0 365058 990001

36-50-58-99
(39.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мышко Марии Петровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
36-50-58-99	68	12	0	0	12	12	12	12	8

68 (шестьдесят восемь)

~~56~~ ~~(пятьдесят шесть)~~ ~~И. Гатчина~~

Черновик.

1 вр, 2 з, 3 н. – хочу

Исправленному верить

3 вр, 5 з, 6 н, 3 у – есть. (не вр)

№1

$$3\cdot(C_5^2\cdot C_9^3+C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_8^3+C_3^2\cdot C_7^3)=$$

вр

$$=3\cdot(10\cdot 84+5\cdot 3\cdot 56+3\cdot 35)=$$

$$=3\cdot(840+840+105)=3\cdot 1785=\boxed{5355}$$

ответ

$3\cdot 10\cdot 84$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$$

$$=3+\frac{(bc)^2-a^2bc+(ac)^2-b^2ac+(ab)^2-c^2ab}{abc}$$

Н.у.о. $a\geq b\geq c$.

$a^2(b^2-bc+c^2)$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}=\frac{c^2+b^2}{bc}\geq 2.$$

$$c-a-b+\frac{ab}{c}=\frac{c^2-ac-bc+ab}{c}$$

$$a-b-c+\frac{bc}{a}=\frac{a^2-ab-ac+bc}{a}=\frac{(a-b)(a-c)}{a}$$

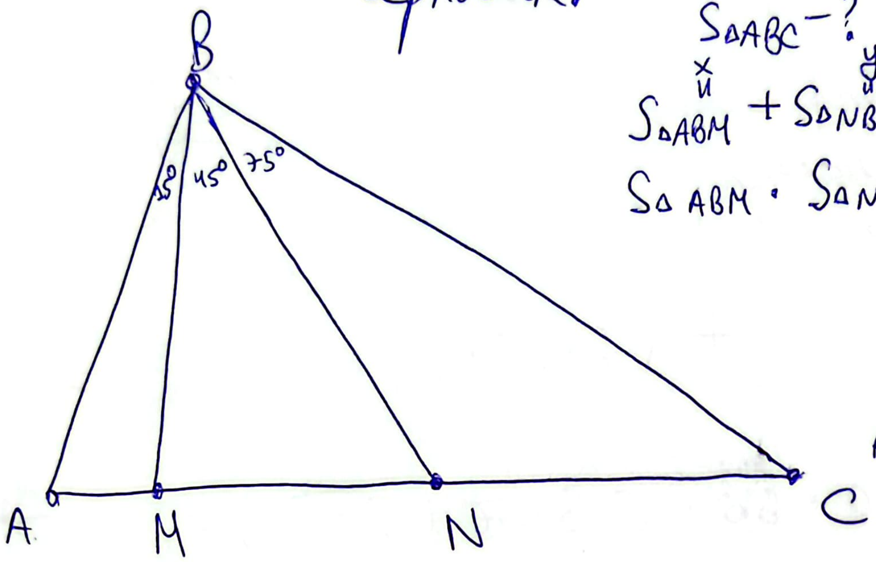
по транс. нер-ву

$a>b$, $a>c$

$a^2+bc\geq ab+ac$

$\Rightarrow$ ответ: 3.

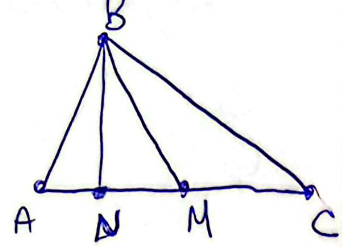
Черновик.



$S_{\triangle ABC}$ — ?

