0 144349 420003

14-43-49-42
(40.28)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мотовилова Александра Андреевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

14-43-49-42

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	12	8	12	0	12	0	68

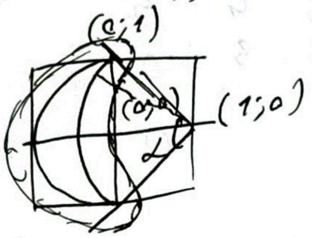
 68 (шестьдесят восемь)

14-43-49-42
(40.28)

Черновик

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$f\left(f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right) = \frac{-\frac{2}{x+2}-2}{-\frac{2}{x+2}+2} = \frac{\frac{1}{x+2}+1}{\frac{1}{x+2}-1} = \frac{1+x+2}{1-x-2} = \frac{x+3}{-x-1}$



$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$S_\alpha = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\pi R^2}{4}$

$S = \frac{\pi \cdot (1+0{,}25)^2}{4} - \pi \cdot (\sqrt{2}$

№ 3

$(xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6|$

$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$

$(xy+3x-2y-6)\cdot(|y-x-8| \pm (x-5)) = 0$

завистом $|xy+3x-2y-6|$

$xy+3x-2y-6 = x(y+3)-2(y+3) = (x-2)(y+3)$

$\sqrt{y-x+10} = y-4$

$\begin{cases} y-x+10 = y^2-8y+16 \\ y \geq 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -y^2+9y-6 \\ y \geq 4 \end{cases}$

$x-2 = -y^2+9y-8 = -(y-1)(y-8)$

$x-5 = -y^2+9y-11$

$D = 81-24 = 61-4 = 57$

$y = \frac{-9 \pm \sqrt{57}}{-2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$

$17 \cdot 17 = 289$, $16 \cdot 16 = 256$

$19 \cdot x$: 0 19 38 57 76 95

x: 0 1 2 3 4 5

$n = \underbrace{a\ldots}_{75\text{зн}}$

$\frac{10\ldots01}{75\text{зн}}$

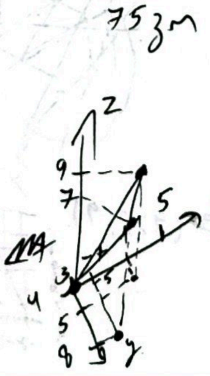
$\underbrace{\ldots}_{\text{сумма цифр } a}9\underbrace{\ldots}_{74\text{зн}}$

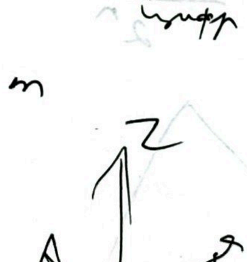
$\underbrace{9\ldots9}_{75\text{зн}} \cdot m$

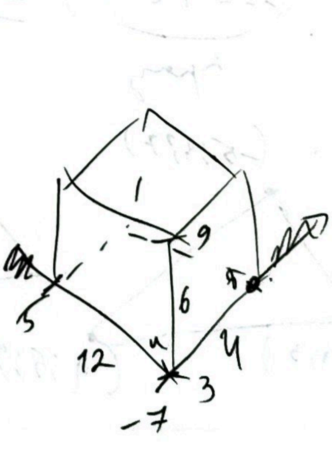
$-7 \leq x \leq 5$

$4 \leq y \leq 8$

$3 \leq z \leq 9$







Черновик

AB BC AC

a b c

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a, b, c \geq 0$

$a \leq 19$

$c \leq 5$

$b \leq \frac{95}{13} < 8$

$5a + 13b + 19c = 95$

$15a + 25b + 40c = x$

c	0	1	2	3	4	5
b	5/0	2/7	4	1/6	3	0
a	6/19					0

b	0	1	2	3	4	5	6	7
$13b \equiv_5$	0	3	1	4	2	0	3	1

c	0	1	2	3	4	5
$19c \equiv_5$	0	4	3	2	1	0

$A \to B \to A$, $A \to B \to C \to B$, $A \to B \to C \to A$

$A \to C \to B \to A$, $A \to C \to B \to C$, $A \to C \to A$

$B \to A$, $B \to C$

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$f\left(\frac{a-4}{a}\right) = -\frac{2}{a}$

