0 404778 070003

40-47-78-07

(40.26)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мухтарова Азамата Фарходовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

40-47-78-07

Итоговая оценка:

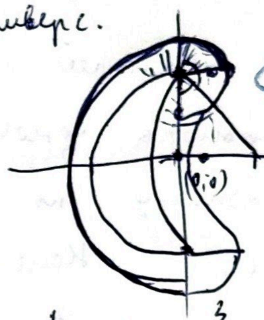
1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	12	12	12	0	12	8	0	60

40-47-78-07
(40.26)

Черновик. | 60 (шестьдесят)

2вр. 4 защ. 7 нап. 3 универс.

$C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 +$



$+ C_2^1 \cdot C$ 14

$C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 + C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^3 + C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 +$ $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4+2+4\sqrt{2}}{4} = \frac{6+4\sqrt{2}}{4}.$

	Защ.	Нап.	Универс.
	4	7	3
1)	2	3	
2)	1	3	1
3)	0	3	2
4)	0	2	3
5)	2	0	3
6)	2	1	

C_{14}^5 14

1260 + 286 = 1546

1546.

0 ун. 3 нап 2 защ.

1 ун. 2 нап 2 защ.

2 ун. 3 нап 1 защ.

2 ун.

630 + 630 + 286 = 1260 + 286 = 1546

27 + 28 = 55

378 + 252 = 630

7 · 3 · 6 = 21 · 6 = 126.

1 · 6 = 6.

105 + 126 = 231

$3 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} =$

35 + 231 + 55 = 286 286

4 · 3 · 35 = 35 · 12 = 70 · 6 = 420

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

35 × 6 = 7 70 · 3 =

35 · 3 = 105

35 · $C_3^1 = 3$

165

$C_4^2 = 6$

$C_7^3 = 35$

$C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$

21 × 12 = 42 + 21 = 252

21 × 6

21 × 18 = 168 + 21 = 378

$C_7^2 = 21$

$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

4 · 3 · 21 = 21 · 12 =

Чистовик. Стр. 1 Задача 1.

Есть 2 вратаря, 4 защ., 7 напад, 3 универсала.
На кол-во вратарей никто повлиять не может, поэтому ~~xx~~ кол-во выбора одного вратаря — C_2^1.
Построим таблицу по количеству универс, нап. и защ.:

Универс.	Нап.	Защ.		кол-во способов:
0	3	2	$\longrightarrow$	$C_7^3 \cdot C_4^2 = 210$
1	2	2	$\longrightarrow$	$C_7^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 378$
1	3	1	$\longrightarrow$	$C_7^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 420$
2	2	1	$\longrightarrow$	$C_7^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 252$
2	3	0	$\longrightarrow$	$C_7^3 \cdot C_3^2 = 105$
2	1	2	$\longrightarrow$	$C_7^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^2 = 126$
3	0	2	$\longrightarrow$	$C_3^3 \cdot C_4^2 = 6$
3	1	1	$\longrightarrow$	$C_3^3 \cdot C_7^1 \cdot C_4^1 = 28$
3	2	0	$\longrightarrow$	$C_3^3 \cdot C_7^2 = 21$

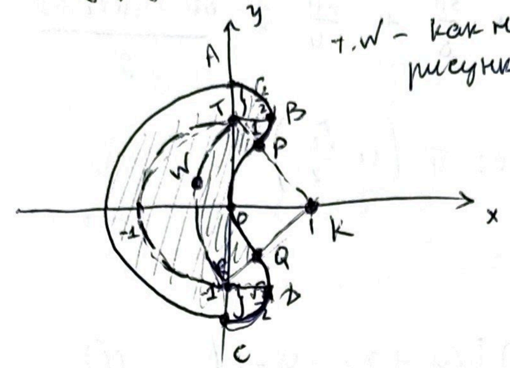
В таблице описаны все способы выбора нап. и защ., с учётом, что мы выбираем кого-то из универсалов.
Теперь суммируем кол-во способов, получившееся в таблице и умножаем его на C_2^1 — кол-во выбора одного вратаря из двух: $C_2^1(210+378+420+252+105+126+6+28+21) =$
$= \cancel{xx}\ 2 \cdot 1546 = 3092$. Таким образом я рассмотрел все возможные случаи выбора нап. из универсалов или защ. из универсалов.