$\underset{x}{S_{\triangle ABM}} + \underset{y}{S_{\triangle NBC}} = 5$

$S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = 3$



$x = AB \cdot BM \cdot \sin 15°.$ $y = BN \cdot BC \cdot \sin 75° = BN \cdot BC \cdot \cos 15°.$

$x + y = AB \cdot BM \cdot \sin 15° + BN \cdot BC \cdot \cos 15° = 5$

$x \cdot y = AB \cdot BM \cdot \sin 15° \cdot BN \cdot BC \cdot \cos 15° = AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \frac{\sin 30°}{2} =$

$= AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \frac{1}{4} = 3. \Rightarrow AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC = 12.$

$S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin 135° = AB \cdot BC \cdot \sin 45°.$

$\Rightarrow \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{2}} = \frac{BM \cdot BN}{\sqrt{2}} + 5.$

$\Rightarrow AB \cdot BC = BM \cdot BN + 5\sqrt{2}.$

$\Rightarrow AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC = \underset{z}{\underline{AB \cdot BC}} \cdot (\underset{z}{\underline{AB \cdot BC}} - 5\sqrt{2}) = 12.$

$\Rightarrow z^2 - 5\sqrt{2}z - 12 = 0$

$D = 50 + 12 \cdot 4 = 98 = (7\sqrt{2})^2$

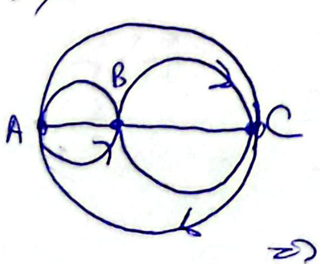
$\Rightarrow z = \frac{5\sqrt{2} \pm 7\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = 6\sqrt{2}$ (т.к. $z > 0$).

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$ — $\underline{\text{ммбд}}$ — $\underline{\text{ответ}}$.

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 15 \\ \hline 280 \\ 56 \\ \hline 840 \end{array}$

$\begin{array}{r} 85 \\ -17 \\ \hline 68 \end{array}$ $\frac{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{6} \cdot \cancel{3}} = 12 \cdot 7 = 84$ 1ч 25мин = 85мин.

$7x + 11y + 17z = 85.$ $\begin{array}{r|l} 85 & 17 \\ -85 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$



$z = 5$ — нет $z = 4$ — нет $z = 3$ — нет $z = 2$ — нет

$z = 1$ — да ($x = 5, y = 3$) $z = 0$ — нет

$\Rightarrow \underline{\text{ответ}} = 5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 = 75 + 75 + 40 = \boxed{190}$

Чистовик.

Задача 4.

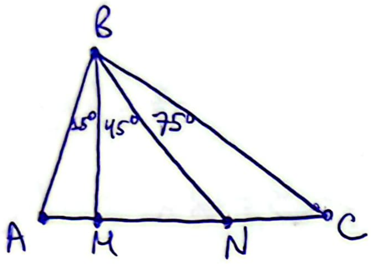


рис.

Дано: $\triangle ABC$, точки M и N на AC,
$\angle ABM = 15°$, $\angle MBN = 45°$, $\angle NBC = 75°$; *.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Решение: Заметим, что M ближе к A, чем N (иначе $(\overset{15°}{\angle ABM}) > (\overset{45°}{\angle ABN})$), т. е. рис. такой. Пусть $S_{\triangle ABM} = x$, $S_{\triangle NBC} = y$. Из условия $x+y=5$ и $xy=3$.

$x = AB\cdot BM\cdot \sin\angle ABM = AB\cdot BM\cdot \sin 15°$, $y = BN\cdot BC\cdot \sin\angle NBC =$
$= BN\cdot BC\cdot \sin 75° = BN\cdot BC\cdot \cos 15°$. $\Rightarrow$ $xy = AB\cdot BM\cdot \sin 15°\cdot$
$\cdot BN\cdot BC\cdot \cos 15° = AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN\cdot \frac{\sin 30°}{2} = AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN\cdot \frac{1}{4}$.
$xy = 3$. $\Rightarrow$ $AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN = 12$.

$S_{\triangle NBM} = BM\cdot BN\cdot \sin\angle MBN = BM\cdot BN\cdot \sin 45° = \frac{BM\cdot BN}{\sqrt{2}}$.