$f\left(1 - \frac{4}{a}\right) = -\frac{2}{a}$

$f(1 + 2b) = b$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$

$\underbrace{f(\dots f(x))}_{n \text{ раз}} = \frac{x - 2^n + 1}{2^n} = \frac{x+1}{2^n} - 1$

$A(-7;4;3), B(1;5;9), C(-5;8;7) \in \alpha$

$\vec{AB}\{8;1;6\}$

$\vec{AC}\{2;4;4\}$

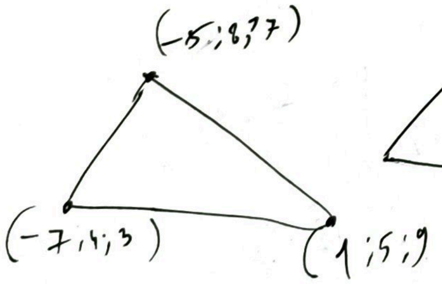
$\vec{n}\{a;b;c\} \perp \alpha$

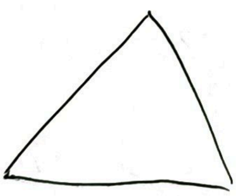
$\begin{cases} 8a + b + 6c = 0 \\ 2a + 4b + 4c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8a + b + 6c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 6a + 2c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = -3a \\ b = 5a \end{cases}$

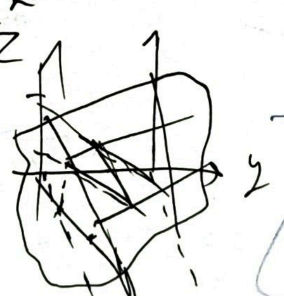
$\vec{n}\{1;5;-3\}$

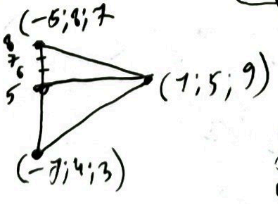
$\alpha: 1(x-1) + 5(y-5) - 3(z-9) = 0$

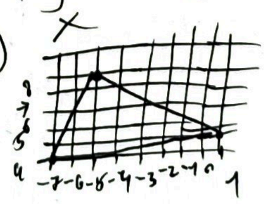
$x + 5y - 3z + 1 = 0$











Чистовик стр. 1

№1

Есть 3 варианта выбрать вратаря.

1) Если оба защитника не универсалы, то есть $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ способов их выбрать. Тогда нападаю- ~~Если среди защитников один унив~~ щих можно выбрать из $7+3=10$ людей. Получается $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$ способов выбрать нападающих.

2) Если ровно один защитник – универсал, то есть $4\cdot 3 = 12$ способов их выбрать. Тогда нападающих можно выбрать из $7+2=9$ людей. Получается $C_9^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 3\cdot 4\cdot 7 = 12\cdot 7 = 84$ способа выбрать нападающих.

3) Если оба защитника – универсалы, то есть $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$ способа их выбрать. Тогда нападающих можно выбрать из $7+1=8$ людей. Получается $C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 8\cdot 7 = 56$ способов выбрать нападающих.

Получается всего способов выбрать эту четвёрку $3\cdot(6\cdot 120 + 12\cdot 84 + 3\cdot 56) = 3\cdot(600+120+840+168+150+18) = 3\cdot(600+960+186+150) = 3\cdot(1560+336) = 3\cdot 1896 = 5688$* ~~(для каждого выбора вратаря есть сколько-то способов выбрать защитника и сколько-то способов выбрать нападающего)~~

$1896 \times 3 = 5688$

Ответ: 5688

*Для каждой выборки вратаря есть сколько-то способов выбрать защитников, а для каждой выборки защитников есть сколько-то способов выбрать нападающих. Так что умножение, а случаи 1), 2) и 3) не пересекаются, так что их складываем.