Ответ: 3092.

Чистовик стр. 2.

Задача 2.

К углу полумесяц будет выглядеть так:



т.W – как на рисунке

Пунктиром указана исходная картинка, сплошной линией – к углу.

Такой рисунок будет, т.к. каждая точка полумесяца расплылась во все стороны, значит вокруг исходного полумесяца будет краска на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2}$ от каждой его точки. Найдём площадь получившейся фигуры: пусть $A(0;1+\frac{\sqrt{2}}{2})$; $B(\frac{\sqrt{2}}{2};1)$; $T(0;1)$; $R(0;-1)$; $D(\frac{\sqrt{2}}{2};-1)$; $C(0;-1-\frac{\sqrt{2}}{2})$; $O(0;0)$; $K(1;0)$

Точки P и Q – точки пересечения TK и RK с окр. с центром в т.K и радиусом $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Также т.к. $\angle ATP=\angle QRC=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ (т.к. $\angle ORK=\angle OTK=45^\circ$). Тогда площадь сегмента RTO: $S_{RWTO}=\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}-1$ (т.к. $TK=\sqrt{2}$ из т. Пифагора в п/у ΔOTK, т.к. $R_1=TK$, а $S_{\Delta TRK}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$)

S части сектора TPQR $=\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{2})^2-\frac{\pi}{4}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\left(2-\frac{2}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}$; $S_{сект. ATB}=S_{сект. QRC}=\frac{135^\circ}{180^\circ}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3\pi}{8}$.

S части окружности ACRWT $=\frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-S_{RWTO}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{6+4\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi(3+2\sqrt{2})}{4}-\frac{2\pi}{4}+\frac{4}{4}=\frac{\pi+2\pi\sqrt{2}+4}{4}$

Чистовик стр 3. продолж. задачи 2.

т.е. $S_{общ.} = S_{части\ окруж.\ ACRWT} + S_{части\ сектора\ TPQR} + 2 \cdot S_{сект\ ATB} = \frac{\pi + 2\pi\sqrt{2} + 4}{4} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} = \frac{8\pi + 4\pi\sqrt{2} + 8}{8} =$

$= \pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$

Ответ: $\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$

Задача 3.

$$\begin{cases} \overset{(x-1)(y+2)}{(xy + 2x - y - 2)}\,|y - x - 10| = (x-4)\,|xy + 2x - y - 2| \quad (1) \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \quad (2) \end{cases}$$

пусть $xy + 2x - y - 2 = a$; $y - x - 10 = b$, тогда

$a = (x-1)(y+2)$

(1) 1) при $a > 0$ ~~имеем~~:

$|y - x - 10| = x - 4$, при $b > 0$, то $y - x - 10 = x - 4$,

т.е. $y = 2x + 6$, подставляя в (2):

$\sqrt{2x + 6 - x + 8} = 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{x + 14} = 2x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 14 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$,

подходит только $x = \frac{\sqrt{217} - 3}{8}$ (т.к. $2x + 1 \geq 0$) $\Rightarrow$ при таком знач. x: $b < 0$.

т.е. случай не подходит.

2) при $a > 0$: $|y - x - 10| = x - 4$, при $b < 0$, то

$x + 10 - y = x - 4 \Rightarrow y = 14$, т.е. подставляя в (2):

$\sqrt{14 + 8 - x} = 9 \Rightarrow \sqrt{22 - x} = 9 \Rightarrow 22 - x = 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -59$, но тогда $b > 0$ – не подходит.