$S_{\triangle ABC} = AB\cdot BC\cdot \sin\angle ABC = AB\cdot BC\cdot \sin(15°+45°+75°) = AB\cdot BC\cdot \sin 135° =$
$= AB\cdot BC\cdot \overset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 45°}$. При этом $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MBN} + S_{\triangle NBC} =$
$= x+y+S_{\triangle MBN} = 5 + \frac{BM\cdot BN}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow$ $AB\cdot BC\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 + \frac{BM\cdot BN}{\sqrt{2}}$ $(= S_{\triangle ABC})$. $\Rightarrow$ $BM\cdot BN = AB\cdot BC - 5\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ $12 = AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN = AB\cdot BC\cdot(AB\cdot BC - 5\sqrt{2})$. Пусть $z = AB\cdot BC$.

$\Rightarrow$ $z^2 - 5\sqrt{2}z - 12 = 0$.

$D = 50 + 4\cdot 12 = 98 = (7\sqrt{2})^2$.

$\Rightarrow z = \frac{5\sqrt{2} \pm 7\sqrt{2}}{2}$. $\Rightarrow$ $z = 6\sqrt{2}$ (т.к. $z > 0$, т.к. $AB, BC > 0$).

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = AB\cdot BC\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$.

Ответ: 6.

* — $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} = 5$, $S_{\triangle ABM}\cdot S_{\triangle NBC} = 3$.

Чистовик.

Задача 5.

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c} - \min ? \ (a, b, c>0).$$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c} = \frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+$$
$$+\frac{ab}{c}-c+1 = 3+a\cdot\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-a-b-c+\frac{bc}{a} \geq 3+2a-a-b-c-$$
(т.к. $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{b^2+c^2}{bc}\geq 2$ (т.к. $(b-c)^2=b^2+c^2-2bc\geq 0$)) $+\frac{bc}{a}=$
$$=3+\frac{a^2+bc-ab-ac}{a}=3+\frac{\overset{\geq 0}{(a-b)}\overset{\geq 0}{(a-c)}}{\underset{a>0}{a}} \geq 3.$$

Б.н.у.о. (можем так говорить, т.к. слагаемые однотипные (симметричные)) $a\geq b\geq c$).

Пример: $a=b=c=1$. $\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$
$=1+1+1=3$.

$\Rightarrow$ Min $=3$ и он достигается (как видно на примере).

Ответ: 3.

Задача 1.

в – вратарь, з – защитник, н – нападающий, у – универсал.

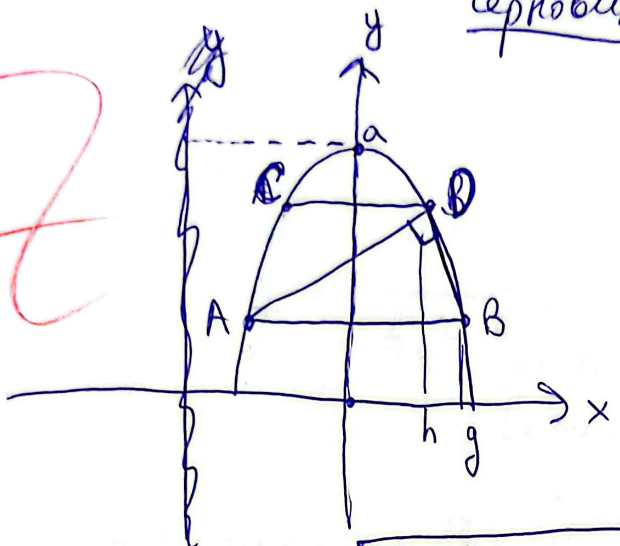
Хочу: 1в, 2з, 3н. Есть: 3в, 5з, 6н, 3у.

Ans(ответ) = 3 (число способов выбрать 1в из трёх возможных) $\cdot$ ($C_5^2\cdot C_{6+3}^3$ (выбрать 2з из 5з и 3н из 6н и 3у) $+ C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_{6+3-1}^3$ (выбрать 1з из 5з, 1з из 3у и 3н из 6н и оставшихся $3-1=2$у) $+ C_3^2\cdot C_{6+3-2}^3$ (выбрать 1з из 3у и 3н из оставшихся $3-2=1$у и 6н)) $=$
$$=3\cdot(C_5^2\cdot C_9^3+C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_8^3+C_3^2\cdot C_7^3)=3\cdot(10\cdot 84+5\cdot 3\cdot 56+3\cdot 35)=$$
$$=3\cdot(840+840+105)=3\cdot 1785=5355.$$

Ответ: 5355.

