0 579125 310009

57-91-25-31
(40.26)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4 +1 мет: ~~7~~

Место проведения Москва 14^{51} – 14^{53}
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мешкова Романа Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» 02 2024 года

Подпись участника
Мешков

57-91-25-31

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	12	12	12	12	12	12	100

57-91-25-31
(40.26)

Черновик

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-10|=(x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$$

100 (СТО)

$(x-1)(y+2)>0$

$72 \times 28 = 576 + 144 = 2016$

1) $xy+2x-y-2>0$

$|y-x-10|=x-4$

$\sqrt{y-x+8}=y-5$

$x\ge 4$, $y\ge 5$

~~$y-x+8=$~~

$$\begin{cases}(y-x-10)^2=(x-4)^2 \\ y-x+8=(y-5)^2\end{cases}$$

$y-x-10\ge 0$

$y-x-10=x-4$

$y=2x+6$

$g(0)=\frac{1-2^{12}}{2^{12}}$

$g(0)=\frac{2^{12}-1}{2^{12}}$

$y\ge x+10$, $x\ge 4$

$\sqrt{x+14}=2x+1$

$16 \times 13 = 48 + 16 = 208 + 9 = 217$

$\frac{g(0)}{l}=\frac{1}{2^{12}}$

$x+14=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot4\cdot13}}{8} \Rightarrow x=\sqrt{}$

$g(x)=\frac{l-1}{2^{12}}-1$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$