№3

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4\end{cases}$$

1) $xy+3x-2y-6 = x(y+3)-2(y+3) = (x-2)(y+3)$

2) $\sqrt{y-x+10} = y-4$, т.е. $\begin{cases} y-x+10 = (y-4)^2 \\ y \geq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+10 = y^2-8y+16 \\ y\geq 4\end{cases}$

$\begin{cases} x = -y^2+9y-6 \\ y \geq 4\end{cases}$

3) $xy+3x-2y-6 = (x-2)(y+3) = (-y^2+9y-8)(y+3) = -(y-1)(y-8)\cdot(y+3) = -(y-1)(y-8)(y+3)$

Чистовик стр 2

← $xy+3x-2y-6$ Из 2) мы знаем, что $y \ge 4$

Получается $xy+3x-2y-6 \le 0$ при $y \ge 8$, $xy+3x-2y-6 \ge 0$ при $8 \ge y \ge 4$

4) Если $y \ge 8$, то $xy+3x-2y-6 \le 0$, то есть

$|xy+3x-2y-6| = -(xy+3x-2y-6)$

$(xy+3x-2y-6)|y-x-8| - (x-5)|xy+3x-2y-6| = 0$

т.е. $(xy+3x-2y-6)\cdot(|y-x-8| + x-5) = 0$

т.е. $|y-x-8| = 5-x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y-x-8 \ge 0 \\ y-x-8 = 5-x \end{cases} \\ \begin{cases} y-x-8 < 0 \\ y-x-8 = x-5 \end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge x+8 \\ y = 13 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} y < x+8 \\ y = 2x+3 \end{cases} (2)\end{array}\right.$$

(1) $y = 13$, т.е. $x = -y^2+9y-6 = -13^2+9\cdot 13-6 =$

$= -13\cdot 4-6 = -52-6 = -58$, т.е. $13 = y \ge x+8 = -50$ (+)

(2) $y = 2x+3$, т.е. $x = \frac{y-3}{2}$, т.е. $-y^2+9y-6 = \frac{y-3}{2}$

$-2y^2+18y-12 = y-3$, т.е. $2y^2-17y+9 = 0$

$D = 17^2 - 8\cdot 9 = 289-72 = 217$, $14^2 = 196 < 217 < 225 = 15^2$, т.е. $14 < \sqrt{217} < 15$

$y = \frac{17 \pm \sqrt{217}}{4}$

① $y = \frac{17-\sqrt{217}}{4} < \frac{17-14}{4} = \frac{3}{4}$, но $y \ge 8$, т.е. ⊖

~~② $y = \frac{17+\sqrt{217}}{4}$, $x = \frac{y-3}{2} = \frac{5+\sqrt{217}}{8}$, т.е. $x+8 = \frac{5+\sqrt{217}}{8}+8 = \frac{69+\sqrt{217}}{8}$, но и $y < x+8$, т.к. $\frac{17+\sqrt{217}}{4} < \frac{69+\sqrt{217}}{8}$, т.к. $34+2\sqrt{217} < 69+\sqrt{217}$, т.к. $\sqrt{217} < 35$ (+)~~

~~Получается из 4) $(-58;13)$ и $\left(\frac{5+\sqrt{217}}{8}; \frac{17+\sqrt{217}}{4}\right)$~~ — решения вида $(x;y)$

5) ~~Если $4 \le y < 8$~~ ② $y = \frac{17+\sqrt{217}}{4} < \frac{17+15}{4} = \frac{32}{4} = 8$, но $y \ge 8$ ⊖

Получается из 4) только $(-58;13)$ — решение (вида $(x;y)$)