~~3) при $a < 0$ будут аналогичные случаи, которые из случаев 1) и 2) не подойдут, тогда рассмотрим:~~

~~3) $a = 0$;~~

40-47-78-07 (40.26)

черновик 1

$(xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2|$

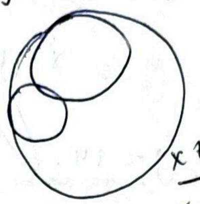
$y-x+8 \geq 0$ $\frac{13}{5}$; $\frac{27}{13}$ a_1+a_2

$y-5 \geq 0$ $y \geq x-8$

$y \geq 5$

$9+52\cdot4 = 208+9 = 217.$

т.е. $y-x \geq 5-x$

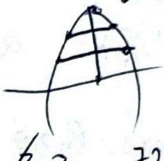


$90\cdot9 = 810.$ $90\cdot9 =$ $810.$

$y-x+8 \geq 13-x$

$\frac{x+2}{x-2} = 1+\frac{4}{x-2}$

т.е. $|y-x-10| = x-4$ $a=9$



$9 \ldots 9$

$S(2n) = S(n)$ $y-x-10 =$ $y = a-bx^2$

$a_1 a_2 \ldots \frac{x+2}{x-2} = 1$ пусть $\cancel{x+2 = x-2}$ $2-2 \ldots$ $720+81=$ 801

$y = f(x)$ a_{90} $\times 89$, 801

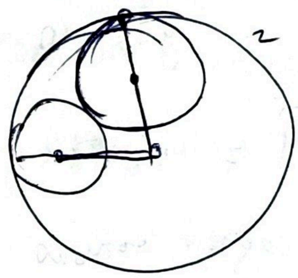
$2a_{99}-10+f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2}{a}$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}+2a_{99}+9$ $= a_1+a_2+\ldots+a_{90}$ 811

$+2a_1+9$ $f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2}{\frac{a}{b}\cdot b}$

$98\times2 = 196$ $9\cdot89+10 =$

$f(0) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$



$=$

$-(9\cdot89+10)+25 = 5$

$f(1) =$

$S = (9\cdot89+10) = 13$

$1{,}35 = 95$ минут 19

$= 5\cdot19$ 811 27 $99\cdot2 = 198$

$999\ldots9\cdot2 =$

$95 = 5x+13y+19z$ $x, y, z \geq 0$ 1

$x=0$, $y=0$ $z=5$ $99\cdot3 = 297$ $99\cdot19$ $\times 99$, 19, 801, 89, 1881

$z=4$ $z=3$ $= 57+5x+13y$ $=$ $38 = 5x+13y$

$\underbrace{999\ldots9}_{n}+\underbrace{99\ldots9}_{n} = 1\overbrace{99\ldots9}^{n-1}8$ $x=5$; $y=$

Чистовик стр. 4 | продолжение задачи 3:

~~$xy + 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2x-2}{x-1} = 2$.~~

~~но при $y = 2$: $y - 5$ в ② < 0, то есть $y \neq 2$ (т.к. $y \geq 5$). → случай не подходит~~

~~4) при $b = 0$: $y = x + 10$, причём $x - 4 = 0$ тогда, т.е. $x = 4$, то $y = 14$.~~

3) при $a < 0$: $-|y - x - 10| = x - 4$,

при $b > 0$: $x + 10 - y = x - 4 \Rightarrow y = 14$,

тогда подставляя в ②: $\sqrt{22 - x} = 9 \Rightarrow x = -59$,

тогда $b > 0$ и $a < 0$ — подходит. $(-59; 14)$

4) при $a < 0$ и $b < 0$:

$y - x - 10 = x - 4 \Rightarrow y = 2x + 6$. тогда в ②:

$\sqrt{x + 14} = 2x + 1 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$,

подходит только $\frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$, т.к. $2x + 1 \geq 0$, тогда

$y = \frac{-3 + \sqrt{217}}{4} + 6 = \frac{\sqrt{217} + 21}{4}$ — не подходит, т.к. $a \geq 0$;

5) при $a = 0$: $(x - 1)(y + 2) = 0$, т.е.