$x=2+k$

$$\boxed{g(x)=\frac{l-2^{12}+1}{2^{12}}}$$

$\frac{2}{k}=t$

$f\left(\frac{4+k}{k}\right)=\frac{2}{k}$

$2t+1=l$

$|g(0)|$

$2^{12}-1$

$t=\frac{l-1}{2}$

$f(2t+1)=t$

$l=2^{12}-1$

$f(l)=\frac{l-1}{2}$

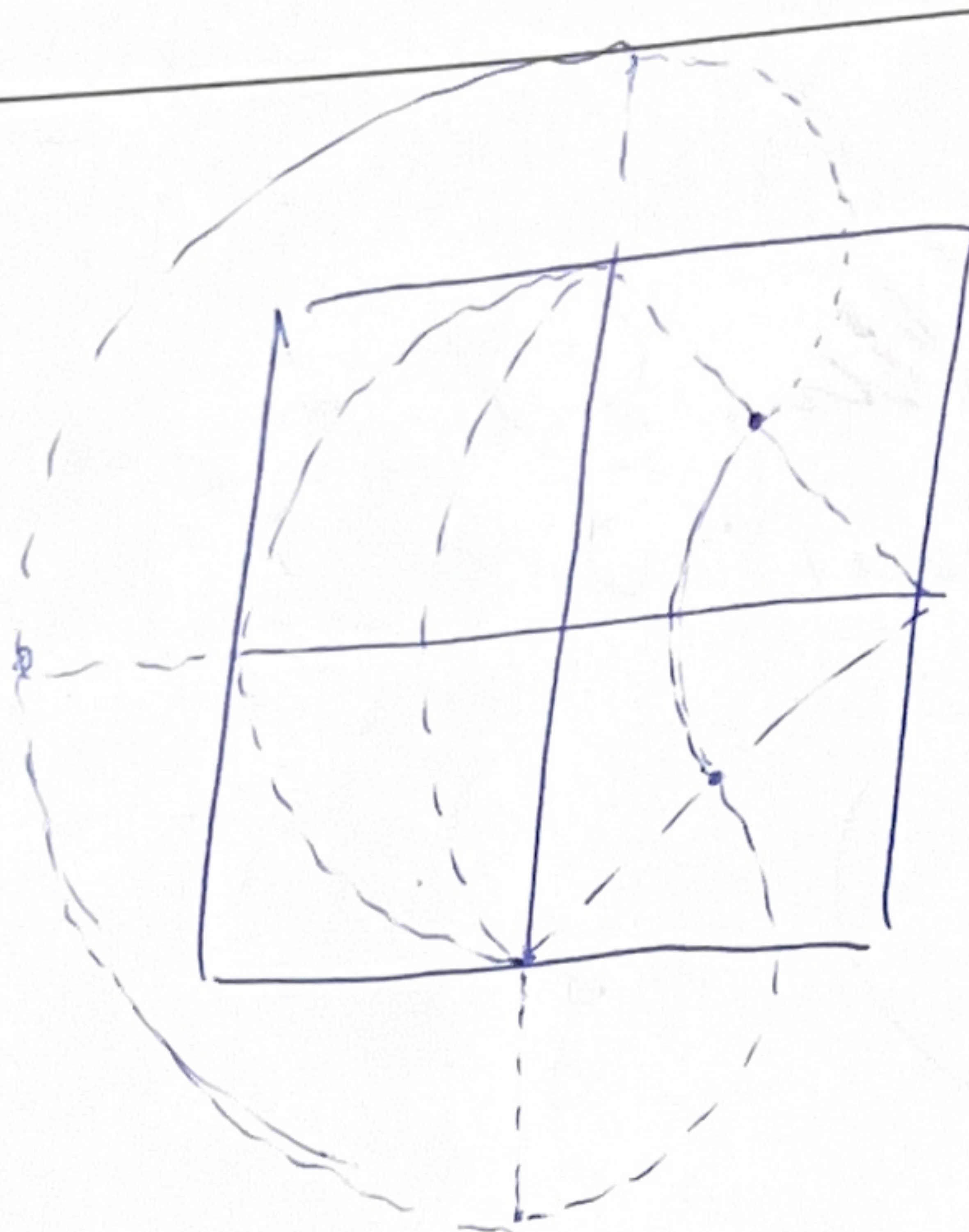
$f(f(l))=\frac{\frac{l-1}{2}-1}{2}=$

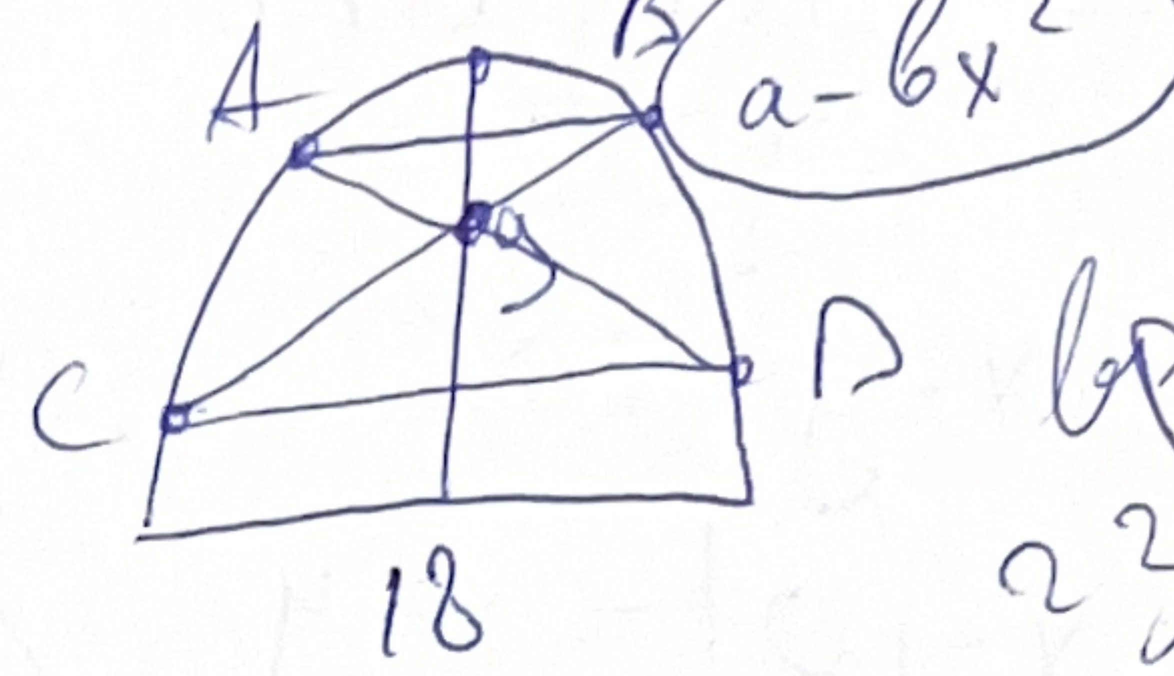
$f(f(f(l)))=\frac{\frac{l-3}{4}-1}{2}=$

$=\frac{l-3}{4}$

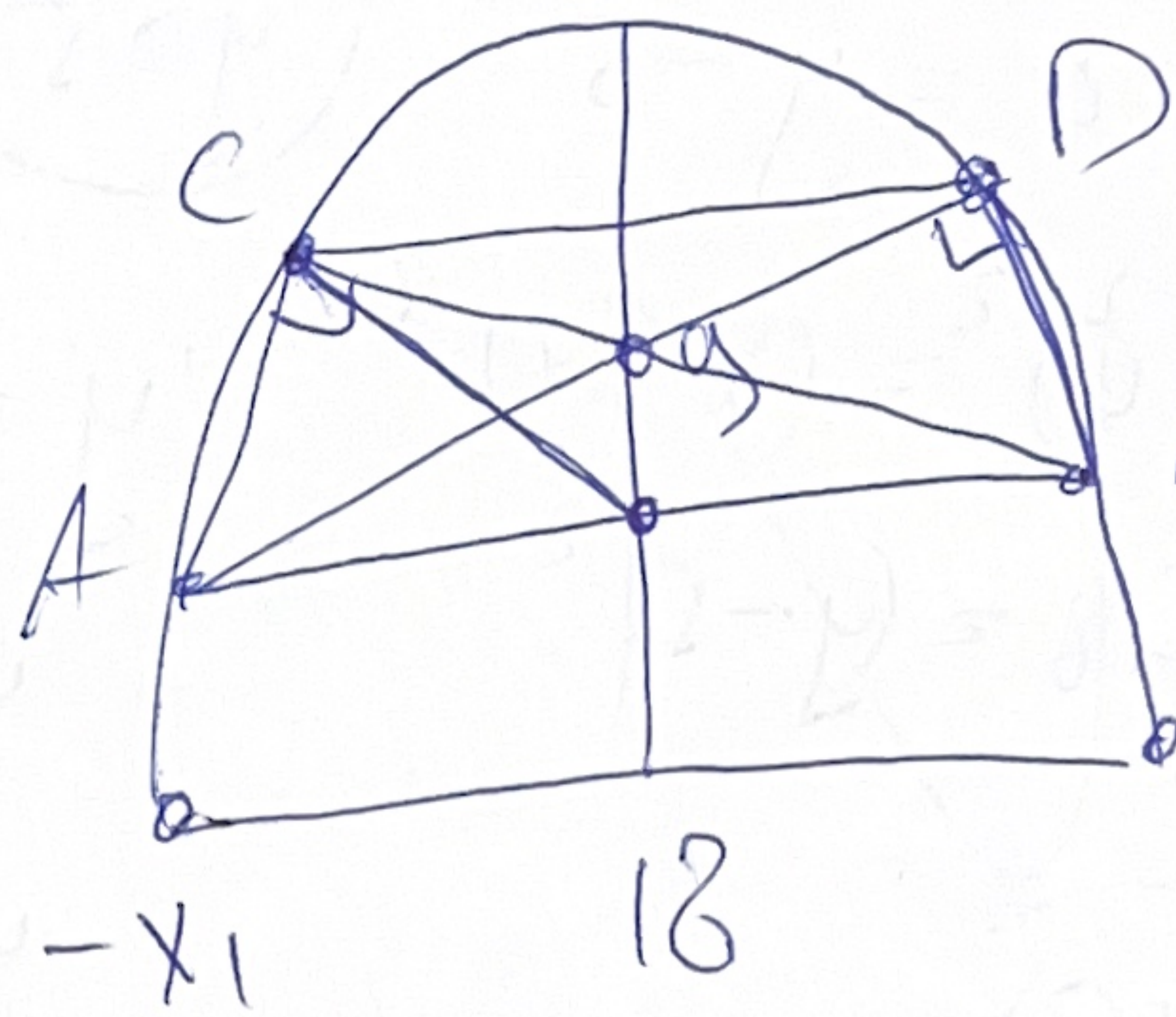
$=\frac{l-7}{8}\ \dots$

Черновик

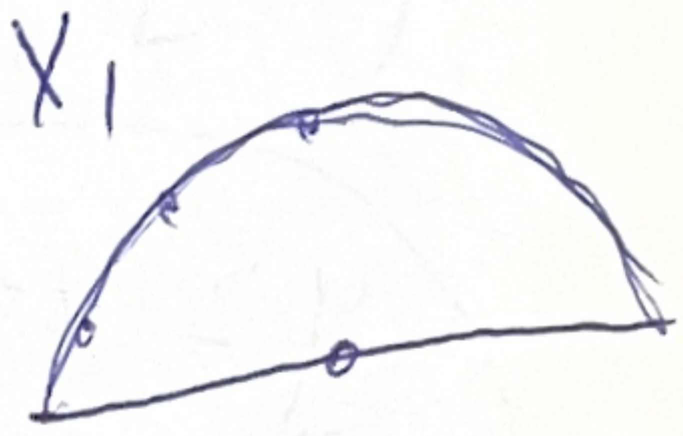




вра
2 зап
3 кап



Вело
2врат
4 зап
7 кап
3 унив.



$2x_1 = 18$

$x_1 = 9$

$y = a - bx^2$

$\cancel{a - 9b}$ $\quad a - 81b = 0 \qquad b = \frac{1}{9}$

$y = 81b = 9$

$y = 81b - bx^2$

$y = 9 - \frac{x^2}{9}$

$81q^2 - 729q = x_1x_2$

$-(81 - 18q) = x_1 + x_2$

$x_1x_2 = 81q^2 - 729q \quad = \alpha q\left(\frac{81}{\alpha}q - \frac{729}{\alpha}\right)$

$x_1 + x_2 = 18q - 81$

$\frac{729}{\alpha} = 81 \qquad \alpha = 9$

$x_1 = 9q$

$x_2 = 9q - 81$

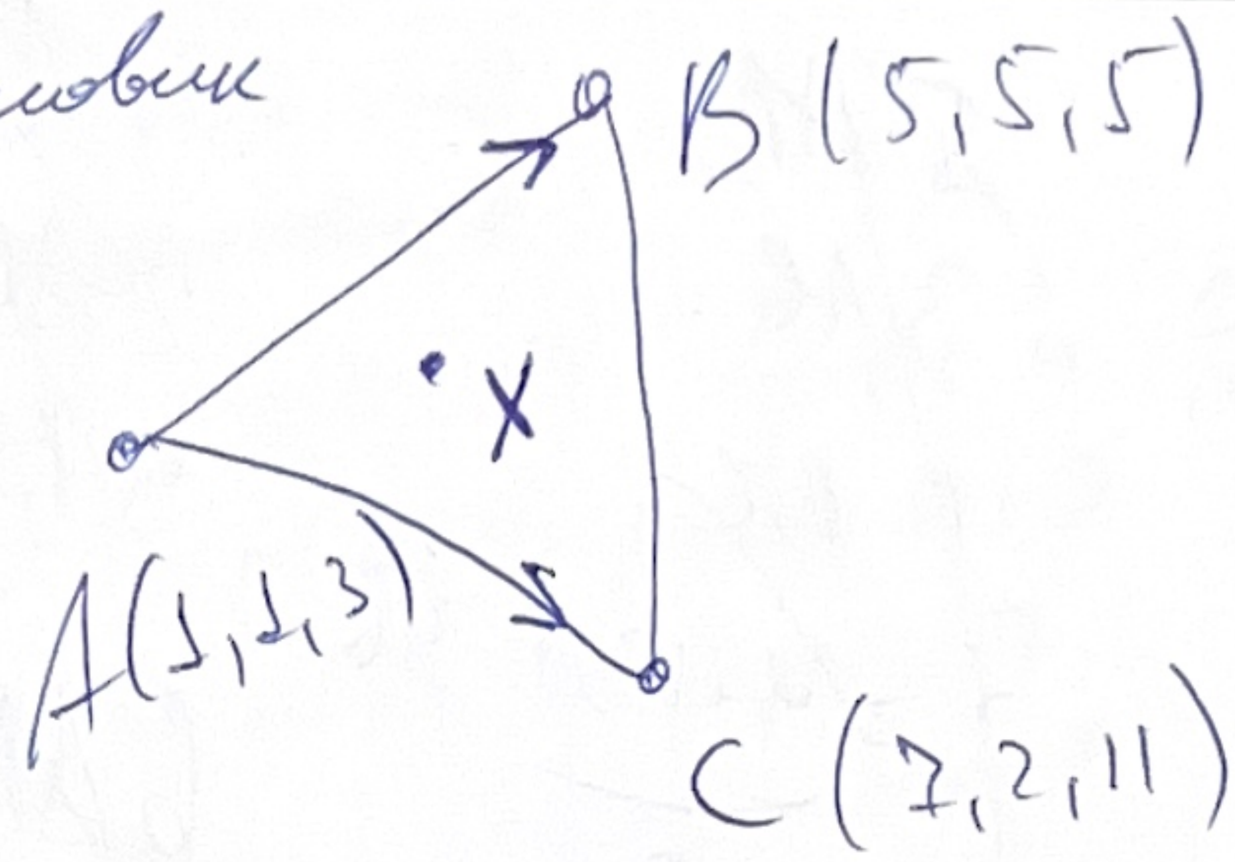
$S(n)$ – сумма цифр числа $n \in \mathbb{N}$

