске выпадает 4. Первым перекатом можно получить числа 1, 2, 5, 6. 1<2<4 → 1 и 2 не подх.

а) получена 5
след. ходом можно получить 1, 3, 4, 6. подх. только 6 (1<3<4<5) → 1 варт

б) получена 6
след. ходом можно получить 2, 3, 4, 5. Нет подх: 2<3<4<5<6 → 0 вар-тов

Итого 3+2+2+1+2+2+0+1+0+1+0 = 14 вар-тов

Ответ: 14.

Чистовик

Задача 3. Дано: $a, b, c \geq 0$
Найти: мин. знач.

$$N = \frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} =$$

$$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3\right) = \left(\frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2}{abc} + 3\right)$$

$abc > 0$, т.к. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

Оценим выр-ие: $(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2$.

Пусть $bc = x$, $ac = y$, $ab = z$, тогда выр-ие примет вид:

$x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy$.

Докажем, что

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2xz + z^2 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$ верно, т.к. $\forall a: a^2 \geq 0$.

Тогда
$$M = \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2}{abc} \geq 0.$$

Тогда ~~минимум достигается при $M=0$, тогда~~

$N = (M + 3) \geq (0 + 3) \geq 3$

Рав-во достигается при ~~$a = b = 1$~~ $a = b = c = 1$.

Ответ: 3

Чистовик

Задача 4

Рассмотрим места на которых сидят девочки, назовём их а, б, в, г, д; слева направо:

Заметим, что по усл. место должно быть между а и б, б и в, в и г, г и д. Осталось еще одно место, которое можно поставить между ~~соседними~~ девочками а и б, б и в, в и г, г и д вместе с другим, или поставить слева от а или справа от д. Последнее кресло можно поставить 6ю способами, тогда девочки могут выбрать стулья ~~сесть~~ 6ю способами. На ~~остальные места нужно рассадить учительницу и мальчиков. выберем 5ю способами стул для учительницы и 4 пустует стул (всего 10 стульев, а в группе 9чел). На остальные 3 сядут мальчики~~ ~~Она может~~ А сесть на них девочки могут 5! способами. Учительница может сесть на любой из 5ти оставшихся стульев, а один из мальчиков - на 4 оставшихся стула, следующий - на 3 и последний - на 2. Итого у девочек 6·5! способов, а у мальчиков и учительницы - 5!. Итого

$5!\cdot 6! = (5!)^2\cdot 6 = 120^2\cdot 6 = 14400\cdot 6 = 86\,400$

$$\begin{array}{r} 14400 \\ \times\ 6 \\ \hline 86400 \end{array}$$

Ответ: 86 400 способов

чистовик

Задача 6

$7 \to 8,5 \to 9\frac{1}{4} \to 9\frac{5}{8} \to 9\frac{13}{16}$

а) Заметим, что объём такого кувшина больше 9 л. ~~не мен~~

~~Пред~~ Начиная с 2ых суток в кувшине больше 9л воды. Пусть в какой-то день в кувшине $9+a$ л, $a<1$, тогда на след. день в кувшине $\frac{9+a}{2}+5$ л $=$

$= 4\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+5 = 9+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$ л. Т.к. $a<1$, то $\frac{a}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9+\frac{a}{2}+\frac{1}{2} > 9+\frac{a}{2}+\frac{a}{2} = 9+a$, тогда каждый день воды становится больше. Пусть в какой-то день в кувшине стало 10 л воды, тогда в предыд. день было $2(10-5)=10$л воды, т.е. если стало 10л, то в кувшине всегда было 10 л, что неверно по усл. Тогда кол-во воды в кувшине увеличивается, но 10та л не достигает, а любое число, меньшее 10 и большее 9 может быть достигнуто или на какие-то сутки быть меньше того, что в кувшине. Тогда минимальный объём - 10 л.

Ответ: 10 л

б) Ответ: на 9 ей день.

$7 \to 8,5 \to 9\frac{1}{4} \to 9\frac{5}{8} \to 9\frac{13}{16} \to 9\frac{29}{32} \to 9\frac{61}{64} \to 9\frac{125}{128} \to 9\frac{253}{256} \to 9\frac{509}{512}$

99,9 % от 10 это 9,99. Докажем, что $\frac{509}{512} > 0,99$, а $\frac{253}{256} < 0,99$

$\frac{509}{512} = \frac{509}{2^9} = \frac{509 \cdot 5^9}{10^9} = \frac{509 \cdot \cancel{390625} \; 1953125}{10^9} = 0,994140625 > 0,99.$

$\frac{253}{256} = \frac{253}{2^8} = \frac{253 \cdot 5^8}{10^8} = \frac{253 \cdot 390625}{10^8} = 0,98828125 < 0,99$

Чистовик

Задача 6 (продолжение)

Тогда $9\frac{509}{512} > 9{,}99$, а $9\frac{253}{256} < 9{,}99$. ~~ч.т.д.~~ ч.т.д.