36-50-58-99 (39.6)

Черновик.



$y = a - bx^2$

$\Rightarrow$ Вершина: a.

$B(g, a-bg^2)$

$D(h, a-bh^2)$

$A(-g, a-bg^2)$

$C(-h, a-bh^2)$.

$\Rightarrow AB = 2g$, $AD = \sqrt{(h+g)^2 + (bg^2-bh^2)^2}$, $DB = \sqrt{(g-h)^2+(bg^2-bh^2)^2}$.

При этом $AB^2 = AD^2 + DB^2$.

т.е. $4g^2 = h^2+g^2+2hg + b^2(g^2-h^2)^2 + h^2+g^2-2hg + b^2(g^2-h^2)^2$.

Хочу: $bg^2 - bh^2 = ???$

Знаю: $a = 18$. $18 - 12^2 \cdot b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{8}$.

$4g^2 = \frac{1}{32}(g^2-h^2)^2 + 2(h^2+g^2)$.

$18 - bx^2 = 0$

$\frac{18}{12 \cdot 12}$ $\frac{3}{4}$ 8 2

$\Rightarrow 2(g^2-h^2) = \frac{1}{32}(g^2-h^2)^2$

$\Rightarrow 64 = (g^2-h^2)$. $\Rightarrow b(g^2-h)^2 = \frac{1}{8} \cdot 64 = 8$ – ответ.

$123 \cdot 1011 = 12300 + 123$

$n = \overline{a_1 \ldots a_{100}}$. Пусть $m = 10^{99} + 1$.

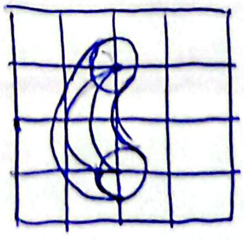
$\Rightarrow nm = n \cdot 10^{99} + n$.

1999 9
1
00

$$\begin{array}{r} \overline{a_1 \ldots a_{99}\, a_{100}\, 00\ldots0} \\ + \quad a_1\, a_2 a_3 \ldots a_{100} \\ \hline 10 \quad\quad 8\, a_2 a_3 \ldots a_{100} \end{array}$$

$\Rightarrow n = \underbrace{\overline{9\ldots9}}_{100}$

$$\begin{array}{r} 999 \\ \times\ 15 \\ \hline 4995 \\ 999 \\ \hline 14985 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 999 \\ \times\ 112 \\ \hline 1998 \\ 999 \\ 999 \\ \hline 111888 \end{array}$$

1 2 3 4 5 6 7 8

Черновик

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 4 \\ \hline 68 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ -68 \\ \hline 17 \end{array}$$

$7x+11y+17z=85$

2) $z=4$. $\Rightarrow$ $7x+11y=17$.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 99 \\ +99 \\ \hline 1891 \\ +891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ +99 \\ \hline 131 \end{array}$$

$+99$

Чистовик.

Задача 7.

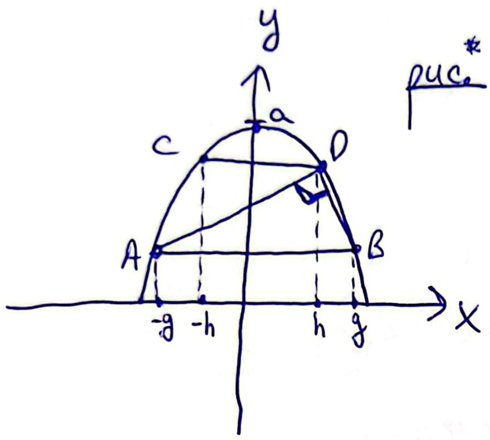


рис.*

$y=a-bx^2$.