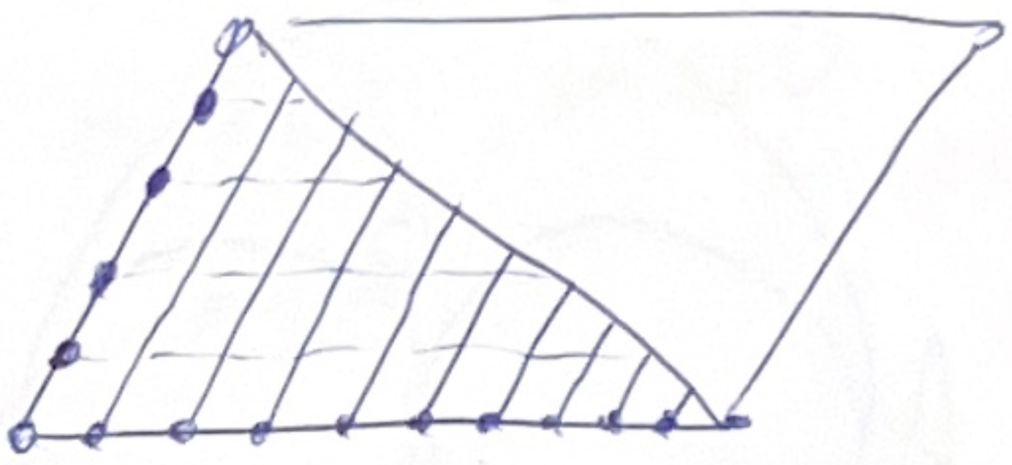
$\max n = \overline{a_1 \ldots a_{90}} \qquad a_1 \neq 0:$

$\forall m \in \mathbb{N}: (1 \leq m \leq n): S(mn) = S(n)$

57-91-25-31 (40.26)

Черновик





$\overline{AC}\ (6,1,8)\quad \alpha_1$

$\overline{AB}\ (4,4,2)\quad \alpha_2$

$X(1+6\alpha_1+4\alpha_2,\ 1+\alpha_1+4\alpha_2,\ 3+8\alpha_1+2\alpha_2)$

$6\alpha_1+4\alpha_2\in\mathbb{Z}$

$\alpha_1+4\alpha_2\in\mathbb{Z}$

$8\alpha_1+2\alpha_2\in\mathbb{Z}$ $\qquad 16\alpha_1+4\alpha_2\in\mathbb{Z}$

$15\alpha_1\in\mathbb{Z}$

95 минут

$6\alpha_1+24\alpha_2$

$20\alpha_2\in\mathbb{Z}$ $\qquad 5\alpha_1\in\mathbb{Z}$

$13\equiv_5 3\quad a$

$19\equiv_5 4\quad b$

$8\alpha_1+32\alpha_2\in\mathbb{Z}$

$\alpha_2=\frac{p}{q}$

$30\alpha_2\in\mathbb{Z}$ $\qquad 10\alpha_2\in\mathbb{Z}$

$k\alpha_1,\quad k\in\mathbb{Z}$

$k=\frac{t}{5},\ t\in\mathbb{Z}\quad \alpha_1\quad 0,1,2,3,4,5$

$m\alpha_2=\frac{n}{10},\ n\in\mathbb{Z}\quad \alpha_2\quad 0,1,2,\dots,10$

$6\cdot 11=66$

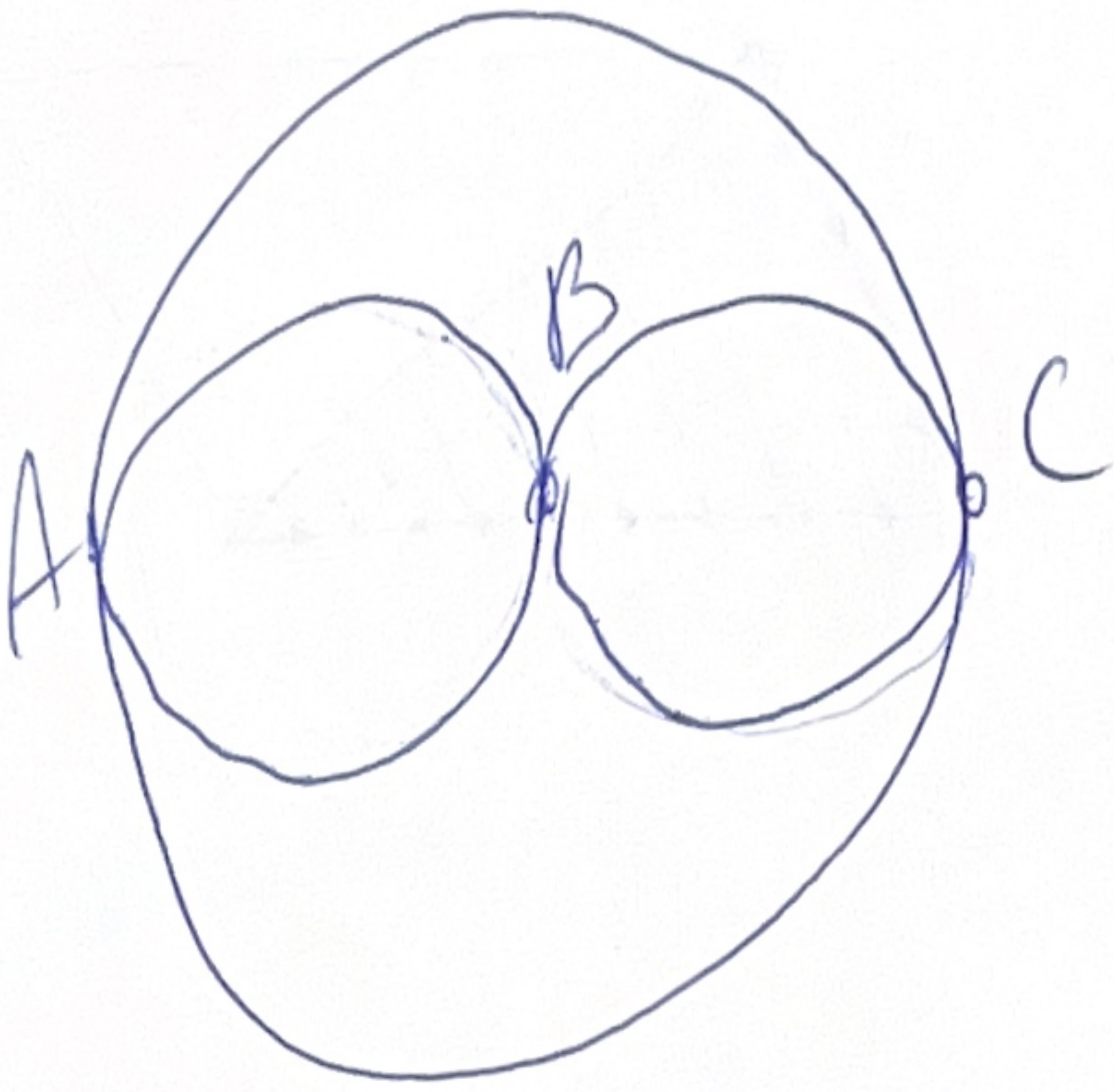
$3a+4$

$3a+4b\ \vdots\ 5$

$b\le 4$

$b=0\quad a=0$ или $a=5$

$b=1$



~~8 AB~~
~~3 AC~~
~~1 BC~~
~~$\Sigma = 4+13+38$~~
~~52~~

~~1 AB~~
~~2 AC~~
~~4 BC~~

6 AB
10 AC
5 BC

$S(mn) = S(n)$

для $\forall\, 1 \le m \le n$

$S(n) = S(n^2) = S(n^2 - n)$

$(10^k - 1)m = m0\ldots0 - m$

$(m-1)0\ldots0 + q = 9k$

57-91-25-31
(40.26)

Черновик №8

Продолжение:

α_1 и $\alpha_2 \le 1 \Rightarrow \frac{n}{5} \le 1$ и $\frac{m}{10} \le 1 \Rightarrow n \le 5,\ m \le 10$ $\quad m,n \ge 0$

$m+3n \vdots 5$

$n=0 \Rightarrow m \vdots 5 \Rightarrow m=0,5,10$

$n=1 \Rightarrow m+3 \vdots 5 \Rightarrow m=2,7$

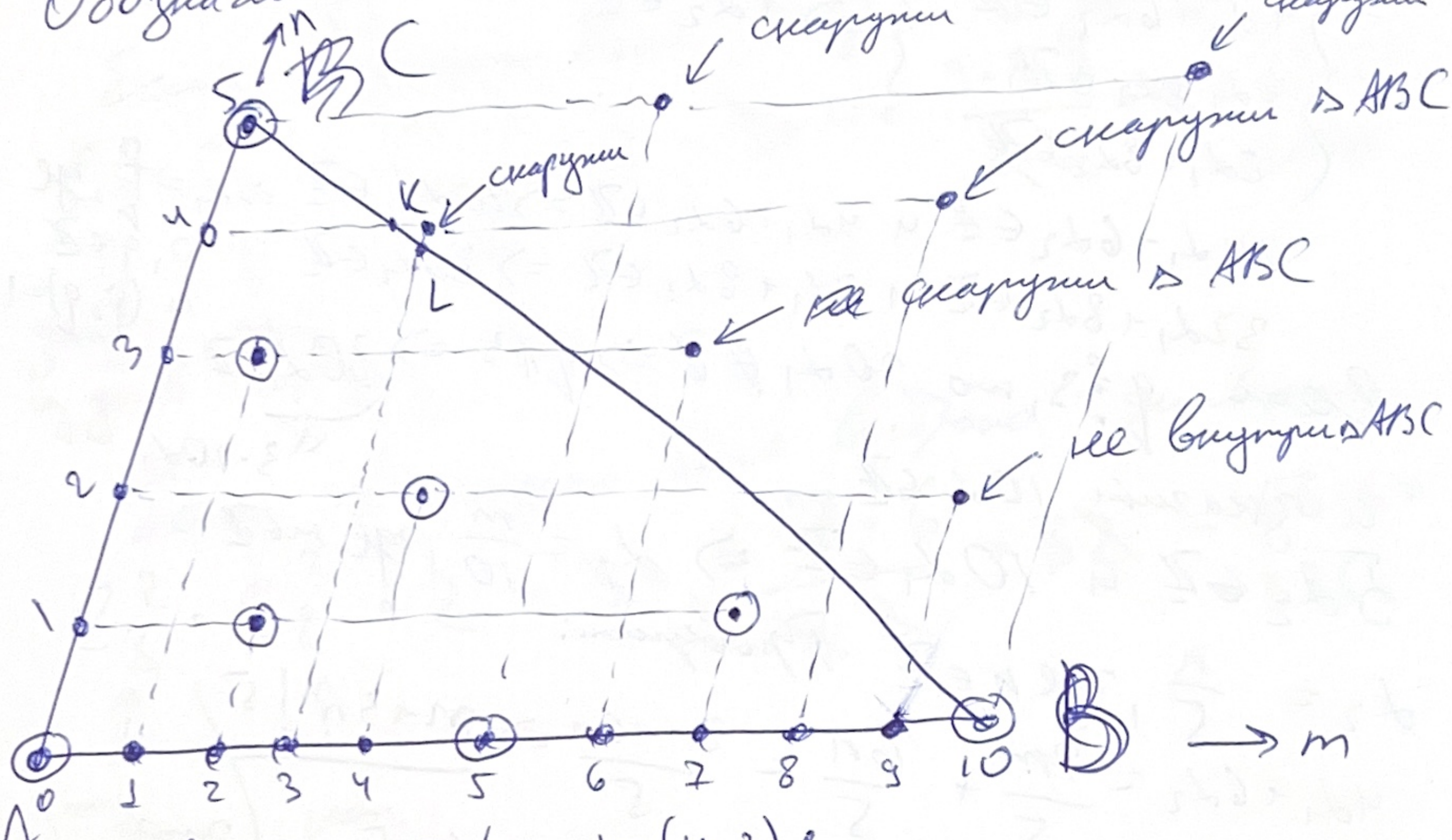
$n=2 \Rightarrow m+1 \vdots 5 \Rightarrow m=4,9$

$n=3 \Rightarrow m+4 \vdots 5 \Rightarrow m=1,6$

$n=4 \Rightarrow m+2 \vdots 5 \Rightarrow m=3,8$

$n=5 \Rightarrow m \vdots 5 \Rightarrow m=0,5,10$

Обозначим эти точки на рисунке:



проверим для $(n,m)=(4,3)$:

пр $\parallel AB \cap CB$ в т K: по т Фалеса $\frac{CK}{CB}=\frac{1}{5}$

пр $\parallel AC \cap CB$ в т L: по т Фалеса $\frac{BL}{BC}=\frac{7}{10}$

$\Big\} \Sigma < BC$

А значит точка вышла за сторону

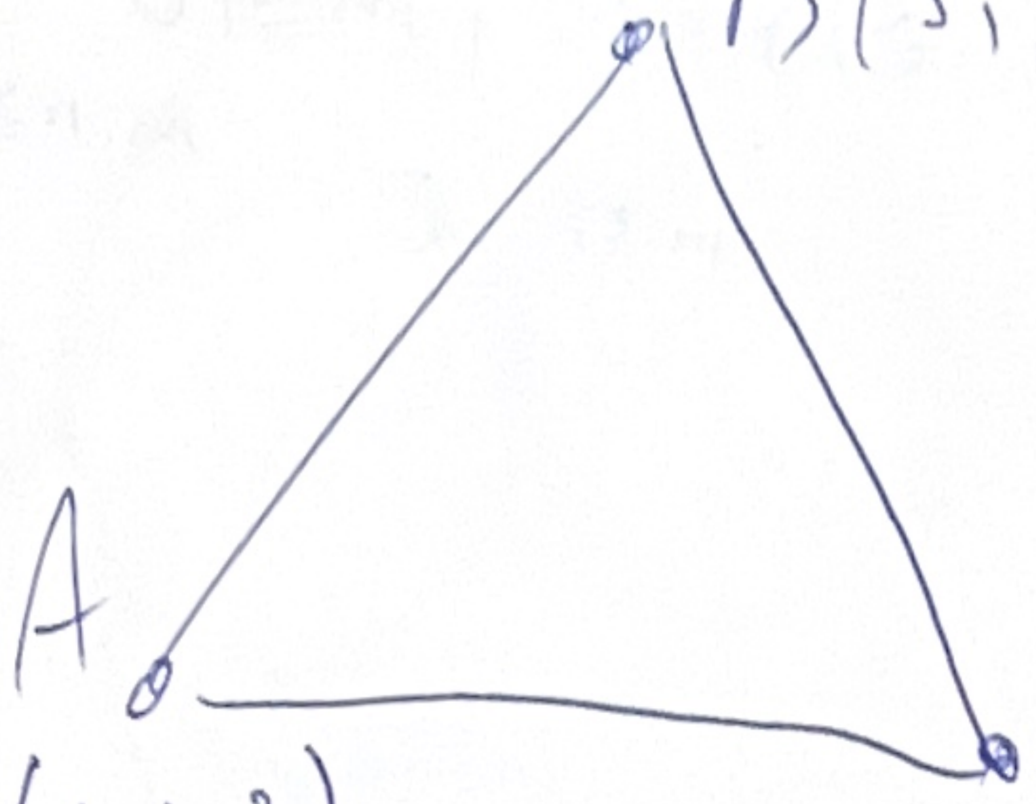
(Этим способом легко проверить где лежит точка)

Всего точек: 8

Ответ: 8 точек;

Чистовик №8

$B(5,5,5)$



A

$(1,1,3)$ $\quad C(7,2,11)$

$\overline{AB}\{4,4,2\}$

$\overline{AC}\{6,1,8\}$

Если $X \in ABC$, то

$X = A + \alpha_1 \overline{AB} + \alpha_2 \overline{AC}$

$\forall X:\ X(1+4\alpha_1+6\alpha_2,\ 1+4\alpha_1+\alpha_2,\ 3+2\alpha_1+8\alpha_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_1+6\alpha_2 \in \mathbb{Z} \\ 4\alpha_1+\alpha_2 \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha_1+8\alpha_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\alpha_2 \in \mathbb{Z}$

$24\alpha_1+6\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ и $4\alpha_1+6\alpha_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 20\alpha_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ и $(p,q)=1$