5) Если $4 \le y \le 8$, то $xy+3x-2y-6 \ge 0$, то есть

$|xy+3x-2y-6| = xy+3x-2y-6$

14-43-49-42 (40.28)

Чистовик

стр 3

$(xy+3x-2y-6)|y-x-8|-(x-5)(xy+3x-2y-6)=0$

сл. $(xy+3x-2y-6)(|y-x-8|-x+5)=0$

$\left[\begin{array}{l} xy+3x-2y-6=0 \\ |y-x-8|=x-5 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y=8 \\ \begin{cases} y-x-8\geq 0 \\ y-x-8=x-5 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x-8<0 \\ y-x-8=5-x \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y=8 \quad (1) \\ \begin{cases} y<x+8 \\ y=13 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} y\geq x+8 \\ y=2x+3 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$

(1) $y=8$, сл $x=-y^2+9y-6=-64+72-6=8-6=2$

(2) $y=13$, сл $x=-y^2+9y-6=-58$, но тогда $13=y>x+8=-50$

а должно быть $y<x+8$ $\ominus$

(3) $y=2x+3$, сл $x=\frac{y-3}{2}$, сл $-y^2+9y-6=\frac{y-3}{2}$

$-2y^2+18y-12=y-3$, сл $2y^2-17y+9=0$

$D=17^2-8\cdot 9=217$, $14<\sqrt{217}<15$

$y=\frac{17\pm\sqrt{217}}{4}$

① $y=\frac{17-\sqrt{217}}{4}<\frac{17-14}{4}=\frac{3}{4}$, но $y\geq 4$ $\ominus$

② $y=\frac{17+\sqrt{217}}{4}$, $x=\frac{y-3}{2}=\frac{5+\sqrt{217}}{8}$, сл. $x+8=\frac{69+\sqrt{217}}{8}$

$(17+\sqrt{217})\cdot 2<69+\sqrt{217}$, т.к. $\sqrt{217}<35$

сл $y<x+8$, т.к. $\ominus$

~~а~~ а должно быть $y\geq x+8$

Получается из 5) только $(2;8)$ — решение

(вида $(x;y)$)

Ответ: $\{(-58;13);(2;8)\}$ ← решения вида $(x;y)$

№ 5

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=f\left(\frac{x+2-4}{x+2}\right)=f\left(1-\frac{4}{x+2}\right)$

Пусть $t=1-\frac{4}{x+2}$, тогда $x+2=\frac{4}{1-t}$

$f(t)=f\left(1-\frac{4}{x+2}\right)=f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=-\frac{2}{x+2}=-\frac{2}{\frac{4}{1-t}}=\begin{cases}\frac{t-1}{2} \\ t\neq 1\end{cases}$

Получается $y=f(x)=\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{2}-1$

Докажем по индукции, что $\underbrace{f(\ldots f(x))}_{n\text{ раз}}=\frac{x+1}{2^n}-1$

Ⅰ База: $n=1$ $f(x)=\frac{x+1}{2}-1$ $\oplus$

Ⅱ Шаг: Дано: $n=k$ $\underbrace{f(\ldots f(x))}_{k\text{ раз}}=\frac{x+1}{2^k}-1$

Док-ть: $n=k+1$ $\underbrace{f(\ldots f(x))}_{k+1\text{ раз}}=\frac{x+1}{2^{k+1}}-1$

Док-во: $\underbrace{f(\ldots f(x))}_{k+1\text{ раз}}=f\left(\frac{x+1}{2^k}-1\right)=\frac{\frac{x+1}{2^k}-1+1}{2}-1=\frac{x+1}{2^{k+1}}-1$

Чистовик

стр 4

(III) Вывод: по ММИ доказали, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underbrace{f(\dots f(x))}_{n \text{ раз}} = \frac{x+1}{2^n} - 1$