Заметим, что $b>0$ (т.к. при $b<0$ не было бы потолка (т.к. при $x\to\infty$ $y\to\infty$), а при $b=0$ не было бы полка, точнее он был бы бесконечной длины)). $\Rightarrow$ Вершина параболы в (.) $(0, a)$ (т.к. $a-bx^2\leq a$ (т.к. $b, x^2\geq 0$)).

$\Rightarrow$ Высота тунеля $=a=$ ~~24~~ 18 (по условию), и график симметричен относительно оси y. Ширина = расстояние между точками параболы с $y=0$. $\Rightarrow$ это точки ~~(0, t)~~ $(t,0)$ и ~~(0, -t)~~ $(-t,0)$ (из-за симметрии), и $a-bt^2=0$. Ширина $=t-(-t)=2t=24$. $\Rightarrow t=12$.

$\Rightarrow 18-b\cdot 12^2=0$. $\Rightarrow b=\frac{18}{12^2}=\frac{1}{8}$.

Пусть $B(g, a-bg^2)$ и $D(h, a-bh^2)$. $AB \parallel CD \parallel Ox$. $\Rightarrow$

$A(-g, a-bg^2)$ и $C(-h, a-bh^2)$ (т.к. $B.y=A.y$ и $D.y=C.y$).

$\Rightarrow AB=2g$, $AD=\sqrt{(h+g)^2+(bg^2-bh^2)^2}$, $DB=\sqrt{(g-h)^2+(bg^2-bh^2)^2}$.

При этом $\angle ADB=90°$. $\Rightarrow$ По т. Пифагора $AB^2=AD^2+DB^2$.

Т.е. $4g^2=(h+g)^2+(bg^2-bh^2)^2+(g-h)^2+(bg^2-bh^2)^2$.

$\Rightarrow 4g^2=2h^2+2g^2+2b^2(g^2-h^2)^2$.

$\Rightarrow 2(g^2-h^2)=2b^2(g^2-h^2)^2$. $\Rightarrow (g^2-h^2)=\frac{1}{b^2}$. $\Rightarrow g^2-h^2=64$.

Заметим, что расстояние между балками $=D.y-B.y=$

$=(a-bh^2)-(a-bg^2)=bg^2-bh^2=b(g^2-h^2)=\frac{1}{8}\cdot 64=8$.

Ответ: 8.

* – $\angle ADB=90°$ – наиб. угол в $\triangle ADB$. $\Rightarrow AB>AD, DB$. Из симметрии $\angle ACD=\angle CDB=\angle CDA+\angle ADB>90°$. $\Rightarrow \angle ACD$ – наиб. угол в $\triangle ACD$. $\Rightarrow AD>AC, CD$. $\Rightarrow AB>AD>CD$. $\Rightarrow$ рис. такой (т.е. $D.y>B.y$, из чего следует $D.x<B.x$).

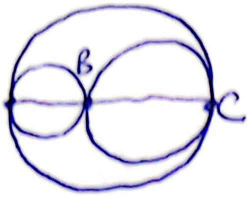
Обозначения: $T(x,y)$ – ~~так~~ $T.x=x$, $T.y=y$.

$T.x$ – координата x точки T.

$T.y$ – координата y точки T.

Чистовик.

Задача 6.



AB, BC, AC — диаметры окр-ти (т.к. из условия $\smile AB = \smile BA$, $\smile BC = \smile CB$, $\smile AC = \smile CA$).

$\smile AB = 15$ км (проезжает за 7 мин).

$\smile BC = 25$ км (проезжает за 11 мин).

$\smile AB = \frac{\pi \cdot AB}{2}$ ($\pi \cdot AB$ — длина окр-ти), $\smile BC = \frac{\pi \cdot BC}{2}$, $\smile AC = \frac{\pi \cdot AC}{2} = \frac{\pi \cdot (AB+BC)}{2} = \frac{\pi \cdot AB}{2} + \frac{\pi \cdot BC}{2} = \smile AB + \smile BC = 15км + 25км = 40км$ (проезжает за 17 мин).