$32\alpha_1+8\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ и $2\alpha_1+8\alpha_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 30\alpha_1 \in \mathbb{Z}$

Если $q \,\vdots\, 3$, то $20\alpha_1 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow q \nmid 3 \Rightarrow \underbrace{30\alpha_1 \in \mathbb{Z}}_{\text{и } 3\cdot 10\alpha_1}$

а значит $10\alpha_1 \in \mathbb{Z}$

$5\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ и $10\alpha_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{m}{10}$, где $m \in \mathbb{Z}$

$\alpha_2 = \frac{n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$ Проверим:

$4\alpha_1+6\alpha_2 = \frac{2m}{5} + \frac{6n}{5} = \frac{2m+6n}{5} \Rightarrow m+3n \,\vdots\, 5$

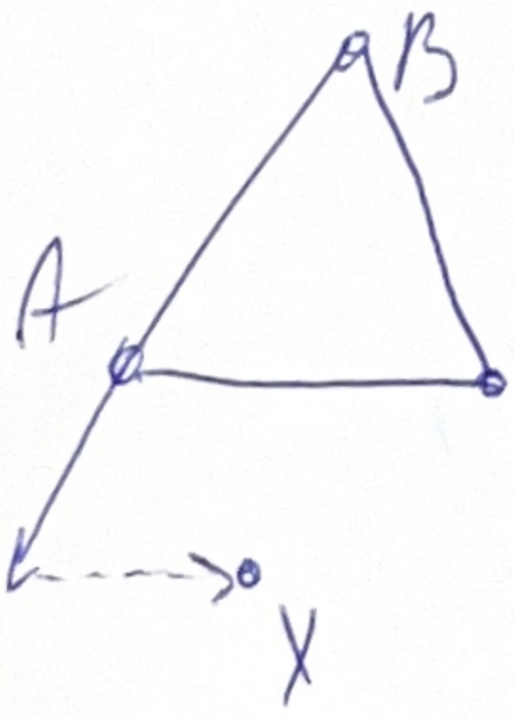
$4\alpha_1+\alpha_2 = \frac{2m+n}{5} \Rightarrow 2m+n \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow 2m+6n \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow m+3n \,\vdots\, 5$

$2\alpha_1+8\alpha_2 = \frac{m+8n}{5} \Rightarrow m+3n \,\vdots\, 5$

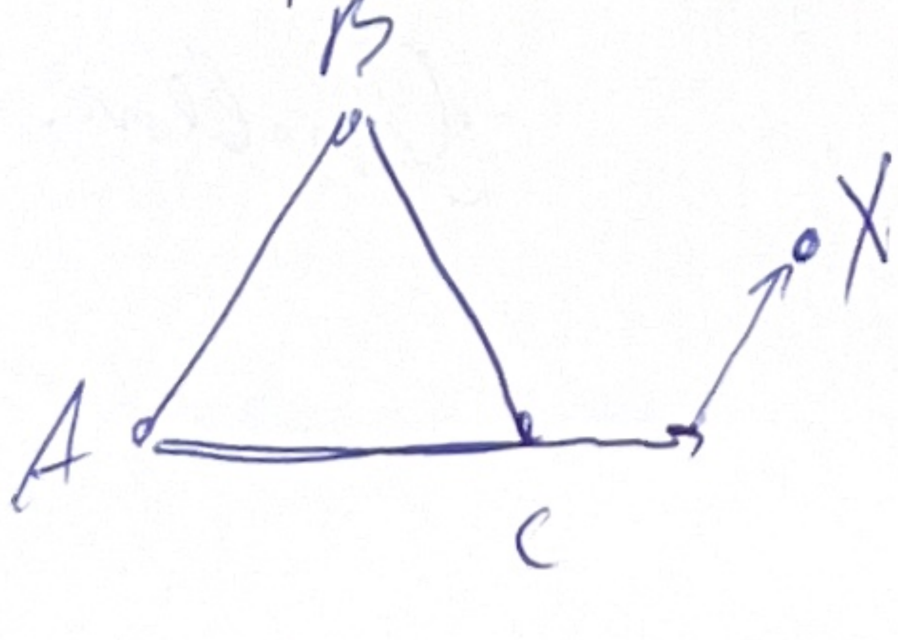
Это равносильные делимости

$\Rightarrow m+3n \,\vdots\, 5$

m и $n \geq 0$, иначе X вне $\triangle ABC$:



и $\cancel{m, n}$ $\alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ иначе X вне $\triangle ABC$:



Гитович

№1

Нужно: 1 врат
2 защ
3 нап

Всего: 2 врат
4 защ
7 напад
3 унив (защ / нап)

Вратаря всего 2 способами:

Если в защит было выбрано 0 унив:

$$\underbrace{C_4^2}_{\text{защ}} \cdot \underbrace{C_{10}^3}_{\text{напад}} \cdot \underbrace{2}_{\text{врат}} = \frac{\cancel{4}\cdot 3}{1\cdot\cancel{2}} \cdot \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 2}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 1440$$

Если в защит был выбран 1 универсал:

$$\underbrace{C_3^1}_{\text{защ из унив}} \cdot \underbrace{C_4^1}_{\text{защ из защ}} \cdot \underbrace{C_9^3}_{\text{нап}} \cdot 2 = \cancel{3}\cdot 4\cdot \frac{9\cdot 8\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = 72\cdot 28 = 2016$$

Если в защит было выбрано 2 универсала:

$$\underbrace{C_3^2}_{\text{защ из унив}} \cdot \underbrace{C_8^3}_{\text{нап}} \cdot 2 = \cancel{3}\cdot \frac{8\cdot 7\cdot 6}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} \cdot \cancel{3}\cancel{2} = 56\cdot 6 = 336$$

Считаем:

$$\begin{array}{r} 2016 \\ +\ 336 \\ \hline 2352 \\ +\ 1440 \\ \hline 3792 \end{array}$$

Ответ: 3792 способа;

Чистовик №6 Продолжение:

$x^4+x^2(81-18q)+81q^2-729q=0$

Мы хотим найти расстояние от AB до CD, и у нас $\triangle KTD$: $TK^2=KD^2-TD^2=$

$=(9-t)9-x^2$

$(x^2-9q)(x^2-(9q-81))=0$

$x^2=9q$ или $x^2=9q-81$

$x^2=9(9-t)$ или $x^2=9(9-t)-81$

$\Downarrow$

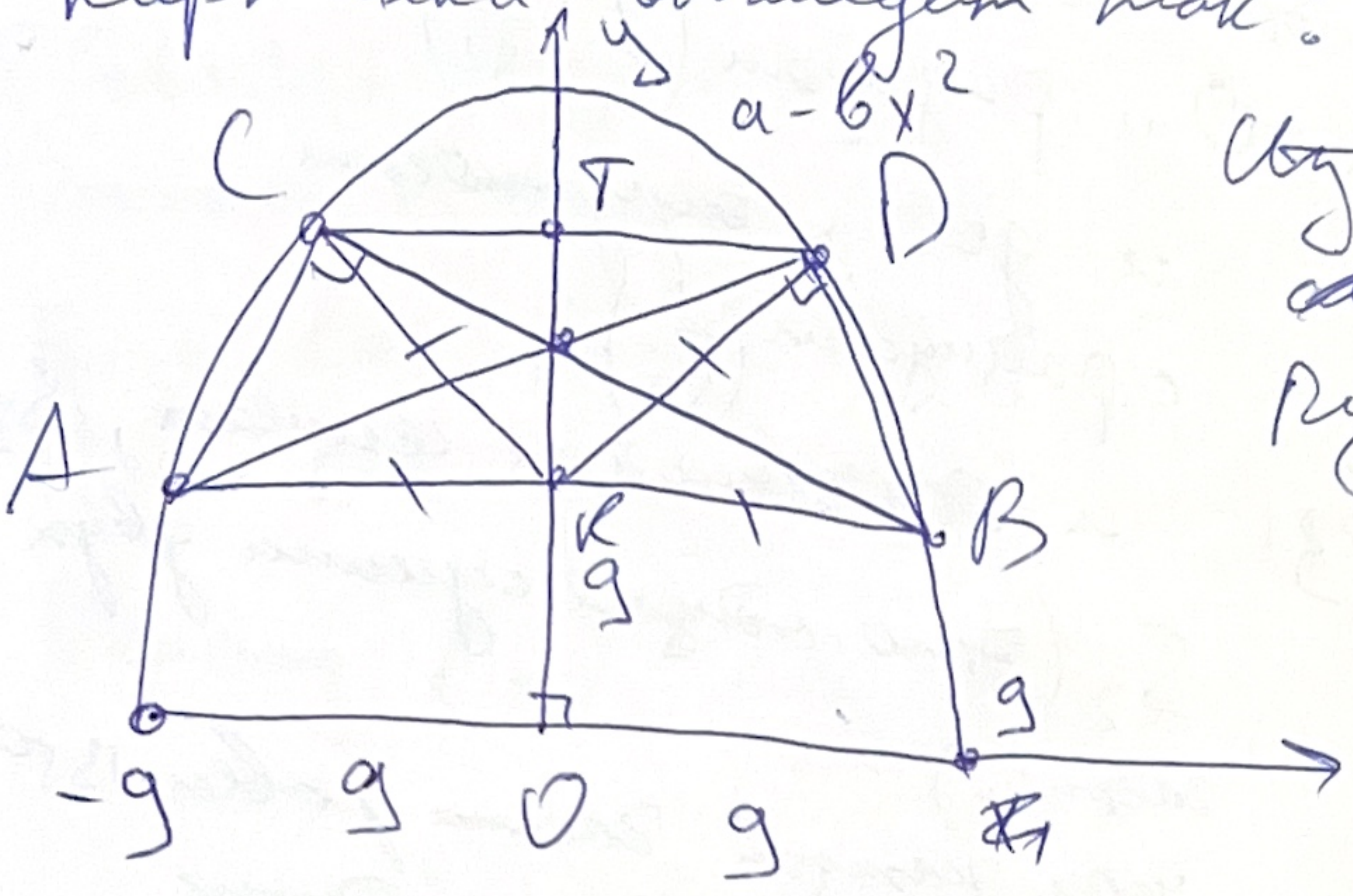
$TK^2=0 \Rightarrow$ это решение для точек A и B (то есть мы нашли все пересечения окружности с центром в T K и радиусом KD, а это A, B, C, D)