Получается $g(x) = \underbrace{f(\dots f(x))}_{11 \text{ раз}} = \frac{x+1}{2^{11}} - 1 = 2^{-11}x + 2^{-11} - 1$

т.к. $g'(x) = 2^{-11}$, а тангенс угла наклона касательной к графику $g(x)$ это и есть $g'(x)$

т.к. в т. $x=0$ тангенс угла наклона $2^{-11} = \frac{1}{2048}$

Ответ: $\frac{1}{2048}$

№8

$A(-7;4;3)$, $B(1;5;9)$, $C(-5;8;7)$, $A,B,C \in \alpha$ (α - плоскость треуг.)

$\vec{n}\{a;b;c\} \perp \alpha$, т.е. $\vec{n}$ - вектор нормали к α

$\vec{AB}\{8;1;6\}$, $\vec{AC}\{2;4;4\}$, $\vec{AB} \in \alpha$, $\vec{AC} \in \alpha$, т.к. $\begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{n} \\ \vec{AC} \perp \vec{n} \end{cases}$

т.к. $\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + b + 6c = 0 \\ 2a + 4b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 2b + 12c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 15a + 10c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c + 3a = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = -3a \\ 2b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2}a \\ b = a \end{cases}$

т.к. $\vec{n}\{2;2;-3\}$ - вектор нормали к α

($a=2$, т.к. $b=2$, т.к. $c=-3$)

т.к. α: $2\cdot(x-1) + 2\cdot(y-5) - 3\cdot(z-9) = 0$

$2x + 2y - 3z - 2 - 10 + 27 = 0$

$2x + 2y - 3z + 15 = 0$

$2(x+y) - 3(z-5) = 0$, т.к. $2(x+y) \,\vdots\, 3$, т.к. $x+y \,\vdots\, 3$

~~$-7 \le x \le 1$, $4 \le y \le 8$, $3 \le z \le 9$~~

$K(x;y;z)$ - точка принадлежащая $\triangle ABC$,

т.к. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z + 15 = 0 \\ -7 \le x \le 1 \\ 4 \le y \le 8 \\ 3 \le z \le 7 \end{cases}$, Т.к. макс. и мин. значения координат в треугольнике достигаются в вершинах

Если мы спроецируем $\triangle ABC$ на какую-то плоскость, то проекция т. K будет лежать в проекции $\triangle ABC$. Тогда спроецируем $\triangle ABC$ на плоскости XOY, XOZ, YOZ

1) Проецируем на XOY, тогда $A'(-7;4;0)$, $B'(1;5;0)$, $C'(-5;8;0)$, $K'(x;y;0)$

Чистовик стр 5

№2

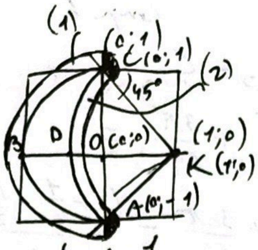


рис. 1

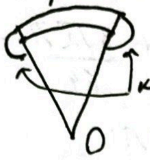


рис. 2

Заметим, что при таком распылении краски окружность $\omega(O;R)$ переходит в окружность $\omega'(O;R+0,25)$ (эти окружности почти закрашены)

Получается, как показано на рис. 2, граница сектора станет частью краевые окружности большего радиуса, но с тем же центром и появятся краевые эффекты (полуокр.)

В таком случае $\omega_1((0;0);1) \to \omega_1'((0;0);1,25)$, а $\omega_2((1;0);\sqrt{2}) \to \omega_2'((1;0);\sqrt{2}+0,25)$ (из т. Пифагора)