Пусть автомобиль x раз проехал по $\smile AB$ (или $\smile BA$), y раз по $\smile BC$ (или $\smile CB$) и z раз по ~~дуге~~ $\smile AC$ (или $\smile CA$).

$\Rightarrow 7x + 11y + 17z = 85$ (т.к. на дорогу он потратил 1ч 25 мин $= 85$ мин).

$x, y, z \geq 0. \Rightarrow z \leq 5.$ $(x, y, z \in (\mathbb{N} \cup \{0\}))$.

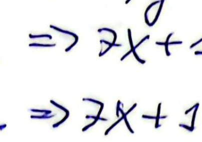
1) $z = 5. \Rightarrow$ ~~$x, y = 0$~~ $x = 0$ и $y = 0$. Но так авто не вернётся в (·)A.

2) $z = 4. \Rightarrow 7x + 11y = 17$. Но $\nexists$ подходящих x, y.

3) $z = 3. \Rightarrow 7x + 11y = 34$. Но ~~не~~ $\nexists$ подходящих x, y.

4) $z = 2. \Rightarrow 7x + 11y = 51. \Rightarrow x = 1$ и $y = 4$. Но так авто не вернётся в (·)A ~~(т.к. только 1 раз из неё выедет, а дальше будет кататься по ◡BC (или ◡CB~~ (т.к. будет в (·)A 3 раза (1 раз от $\smile AB / \smile BA$ и 2 раза от $\smile AC / \smile CA$), а должен быть чётное число раз (т.к. он стартует в (·)A и возвращается в (·)A. $\Rightarrow$ он должен выехать из (·)A и въехать в (·)A одинаковое число раз. $\Rightarrow$ т.е. он должен быть в (·)A чётное число раз)).

5) $z = 1. \Rightarrow 7x + 11y = 68. \Rightarrow x = 5$ и $y = 3$. Такой вариант возможен.



— как должен ехать автомобиль.

$\Rightarrow$ он проедет $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 75 + 75 + 40 = 190$ км.

6) $z = 0. \Rightarrow 7x + 11y = 85$. ~~Но $\nexists$ подходящих x, y~~ $\Rightarrow x = 9$ и $y = 2$. Но так авто не вернётся в (·)A (т.к. будет в (·)A 9 раз).

Ответ: 190 км.

Чистовик. **Задача 8.**

Заметим, что $n \geq 10^{99}+1$ (т.к. $n = 10^{99}$ не подходит (т.к. при $m=2$ $S(mn) \neq S(n)$), и $n \geq 10^{99}$ (т.к. стозначное)).

Тогда $\measuredangle$ $m = 10^{99}+1$. Пусть $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{100}}$. $mn = (10^{99}+1)n =$

$$= 10^{99}n + n = +\begin{array}{r} \overline{a_1 a_2 \ldots a_{100} 0 \ldots 0} \\ a_1 a_2 \ldots a_{100} \\ \hline \underbrace{? ? ? \ldots ? ?}_{\text{здесь}}\ a_2 \ldots a_{100} \end{array}.$$

Заметим, что сумма цифр mn уже $\geq S(n) - a_1$. Причём если $a_{100} + a_1 < 10$, то $a_{100} + a_1 > a_1$ (и нет переноса) и $S(mn) > S(n)$. $\Rightarrow a_{100} + a_1 \geq 10$.

Пусть на a_1 (первую цифру числа $10^{99}n$) нет переноса (иначе $a_1 = 9$, а это значит, что $n \geq 9 \cdot 10^{99}$) ~~а мы ищем min~~. Тогда здесь все цифры — 0. Но тогда перенос на a_1 есть (т.к. $a_{100} + a_1 \geq 10$).

Заметим, что $n = \cancel{8} 10^{100} - 1$ — подходит.

(т.к. при прибавлении к числу $(10^{100}-1)$ сумма не меняется (можно заметить, прибавляя 10^{100}, а затем вычитая 1), смотря, что происходит с переносами).

Ответ: $10^{100} - 1$.