$TK^2=81 \Rightarrow TK=9$

Ответ: 9

Листовик №6

Картинка выглядет так:



~~Из симметрии следует~~

Пусть O начало координат (без ограничения общности) Тогда из симметрии следует, что

Ординаты A и B равны, а сумма абсцисс равна 0, тоже верно для C и D.

Кроме того, корни $a-bx^2$ это ± 9

$\Rightarrow a-81b=0 \Rightarrow a=81b \Rightarrow y=81b-bx^2$;

$y(0)=9 \Rightarrow 81b=9 \Rightarrow b=\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{y=9-\frac{x^2}{9}}$

Из симметрии также следует, что $AD \cap BC$ на оси ординат, Пусть K — середина AB, тогда $K \in$ оси ординат; т.к. $\angle ACB=\angle ADB=90°$, то ACDB — вписанный и K — центр окружности; Пусть $K(0;t) \Rightarrow A(-x_a;t), B(x_b;t)$

$9-\frac{x_a^2}{9}=t \Rightarrow \sqrt{(9-t)9}=x_a,\ x_b=\sqrt{(9-t)9}$;

$\Rightarrow KB=KA=\sqrt{(9-t)9}=KC=KD$

Пусть $D(x;y)$, тогда $KD=\sqrt{(y-t)^2+x^2}$ $(x>0)$

$\Rightarrow (9-t)9=(y-t)^2+x^2;\ y=9-\frac{x^2}{9} \Rightarrow$

$(9-t)9=\left(9-t-\frac{x^2}{9}\right)^2+x^2$; Пусть $9-t=q$

$9q=\left(\frac{x^2}{9}-q\right)^2+x^2=x^2+\frac{x^4}{81}-\frac{2qx^2}{9}+q^2$

$\Rightarrow \frac{x^4}{81}+x^2\left(1-\frac{2q}{9}\right)+q^2-9q=0$

~~Тогда~~ $\cancel{x^2=\frac{\frac{2q}{9}-1\pm\sqrt{\left(1-\frac{2q}{9}\right)^2-\frac{4}{81}(q^2-9q)}}{\frac{2}{81}}}$

Чистовик № 2 (продолжение)

Побьем картинку на понятные части:

Полукр. с центром в т. O и радиусом $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

и две ½ окружности с радиусом $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

и оставшийся сегмент; (S_3)

S_2 (это общая сумма двух частей)

угол каждой части равен 135°

Тогда при совмещении этих частей получится $\frac{3}{4}$ окружности:

$S_2 = \frac{3}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3\pi}{8}$; $S_1 = \frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)^2}{4}$

S_3 — это площадь Δ − площадь части окружности

$S_\Delta = \frac{1\cdot 2}{2}$ ($h=1$, осн $=2$)

$S_3 = S_\Delta - S_0 = \frac{1\cdot 2}{2} - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{8}$

S_0 — четвертинка окружности с радиусом $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$S_1+S_2+S_3 = \frac{3\pi}{8}+1-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{\pi}{4}+1+\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+1)^2 =$

$= \frac{\pi}{4}(4+2\sqrt{2})+1 = \pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1$;

Ответ: $\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1$

Чистовик №5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$; Пусть $x=2+k$: $f\left(\frac{4+k}{k}\right)=\frac{2}{k}$; Пусть $\frac{2}{k}=t$:

$f(2t+1)=t$; Пусть $2t+1=l \Rightarrow t=\frac{l-1}{2} \Rightarrow f(l)=\frac{l-1}{2}$;

Покажем по индукции, что $\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots}_{l}=\frac{x-2^l+1}{2^l}$

База: $l=1$: $f(x)=\frac{x-1}{2}$

ПЧ: $l=k$: $\underbrace{f(\ldots f(}_{k}x)\ldots)=\frac{x-2^k+1}{2^k}$

Переход: $l\to l+1$: $\underbrace{f(\ldots f(x)\ldots)}_{k+1}=f\left(\frac{x-2^k+1}{2^k}\right)=\frac{\frac{x-2^k+1}{2^k}-1}{2}=$

$=\frac{x-2^k+1-2^k}{2^{k+1}}=\frac{x-2^{k+1}+1}{2^{k+1}}$; Доказано;

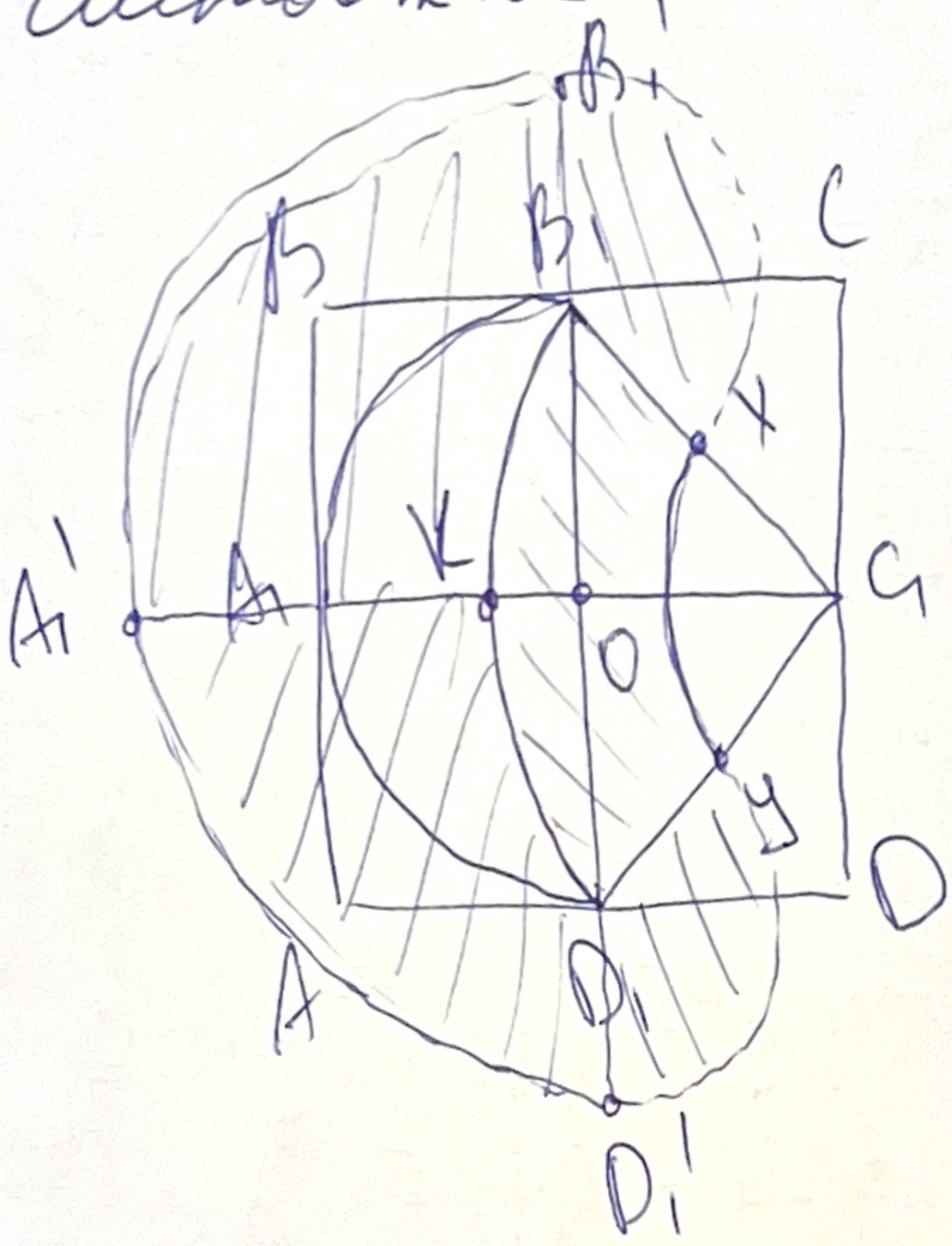
Тогда $g(x)=\frac{x-2^{12}+1}{2^{12}}$; $g(x)$ – линейная функция;