Посмотрим, как изменятся границы фигуры при распылении, и заметим, что $\smile ABC$ станет $\smile A_2'D'C_2'$ - дугой ω_3', $\smile A_1'B'C_1'$ - дугой ω_1', а $\smile ADC$ станет где $\omega_3'((1;0);\sqrt{2}-0,25)$. Ещё будут краевые эффекты каждая точка ($\smile A_1'A_2'$ и $\smile C_1'C_2'$). В таком случае фигуры + границы добавит 0,25 к площади ещё краевые эффекты. $\smile ABC = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{180°}{360°} = \pi$, (AO=CO=KO=1, т.к. $\triangle ACK$ прямоуг. по призн., т.к. $\angle AKC = 90°$)

$\smile ADC = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{90°}{360°} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

т.к. S увеличенной на $(\smile ABC + \smile ADC) \cdot 0,25 + S_{кр} =$ краевые эффекты

$= (\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi) \cdot \frac{1}{4} + S_{кр} = \frac{2+\sqrt{2}}{8}\pi + S_{кр}$ AO=CO=KO=1, т.к. $\triangle ACK$ прямоуг. по призн., т.к. $\angle AKC = 90°$

Заметим, что краевые эффекты - это части ~~кругов~~ окружностей радиусом 0,25 (закрашены на рис. 1). Тогда $S_{кр} = 2 \cdot \pi \cdot 0,25^2 \cdot \frac{90°+45°}{360°} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{3/2}{4} = \frac{3\pi}{64}$

S добавленная к границе ABC - это разность площадей секторов: $S_{A_1'B'C_1'} - S_{ABC} = \pi \cdot (1+0,25)^2 \cdot \frac{180°}{360°} - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{180°}{360°} = \pi \cdot (\frac{5}{4})^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{25}{16} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{32}$

(на рис. 1 ~~обозначена~~ область обозначена (1))

S добавленная к границе ADC - это разность площадей секторов: $S_{A_2'D'C_2'} - S_{A_2'D'C_2'} = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{90°}{360°} - \pi \cdot (\sqrt{2}-0,25)^2 \cdot \frac{90°}{360°} = \frac{2\pi}{4} - \frac{(\sqrt{2}-0,25)^2\pi}{4}$ (на рис. 1 область обозначена (2)).

S изначальной фигуры можно рассчитать, как разность S сегментов ω_1 и ω_2 и ещё $\triangle ACK$:

$S_{изн} = S_{ABC} - S_{ADC} + S_{\triangle ACK} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{180°}{360°} - \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{90°}{360°} + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OK =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$

Чистовик стр 6

Следовательно S полученной фигуры $S_ф = S_{изн} +$
$+ S_{доб.ABC} + S_{доб.ADC} + S_{кр} = 1 + \frac{9\pi}{32} + \frac{2\pi}{4} - \frac{(\sqrt{2}-0,25)^2\pi}{4} + \frac{3\pi}{64} =$
$= 1 + \frac{18\pi}{64} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{64} - \frac{(\sqrt{2}-\frac{1}{4})^2\pi}{4} = 1 + \frac{21\pi}{64} + \frac{32\pi}{64} - \frac{(2+\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2})\pi}{4} =$
$= 1 + \frac{53\pi}{64} - \frac{\pi}{64}(32+1-8\sqrt{2}) = 1 + \frac{53\pi}{64} - \frac{33\pi}{64} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{64} =$
$= 1 + \frac{20\pi}{64} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{64} = 1 + \frac{5\pi}{16} + \frac{2\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{16+(5+2\sqrt{2})\pi}{16}$

Ответ: $1 + \frac{(5+2\sqrt{2})\pi}{16}$

№7

первая цифра числа
$\boxed{1}2\,3\,4\,5\,1\,8\,9$

1сл) $n = \underbrace{10\ldots0}_{74}$, тогда $S(n)=1$, но при $m=2$ $S(mn)=2 \neq S(n)$ ⊖

2сл) $n > \underbrace{10\ldots0}_{74}$, сл. $n \geq \underbrace{10\ldots0}_{73}1$, пусть тогда $m=\underbrace{10\ldots0}_{73}1$