Вычисления:

$$\frac{9\frac{13}{16}}{2}+5=4\frac{16}{32}+\frac{13}{32}+5=9\frac{29}{32}$$

$$\frac{9\frac{29}{32}}{2}+5=4\frac{32}{64}+\frac{29}{64}+5=9\frac{61}{64}$$

$$\frac{9\frac{61}{64}}{2}+5=4\frac{64}{128}+\frac{61}{128}+5=9\frac{125}{128}$$

$$\frac{9\frac{125}{128}}{2}+5=4\frac{128}{256}+\frac{125}{256}+5=9\frac{253}{256}$$

$$\frac{9\frac{253}{256}}{2}+5=4\frac{256}{512}+\frac{253}{512}+5=9\frac{509}{512}$$

$5^8=(5^4)^2=625^2=390625$

$$\begin{array}{r} \times\ 625 \\ 625 \\ \hline 3125 \\ 1250\ \\ 3750\ \ \\ \hline 390625 \end{array}$$

$5^9=5^8\cdot 5=1953125$

$$\begin{array}{r} \times\ 390625 \\ 5 \\ \hline 1953125 \end{array}$$

$253\cdot 5^8=98828125$

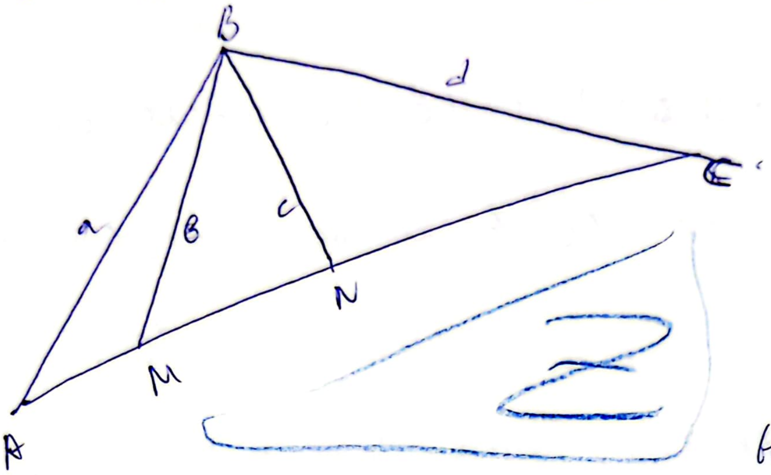
$$\begin{array}{r} \times\ 390625 \\ 253 \\ \hline 1171875 \\ 1953125\ \\ 781250\ \ \\ \hline 98828125 \end{array}$$

$509\cdot 5^9=994140625$

$$\begin{array}{r} \times\ 1953125 \\ 509 \\ \hline 17578125 \\ 9765625\ \ \\ \hline 994140625 \end{array}$$

Чистовик

Задача 5



Дано: $\triangle ABC$

$\angle ABM = 15°$

$\angle MBN = 45°$

$\angle NBC = 75°$

$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$

$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

Найти: S_{ABC}

Решение. Пусть $AB = a$, $BM = b$, $BN = c$, $BC = d$.

Тогда

$$\frac{ab \cdot \sin 15}{2} \cdot \frac{cd \cdot \sin 75}{2} = S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$abcd \cdot \sin 15 \cos 15 = 12$$

$$\Downarrow$$

$$abcd \cdot \sin 30 = 24$$

$$\Downarrow$$

$$abcd = 48$$

$$\frac{ab \sin 15 + cd \cos 15}{2} = 5$$

$$\Downarrow$$

$$ab \sin 15 + cd \cos 15 = 10$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{48 \sin 15}{cd} + cd \cos 15 = 10 \quad | \cdot cd$$

$$\Downarrow$$

$$48 \sin 15 + cd^2 \cos 15 - 10cd = 0$$

Чистовик

Задача 7.

1ч 25мин = 85мин => ~~11 a A17~~ $7a+11b+17c$, a - сколько раз авт. проехал по AB, b - сколько раз проехал по BC, c - сколько раз проехал по AC.

Тогда $7a+11b \vdots 17$ (т.к. $85 \vdots 17$). Тогда $7a \underset{17}{\equiv} 6b$. Рассм. остатки по mod 17 у 7a и 6b.

7x	x	6x
0	0	0
7	1	6
-3	2	-5
4	3	1
-6	4	7
1	5	-4
8	6	2
-2	7	8
5	8	-3
-5	-8	3
2	-7	-8
-8	-6	-2
-1	-5	4
6	-4	-7
-4	-3	-1
3	-2	5
-7	-1	-6

Подходят пары:

(0;0)
(1;-4)
(2;-8)
(3;5)
(4;1)
(5;-3)
(6;-7)
(7;6)
(8;2)
⋮

9 (-8;2)
10 (-7;-6
11 (-6;7)
(-5;3)
(-4;-1)
(-3;-5)
(-2;8)
(-1;4)

$a \le 17$,
$b < 17$, т.к. $7 > 5$,
$11 > 5$