1) $x = 1$: то ②: $\sqrt{y - 1 + 8} = y - 5 \Rightarrow \sqrt{y + 7} = y - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 7 = y^2 - 10y + 25 \Rightarrow y^2 - 11y + 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y - 2)(y - 9) = 0 \Rightarrow$ подходит только $y = 9$,

т.е. $(1; 9)$

Чистовик стр 5 | продолж. задачи 3.

при $y = -2$ в ② $y - 5 < 0$, что невозможно, значит $y \neq -2$.

6) При $b = 0$: $y - x - 10 = 0 \Rightarrow y = x + 10$ причем $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$; $\Rightarrow y = 14$, не подходит в ②.

7) $a = b = 0$ – уже рассмотрен, т.к. $x = 1$ уже рассмотрено.

Из вышеописанных случаев (всех возможных случаев):

Ответ: $(-59; 14)$; $(1; 9)$

Задача 4.

пусть x – кол-во раз, сколько он проехал по дуге AB, y – по дуге BC, z – по дуге AC, тогда $x, y, z \geq 0$ и имеем: $5x + 13y + 19z = 95$ (1 час 35 м)

т.е. т.к. при $z \geq 6$, x и $y = 0$, то $z_{max} = 5$, рассмотрим случаи:

1) $z = 5 \Rightarrow x = 0$; $y = 0$; $5 \cdot 19 = 95$ – верно.

2) $z = 4 \Rightarrow 5x + 13y = 19$ – невозможно при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

3) $z = 3 \Rightarrow 5x + 13y = 38 \Rightarrow$ ед. реш. при $x, y \geq 0$: $x = 5$; $y = 1$

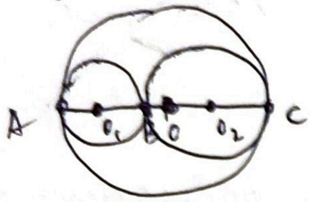
4) $z = 2 \Rightarrow 5x + 13y = 57 \Rightarrow$ ед. реш при $x, y \geq 0$ $y = 4$; $x = 1$

5) $z = 1 \Rightarrow 5x + 13y = 76 \Rightarrow y = 2$; $x = 10$,

6) $z = 0 \Rightarrow 5x + 13y = 95 \Rightarrow (x = 19; y = 0)$; $x = 6$; $y = 5$

Чистовик стр. 6 | продолж. задачи 4:

Из рассмотренных случаев, возможные:
$(x; y; z)$: $(0;0;5)$; $(5;1;3)$; $(1;4;2)$; $(10;2;13)$; $(19;0;0)$; $(6;5;0)$. Из этих случаев по показанной трассе из т. A в т. A он может вернуться лишь при этих случаях (в остальных нет подобного пути): $(5;1;3)$ и всё.

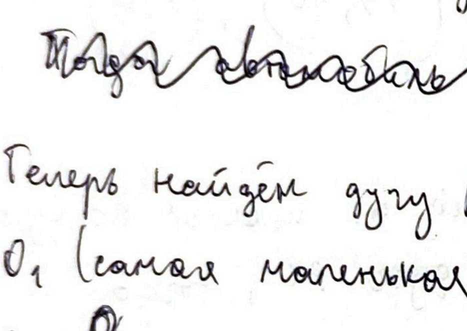


Остальные случаи не подходят, т.к. он не может вернуться в точку из тех ситуаций.

~~Тогда автомобиль проехал:~~

Теперь найдём дугу AC: т.к. окр с центром O_1 (самая маленькая, ей принадлежит дуга AB) и с центром O (самая большая) касаются внутренним образом, также окр. с центром O и окр. с центром O_2 (которой принадлежит дуга BC) также касаются внутренним образом, то O, O_2, C — лежат на одной прямой, также и A, O_1, O — лежат на одной прямой.