$\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона равен коэф при x;

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2^{12}}$; Касательная совпадает с $g(x)$;
т.к. $g(x)$ – линейная

Ответ: $\frac{1}{2^{12}}$

Чистовик №2



$\frac{\sqrt{2}}{2}$ – это половина диагонали в квадрате 1×1

Тогда очевидно, что точки на $\smile B_1D_1$ расплывутся до $\smile XY$ окружности с центром в C_1

Точки на $\smile B_1A_1D_1$ расплывутся вточки до $\smile B_1'A_1'D_1'$ окружности с центром в O;

И ещё две угловые части окружностей с центрами в точках D_1 и B_1; Требуется найти площадь заштрихованной фигуры;

Чистовик №3

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-10|=(x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$$

1) $xy+2x-y-2>0 \Rightarrow \begin{cases}|y-x-10|=(x-4) \\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$ $\quad x\geq 4$, $y\geq 5$, $y\geq x-8$

$(x-1)(y+2)>0$

если $y-x-10\geq 0$, то $\begin{cases}y=2x+6 \\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$ и $x\geq 4$

Тогда $\sqrt{x+14}=2x+1 \Rightarrow x+14=4x^2+4x+1 \Rightarrow 4x^2+3x-13=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 4\cdot 13}}{8}$, $x\geq 4 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8} \Rightarrow x\leq \frac{\sqrt{217}-3}{8}<\frac{15-3}{8}<4$

если $y-x-10<0$, то $x+10-y=x-4 \Rightarrow y=14$

и $4<x$ и $\sqrt{22-x}=9 \Rightarrow 22-x=81 \Rightarrow x<0$. Противоречие

2) $xy+2x-y-2<0 \Rightarrow \begin{cases}|y-x-10|=4-x \\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases} \Rightarrow y\geq 5$ и $4\geq x$

$(x-1)(y+2)<0$ $\Rightarrow x<1$ и $y\geq 5$

если $y\geq 5$, то $y+2>0 \Rightarrow x-1<0$

если $y-x-10\geq 0$, то $y-x-10=4-x \Rightarrow y=14$

$\Rightarrow \sqrt{22-x}=9 \Rightarrow 22-x=81 \Rightarrow \boxed{x=-59 \text{ и } y=14}$

если $y-x-10<0$, то $x+10-y=4-x \Rightarrow y=2x+6$

Тогда $\sqrt{x+14}=2x+1 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$ и $x<1$

$\Downarrow$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$

$x=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}<\frac{-3-14}{8}<-\frac{1}{2}$; $x=\frac{\sqrt{217}-3}{8}>\frac{14-3}{8}>1$

Тогда эти случаи не подходят

3) $xy+2x-y-2=0 \Rightarrow (x-1)(y+2)=0$

и $\sqrt{y-x+8}=y-5 \Rightarrow y\geq 5$

Тогда $y+2>0$

Значит, $x=1$; $\sqrt{y+7}=y-5 \Rightarrow y+7=y^2-10y+25$

$\Rightarrow y^2-11y+18=0 \Rightarrow (y-9)(y-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2 \\ y=9\end{array}\right. \Rightarrow y=9$

Тогда $(x,y)=(-59;14)$ или $(1;9)$

57-91-25-31
(40.26)

Чистовик
№4

Пусть AB – x раз, AC – y раз, BC – z раз

Тогда общее время равно: $5x + 19y + 13z = 95$

Заметим, что $x, y, z \geq 0$ и $y \leq 5$, т.к. $19 \cdot 5 = 95$;

Если $y = 5$, то $x = z = 0$, но тогда он нечетное число раз проехал по окр. с диаметром AC $\Rightarrow$ оказался в т. C. Противоречие $\Rightarrow y \leq 4$;

Посмотрим по mod 5: $4y + 3z \vdots 5$

Если $y = 4$, то $1 + 3z \vdots 5 \Rightarrow z \equiv_5 3 \Rightarrow z \geq 3$

Тогда $\Sigma \geq 19 \cdot 4 + 13 \cdot 3 > 95$. Противоречие

Если $y = 3$, то $2 + 3z \vdots 5 \Rightarrow z \equiv_5 1$; Если $z \geq 6$, то $\Sigma \geq 3 \cdot 19 + 6 \cdot 13 > 95 \Rightarrow z = 1$ и $y = 3 \Rightarrow$

$5x = 95 - \underbrace{3 \cdot 19}_{57} - 13 = 95 - 70 = 25 \Rightarrow \underline{x = 5}$

Такой вариант возможен: $z = 1$ $y = 3$ $x = 5$

Сначала 2 круга по окр с диаметром AB, пришли в т A, теперь едем по AB до B, потом по BC до C, потом до A по CA и еще полный круг по окр с диаметром AC;

Если $y = 2$, то $3 + 3z \vdots 5 \Rightarrow z \equiv_5 4$, тогда при $z \geq 9$ $\Sigma \geq 9 \cdot 13 + 2 \cdot 19 > 95$ $\perp$ $\Rightarrow z = 4$, тогда $\Sigma = 5x + \underbrace{38 + 52}_{90} \Rightarrow x = 1$

$x = 1, y = 2, z = 4$; Тогда от т A будет конфигурировать 3 раза, то есть нечетное, а чтобы вернуться мы должны побывать в ней четное число раз. Противоречие;

Если $y = 1$, то $4 + 3z \vdots 5 \Rightarrow z \equiv_5 2$; если $z \geq 7$, то $\Sigma \geq 7 \cdot 13 + 19 > 95. \Rightarrow z = 2$; тогда $5x = 95 - 19 - 26 = 50$

$x = 10$;

Тогда $x + y = 11 \Rightarrow$ в A побываем нечетное число раз. Противоречие.

Если $y = 0$, то $z \vdots 5 \Rightarrow z = 0$ или $z = 5$, при $z \geq 10$ $\Sigma > 95$;