Тогда ~~т~~ ~~тогда~~ пусть $n = \overline{ab}$ (a – первая цифра числа) ($n = a\cdot 10^{74}+b$)
тогда $mn = \overline{ab}\cdot 10^{74} + \overline{ab} = (\overline{ab}+a)\cdot 10^{74} + b$.
$S(n) = a + S(b)$, но $S(mn) = S((\overline{ab}+a)\cdot 10^{74} + b) =$
$= S(b) + S(\overline{ab}+a)$, т.к. b в не более 74 знаков, т.е. $b < 10^{74}$. Получается $S(\overline{ab}+a) = a$
$S(\overline{ab}) = S(a\cdot 10^{74}+b)$ ~~но~~ $\geq S(a)$, сл +a должно затронуть 1 цифру числа $\overline{ab}+a$, т.к. иначе у нас будет число вида a..., где – сумма цифр не 0. Получается у нас будет переход через десяток в 1 цифру числа, но тогда и из неё будет переход через десяток, т.к. иначе будет сумма цифр полученного числа будет больше a (сумма цифр $\overline{ab}+a$). ~~а~~ Заметим, что при сложении числа с цифрой в следующий десяток переходит или 1 или 0 ~~всегда~~.* Получается a=9, т.к. переходит через десяток при сложении $\overline{ab}$ и a дошли до 1 цифры $\overline{ab}$ (до a), – эта 9, но тогда все цифры $\overline{ab}$ кроме последней число $\overline{ab}+a$ имеет вид $\underbrace{10\ldots0}_{74}x$, где ~~...~~ $x+10 = a +$ последняя цифра $\overline{ab}$, но тогда $S(\overline{ab}+a) = 1+x = a = 9$, сл. $x=8$, сл последняя цифра $\overline{ab}$ ~~тоже~~ тоже 9, сл ~~...~~ $n = \underbrace{9\ldots9}_{75}$. Ответ: $\underbrace{9\ldots9}_{75}$

* переход на 1 только если в числе этот разряд 9.

стр 7

№4

$\smile AC = \pi \cdot \frac{AC}{2}$, $\smile AB = \pi \cdot \frac{AB}{2}$, $\smile BC = \pi \cdot \frac{BC}{2}$, $AC = AB + BC$

т.е. $\smile AC = \smile AB + \smile BC = 40$ км

Пусть автомобиль проехал a раз по $\smile AC$, b раз по $\smile AB$, c раз по $\smile BC$

Тогда $95 = 5 \cdot b + 13 \cdot c + 19 \cdot a$, $95 = 19 \cdot 5$

т.е. $\begin{cases} 5b + 13c \ \vdots\ 19 \\ 13c + 19a \ \vdots\ 5 \end{cases}$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a, b, c \geq 0$ $\left(\frac{95}{13} = 7\frac{4}{13}\right)$

т.е. $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5 \\ 0 \leq b \leq 19 \\ 0 \leq c \leq 7 \end{cases}$

1сл) $a = 0$, тогда $13c \ \vdots\ 5$, т.е. $\left[\begin{array}{l} c = 0 \Rightarrow b = 19 \\ c = 5 \Rightarrow b = 8 \end{array}\right.$

2сл) $a = 1$, тогда $13c + 19 \ \vdots\ 5$, т.е. $\left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = 7 \ \ominus \end{array}\right.$ $(7 \cdot 13 + 5 \cdot 1 > 95)$

3сл) $a = 2$, тогда $13c + 19 \cdot 2 \ \vdots\ 5$, т.е. $c = 4$

4сл) $a = 3$, тогда $13c + 19 \cdot 3 \ \vdots\ 5$, т.е. $\left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = 6 \end{array}\right.$

5сл) $a = 4$, тогда $13c + 19 \cdot 4 \ \vdots\ 5$, т.е. $c = 3$

6сл) $a = 5$, тогда $13c \ \vdots\ 5$, т.е. $c = 0$, $b = 0$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!