~~Нарисуем рисунок~~



Тогда т.к. любую из дуг AC автомобиль проходит за одно и то же время, то они равны, значит AC — диаметр окружности с ц. в т. O.

Чистовик стр. 7 | продолжение задачи 4:

Обозначим $R_1 = AO_1$; $R_2 = O_2C$, тогда $R_0 = R_1 + R_2$ (радиус большей окружности) ; т.к. длина полуокружности: $2\pi R \cdot \frac{1}{2}$, то тогда $|\cap AB| = 13 = 2\pi R_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{13}{\pi}$;

$|\cap BC| = 27 = 2\pi R_2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow R_2 = \frac{27}{\pi} \Rightarrow R_0 = \frac{40}{\pi}$, тогда

$|\cap AC| = 2\pi R_0 \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot \frac{40}{\pi} = 40$.

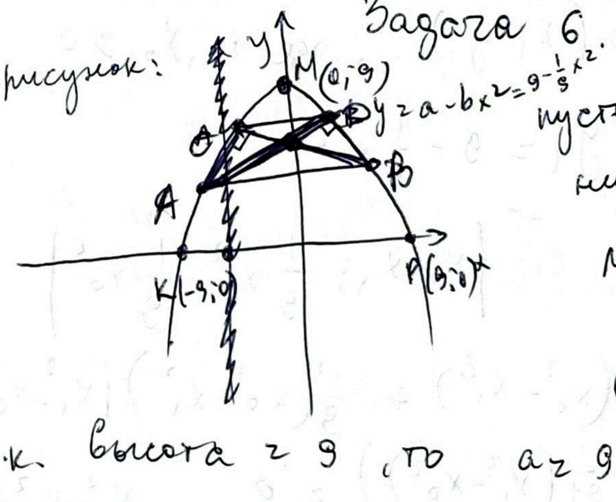
Значит автомобиль проехал : $5 \cdot 13 + 1 \cdot 27 + 3 \cdot 40 =$

$= 65 + 27 + 120 = 92 + 120 = 212$ (км)

Ответ: 212 (км).

Задача 6

рисунок:



пусть т. K и P - точки пересечения параболы с Ox , тогда M - вершина параболы (как на рис.) $y = a - x^2b$ имеет вид, как на рисунке.

т.к. высота = 9 , то $a = 9$, т.к. $y_{max} = 9$ при $x = 0$, причём эта парабола $y = a - bx^2$ проходит через точки : $(0;9)$, также через : $x^2 = \frac{9}{b} \Rightarrow$

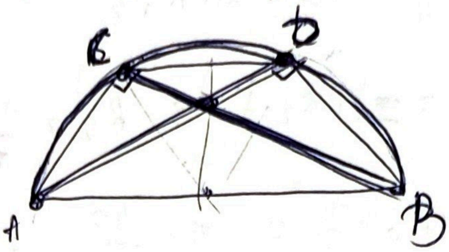
$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{b}}$, т.е. через точки $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{b}};0\right)$, также т.к. $KP = 18$ по условию, тогда $\frac{3}{\sqrt{b}} + \frac{3}{\sqrt{b}} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt{b}} = 18 \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{9} \Rightarrow$ парабола имеет вид: $y = 9 - \frac{1}{9}x^2 \Rightarrow K(-9;0)$; $P(9;0)$

Чистовик стр. 8. | продолжение задачи 6:

т.к. AB и CD парал. оси, то $AB \parallel CD$, также, т.к. $y = a - x^2 b$ — симметричный относительно Oy график, то ~~ABCD~~ $ACDB$ — р/б трапеция.

Нарисуем $ABCD$:



С другой стороны $ACDB$ — р/б трапеция, т.к $\angle ACB = \angle ADB$, что значит, что $ACDB$ — вписанная, а значит и р/б.