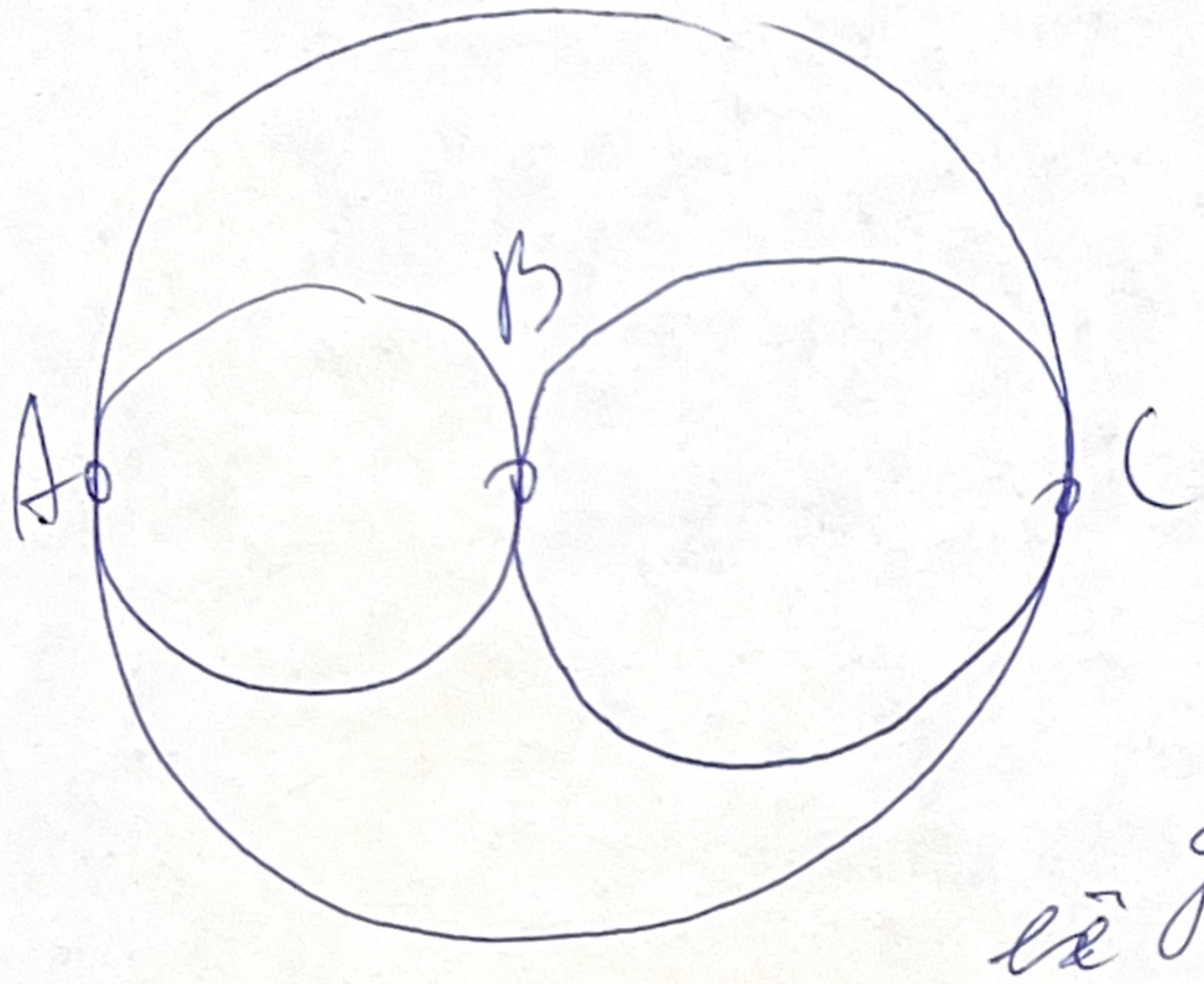
Чистовик
№4

Продолжение;

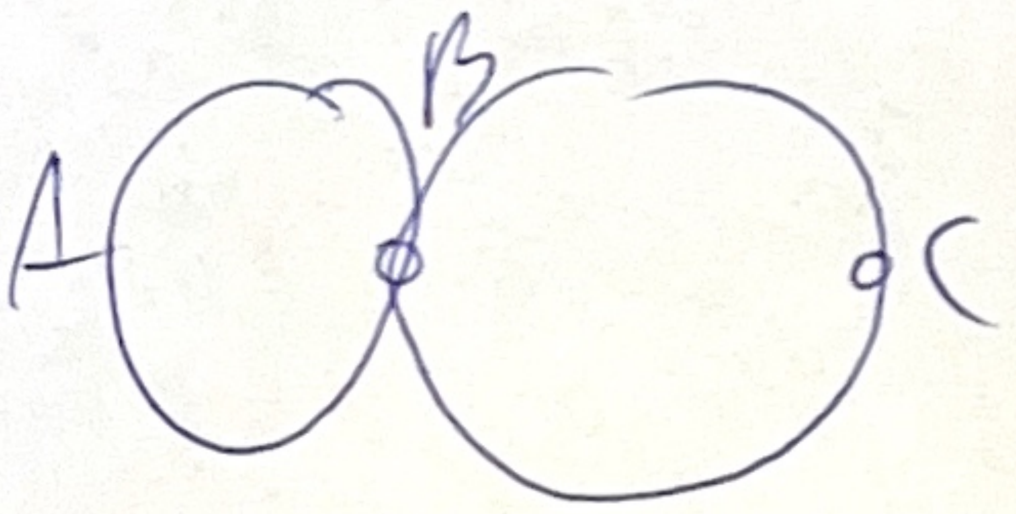
Если $y=z=0$, то
$5x=95 \Rightarrow x$ – нечетное, тогда
$x+y=x$ – нечетное, то есть
в A побываем нечетное число раз. Противоречие;

Если $y=0$, $z=5$, тогда
$5x=95-65=30 \Rightarrow x=6$;
$y=0$, $z=5$, $x=6$;

6 AB
0 AC
5 BC



Тогда мы катались только по внутренним окружностям;



Значит, если мы начали не на BC, то должны были проехать её полностью несколько раз, т.к. с BC на AB можно перейти только через т. B $\Rightarrow$ количество поездок по BC должно $\vdots 2$, но 5 – нечетное $\Rightarrow$ этот случай не возможен;

Тогда возможен только 1 случай:

5 – AB
3 – AC
1 – BC

Пусть $AB=x$, $BC=y$, тогда $AC=x+y$

$\smile AB=\pi r=\frac{\pi x}{2}$ $\smile AC=\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\smile BC=\pi r=\frac{\pi y}{2}$ $\Rightarrow \smile AC=\smile AB+\smile BC=$

тогда $\smile AC=40$км, $\smile AB=13$км, $\smile BC=27$км $=40$км

$S=\underbrace{5\cdot 13}_{65}+\underbrace{3\cdot 40}_{120}+\underbrace{27}_{27}=212$ км;

Ответ: 212км;

Чистовик

№ 7

Таких n нет;

Надо просто понять:

1) $\exists$ очень мало n: $\forall 1 \le m \le n$ верно $S(mn)=S(n)$

2) n сверху ограничено

~~Давайте~~ Попробуем как-то понять про n:

$\forall 1 \le m \le n$ верно $S(mn)=S(n)$

Пусть n – k значное: $\overline{a_1 \dots a_k}$ возьмем $m=$

$=1\underbrace{0\dots0}_{k-2}1$, если $n \ne 1\underbrace{0\dots0}_{k-1}$, то такое

m есть; Но $n \ne 1\underbrace{0\dots0}_{k-1}$, т.к. при $m=2$

$S(20\dots0) \ne S(10\dots0) \Rightarrow n \ge 1\underbrace{0\dots0}_{k-2}1$

$n=\overline{a_1 \dots a_k}$; Пусть $a_2+\dots+a_k=t$

$S(10\dots01 \cdot n)=$

$1\underbrace{0\dots0}_{k-2}1 \cdot n = n \cdot 10^{k-1} + a_1 \cdot 10^{k-1} + \underbrace{t}_{\overline{a_2 \dots a_k}} \quad \underbrace{t+a_1}_{S(n)}$

$\Rightarrow S(10\dots01n)=t+\underbrace{S(\overbrace{n\cdot10^{k-1}+a_1\cdot10^{k-1}}^{(n+a_1)\cdot10^{k-1}})}_{=S(n+a_1)}=S(n)=t+a_1$

$\Rightarrow S(n+a_1)=a_1 \le 9 \Rightarrow S(n+a_1) \le 9$

$n+a_1=\overline{a_1 \dots a_k}+a_1$

Возможно при сложении будут переходы через разряд, если переходы не дойдут до старшей цифры в n (a_1), то $S(n+a_1) \ge a_1+1$, т.к. $\overline{a_2 \dots a_k}+a_1 < 10^{k-1}$

$a_1 \cdot 10^{k-1}$ останется не тронутым, поскольку
и очевидно $\ge 1 \Rightarrow S(n+a_1)>a_1$, противоречие;

Если переходы дойдут до старшей цифры, то если не произойдет переход через разряд, то есть $n+a_1$ не станет $(k+1)$ значным, то старшая цифра увеличится $\Rightarrow S(n+a_1)>a_1$;

Значит будет переход $\Rightarrow n=\overline{9\dots9l}$; $10\dots0(l-1) \Rightarrow l-1+1=9$
$\Rightarrow l=9$

Тогда $S(\overline{9\dots9l}+9)=9$

Чистовик

№7

продолжение

Значит $n = 9\ldots9$; тогда

$\cancel{11 \cdot \overline{9\ldots9} = 9\ldots9 + 99\ldots9 = 109\ldots989}$

Просто понятно, что

$\forall m: S(m \cdot \underbrace{9\ldots9}_{k}) \neq 9k$

~~№7~~