Пусть A имеет координаты $(-x_0; y_0)$, тогда у $B(x_0; y_0)$, также у $C(-x_1; y_1)$; $D(x_1; y_1)$, где $x_1, x_0 \geq 0$

тогда $y_0 = 9 - \frac{1}{9}x_0^2$; $y_1 = 9 - \frac{1}{9}x_1^2$

$\vec{AC}\{x_0 - x_1; \frac{1}{9}x_0^2 - \frac{1}{9}x_1^2\}$; $\vec{CB}\{x_0 + x_1; \frac{1}{9}x_1^2 - \frac{1}{9}x_0^2\}$

тогда $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow (x_0^2 - x_1^2) + \frac{1}{9}(x_0^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_0^2) = 0 \Rightarrow (x_0^2 - x_1^2)\left(1 + \frac{1}{81}(x_1^2 - x_0^2)\right) = 0$, $x_0^2 - x_1^2 \neq 0$, т.к. $x_0 \neq x_1$, потому что $ACDB$ — трапеция. тогда $\frac{1}{81}(x_1^2 - x_0^2) = -1 \Rightarrow x_1^2 - x_0^2 = -81$. (1)

~~Также~~ $\cancel{\vec{AD}\{x_1 + x_0; \frac{1}{9}x_0^2 - \frac{1}{9}x_1^2\}, \vec{DB}\{x_0 - x_1; \frac{1}{9}x_1^2 - \frac{1}{9}x_0^2\}}$, ~~тогда~~ $\cancel{\vec{AD} \cdot \vec{DB} = 0 \Rightarrow x_0^2 - x_1^2 + \frac{1}{81}(x_0^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_0^2) = 0 \Rightarrow (x_0 - x_1)^2 (1+}$

Тогда расстояние между балками будет $y(x_1) - y(x_0)$

Чистовик стр. 9 | продолж. задачи 6:

$= \cancel{9} - \frac{1}{9}x_1^2 - \cancel{9} + \frac{1}{9}x_0^2 = \frac{1}{9}(x_0^2 - x_1^2)$, т.к. (1):

$x_0^2 - x_1^2 = 81$, то расстояние между балками:

$\frac{1}{9} \cdot 81 = 9$

Ответ: 9

Задача 7.

~~$S(n)$ — сумма цифр натур. n.~~

~~$S(mn) = S(n)$. Заметим, что $S(n) = \lg n + 1 - \alpha$, где $0 \le \alpha < 1$, тогда~~

~~$S(mn) = \lg(mn) + 1 - \beta$, $0 \le \beta < 1$, причём $S(mn) = S(n)$, тогда~~

~~т.к. $\lg(mn) = \lg(m) + \lg(n)$, где $m, n > 0$, то~~

~~$\lg(m) + \lg(n) + 1 - \beta = \lg(n) + 1 - \alpha$ =>~~

~~=> $\lg(m) = \beta - \alpha$~~

Заметим, что $\underbrace{999\ldots9}_{n \text{ девяток}} \cdot 2 = 1\underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ девяток}}8$,

т.е. $S(2 \cdot \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ девяток}}) = S(\underbrace{99\ldots9}_{\text{девяток}})$

И вправду $n_{max} = \underbrace{99\ldots9}_{90 \text{ девяток}}$, т.к. сумма цифр числа всегда будет делиться на 9, но кол-во девяток ~~будет~~ не будет уменьшаться, т.к. $m \ge 1$, то число $n = \underbrace{99\ldots9}_{k \text{ девяток}}$ будет таково, что $S(mn) = S(n)$.

Тогда т.к. число $n = \underbrace{999\ldots9}_{90 \text{ девяток}}$ — самое наибольь-

Чистовик стр 10. | продолжение задачи 7:

шее из всех 90-значных чисел, то

$n_{max} = \underbrace{999\ldots9}_{90 \text{ девяток}}$

Ответ: $\underbrace{999\ldots9}_{90 \text{ девяток}}$